

Corso di
Progetto di Macchine a Fluido —
Cenni di Gasdinamica Comprimibile

Tiziano Ghisu

March 15, 2021

Contents

1	Equazioni di Navier-Stokes in Forma Adimensionale	3
2	Velocità del Suono	7
3	Ugelli	9
3.1	Flusso subsonico/supersonico di un gas perfetto in un ugello convergente divergente	10
3.2	Effetto del Rapporto di Pressione su un Ugello Convergente-Divergente . . .	12
4	Cono di Mach	14
5	Onde d'Urto Normali	15
6	Onde d'Urto Oblique	20
7	Onde di Espansione	24
8	Metodo delle Caratteristiche	27
8.1	Equazione del Potenziale	27
8.2	Caratteristiche	28

1 Equazioni di Navier-Stokes in Forma Adimensionale

Consideriamo un flusso compressibile, viscoso e bidimensionale. L'equazione della quantità di moto nella direzione x può essere scritta in forma differenziale

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (1)$$

L'equazione 1 è scritta in forma dimensionale. Ciò significa che tutte le variabili che compaiono (ρ, u, p , ecc.) hanno le dimensioni previste (nel Sistema internazionale $[\rho]=\text{kg}/\text{m}^3$, $[u]=\text{m}/\text{s}$, $[p]=\text{N}/\text{m}^2$).

Introduciamo le seguenti variabili adimensionali:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho}{\rho_\infty}; & u' &= \frac{u}{V_\infty}; & v' &= \frac{v}{V_\infty}; & p' &= \frac{p}{p_\infty}; \\ \mu' &= \frac{\mu}{\mu_\infty}; & x' &= \frac{x}{c}; & y' &= \frac{y}{c}; & t' &= \frac{t}{\tau}; \end{aligned} \quad (2)$$

dove $\rho_\infty, V_\infty, p_\infty, \mu_\infty, \tau$ sono valori di riferimento per le grandezze in esame (presi per esempio come valori del flusso indisturbato) e c è una lunghezza di riferimento.

Sostituendo le espressioni precedenti nell'equazione 1:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty V_\infty}{\tau} \frac{\partial \rho' u'}{\partial t'} + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{c} \left(\frac{\partial \rho' u' u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' u' v'}{\partial y'} \right) = & -\frac{p_\infty}{c} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu_\infty V_\infty}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left(\lambda' \nabla \cdot \mathbf{V}' + 2\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Riunendo tutte le grandezze di riferimento (dividendo per $\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{c}$):

$$\begin{aligned} \frac{c}{V_\infty \tau} \frac{\partial \rho' u'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u' u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' u' v'}{\partial y'} = & -\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left(\lambda' \nabla \cdot \mathbf{V}' + 2\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Possiamo scrivere tre numeri adimensionali:

$$\frac{c}{V_\infty \tau} = St \quad (5)$$

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\gamma p_\infty}{\gamma \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\gamma R T_\infty}{\gamma V_\infty^2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma V_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \quad (6)$$

$$\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty c} = Re_\infty \quad (7)$$

Nelle precedenti, γ è il rapporto dei calori specifici a pressione e a volume costanti, a_∞ è la velocità del suono indisturbata e M_∞ è il numero di Mach di riferimento ($M = \frac{V}{a}$), St è il

numero di Strouhal, Re_∞ è il numero di Reynolds calcolato con le grandezze di riferimento. L'equazione 4 diventa:

$$St \frac{\partial \rho' u'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u' u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' u' v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left(\lambda' \nabla \cdot \mathbf{V}' + 2\mu' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \right\} \quad (8)$$

Questa forma delle equazioni ha un'importantissima conseguenza pratica: se consideriamo due problemi geometricamente simili, la soluzione dei due problemi (in termini adimensionali) sarà la stessa a patto che siano gli stessi i numeri adimensionali appena introdotti, e cioè il numero di Reynolds, il numero di Mach, il numero di Strouhal e il rapporto dei calori specifici (che è lo stesso se non cambiamo il fluido, a patto che non cambi in modo notevole la temperatura). In pratica, ciò significa che affinché le due soluzioni siano dinamicamente simili (o vi sia similitudine dinamica) devono essere uguali i numeri adimensionali appena introdotti.

Chiaramente, il numero di Strouhal è importante solo per problemi dipendenti dal tempo (se la derivata temporale è nulla, si annulla il termine che contiene lo Strouhal), il numero di Mach è importante solo per fluidi comprimibili e il numero di Reynolds solo per flussi viscosi. In particolare, se fossimo in presenza di un fluido incomprimibile, il termine

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \quad (9)$$

che compare nell'equazione 4, non può essere scritto in funzione della velocità del suono (infinita per un fluido incomprimibile). Può invece essere scritto:

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \propto \frac{\rho V_\infty^2}{\rho_\infty V_\infty^2} = 1 \quad (10)$$

Scriviamo invece l'equazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(e + V^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(e + V^2/2)u}{\partial x} + \frac{\partial \rho(e + V^2/2)v}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu u \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu v \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu u \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Introducendo gli stessi valori di riferimento introdotti in precedenza, e inoltre:

$$e' = \frac{e}{c_v T_\infty}; \quad k' = \frac{k}{k_\infty} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_\infty c_v T_\infty}{\tau} \frac{\partial \rho'(e')}{\partial t'} + \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{\tau} \frac{\partial \rho'(V'^2/2)}{\partial t'} + \frac{\rho_\infty c_v T_\infty V_\infty}{c} \left(\frac{\partial \rho' e' u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' e' v'}{\partial y'} \right) + \\ & \frac{\rho_\infty V_\infty^3}{c} \left(\frac{\partial \rho' u' V'^2/2}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' v' V'^2/2}{\partial y'} \right) = \frac{k_\infty T_\infty}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \right] \\ & - \frac{p_\infty V_\infty}{c} \left(\frac{\partial p' u'}{\partial x'} - \frac{\partial p' v'}{\partial x'} \right) + \frac{\mu_\infty V_\infty^2}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mu' u' \left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{V}' \right) \right] \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' v' \left(2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{V}' \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mu' u' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

Dividendo per $\frac{\rho_\infty V_\infty^3}{c}$, otteniamo i seguenti coefficienti adimensionali:

$$\frac{\rho_\infty c_v T_\infty}{\tau} \frac{c}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{c_v T_\infty c}{\tau V_\infty^3} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{RT_\infty}{V_\infty^2} \frac{c}{\tau V_\infty} = \frac{St}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2} \quad (14)$$

$$\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{\tau} \frac{c}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{c}{\tau V_\infty^3} = St \quad (15)$$

$$\frac{\rho_\infty c_v T_\infty V_\infty}{c} \frac{c}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{c_v T_\infty}{V_\infty^2} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{RT_\infty}{V_\infty^2} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_\infty T_\infty}{c^2} \frac{c}{\rho_\infty V_\infty^3} &= \frac{k_\infty T_\infty}{\rho_\infty V_\infty^3 c} = \frac{k_\infty T_\infty}{\mu_\infty V_\infty^2} \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty c} \frac{k_\infty \gamma RT_\infty}{\mu_\infty \gamma R V_\infty^2} \frac{1}{Re_\infty} = \frac{k_\infty}{\mu_\infty \gamma R} \frac{1}{M_\infty^2 Re_\infty} \\ &= \frac{1}{(\gamma - 1) Pr_\infty M_\infty^2 Re_\infty} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\frac{p_\infty V_\infty}{c} \frac{c}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{RT_\infty}{V_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \quad (18)$$

$$\frac{\mu_\infty V_\infty^2}{c^2} \frac{c}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty c} = \frac{1}{Re_\infty} \quad (19)$$

dove $Pr_\infty = \frac{c_p \mu_\infty}{k_\infty}$ è il numero di Prandtl, rapporto tra la dissipazione per convezione e quella per diffusione.

In forma adimensionale, l'equazione dell'energia diventa:

$$\begin{aligned}
& \frac{St}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial \rho'(e')}{\partial t'} + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty} \frac{\partial \rho'(V'^2/2)}{\partial t'} + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2} \left(\frac{\partial \rho' e' u'}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' e' v'}{\partial y'} \right) + \\
& \left(\frac{\partial \rho' u' V'^2/2}{\partial x'} + \frac{\partial \rho' v' V'^2/2}{\partial y'} \right) = \frac{1}{(\gamma-1)Pr_\infty M_\infty^2 Re_\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \right] \\
& - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{\partial p' u'}{\partial x'} - \frac{\partial p' v'}{\partial x'} \right) + \frac{1}{Re_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mu' u' \left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{V}' \right) \right] \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' v' \left(2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\lambda}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{V}' \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mu' u' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\mu' v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right] \right\} \tag{20}
\end{aligned}$$

Analogamente alla precedente equazione, due problemi geometricamente simili avranno la stessa soluzione (similitudine dinamica) a patto che siano uguali i numeri adimensionali che compaiono nell'equazione dell'energia scritta in forma adimensionale, e quindi il rapporto tra i calori specifici, i numeri di Reynolds, Mach, Prandtl e Strouhal.

2 Velocità del Suono

Consideriamo una discontinuità infinitesima che si propaga in un fluido in quiete (fermo) con velocità a :

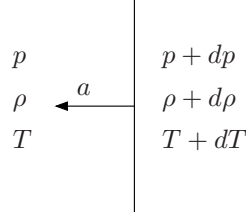


Figure 1: Propagazione di un'onda infinitesima

Riportiamo il problema a un sistema di riferimento solidale con l'onda infinitesima (onda stazionaria e fluido in movimento), e scriviamo le equazioni di conservazione per il volume di controllo indicato in figura 2.

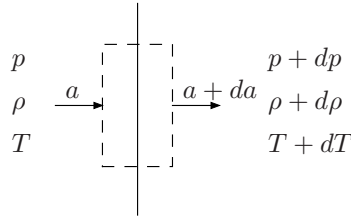


Figure 2: Volume di controllo

$$\text{CONTINUITÀ: } \rho a = (\rho + d\rho)(a + da) \quad (21)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO: } p - (p + dp) = -\rho a^2 + (\rho + d\rho)(a + da^2) \quad (22)$$

Con alcune manipolazioni (trascurando infinitesimi di ordine superiore):

$$\text{CONTINUITÀ: } \rho da + a d\rho = 0 \quad (23)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO: } -dp = a^2 d\rho + 2\rho a da \quad (24)$$

Sostituendo:

$$-dp = a^2 d\rho - 2a^2 d\rho = -a^2 d\rho \quad (25)$$

E quindi:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (26)$$

Per le ipotesi fatte, la velocità del suono a è uguale a $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ in un processo isentropico,

quindi:

$$\begin{aligned} dh &= \mathcal{T}ds + \frac{dp}{\rho} \\ \frac{dp}{p} &= \frac{\rho}{p}c_p dT = \frac{c_p}{R} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \end{aligned} \quad (27)$$

Da questa relazione di possono derivare le relazioni isentropiche:

$$\frac{p}{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \text{cost}; \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost}; \quad \frac{T}{\rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{cost} \quad (28)$$

Sostituendo in 29:

$$a = \sqrt{\text{cost} \frac{d\rho^\gamma}{d\rho}} = \sqrt{\text{cost}(\gamma)\rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\frac{p}{\rho^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad (29)$$

3 Ugelli

Consideriamo un elementino di un ugello, come in figura

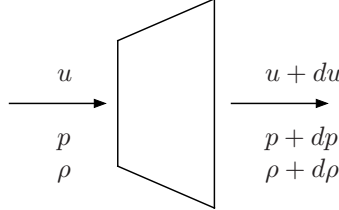


Figure 3: Equazioni di bilancio in un ugello a geometria variabile

$$\begin{aligned} \text{CONTINUITÀ:} \quad \rho u A &= (\rho + d\rho)(u + du)(A + dA) \\ \rho u dA + \rho du A + \rho u dA &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{Q.TÀ DI MOTO:} \quad pA - (p + dp)(A + dA) + (p + \frac{dp}{2}dA) &= -\rho u^2 A + (\rho + d\rho)(u + du)^2(A + dA) \\ -dpA &= \rho u^2 dA + d\rho u^2 A + 2\rho u du A \end{aligned} \quad (31)$$

Moltiplicando l'equazione di continuità per u e sottraendola da quella di quantità di moto:

$$-dpA = \rho u du A \quad (32)$$

$$-dp = \rho u du \quad (33)$$

Dividendo per ρu^2 :

$$\frac{1}{u^2} \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{1}{u^2} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (36)$$

$$(37)$$

Essendo (dall'equazione di continuità):

$$\frac{du}{u} + \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (38)$$

$$-\left(\frac{du}{u} + \frac{dA}{A}\right) + M^2 \frac{du}{u} = 0 \Rightarrow (M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \quad (39)$$

Pertanto in un ugello, la variazione di velocità e di sezione sono concordi se il numero

di Mach è superiore a 1, discordi se il numero di Mach è inferiore a 1. Ne consegue anche che per passare da un flusso subsonico a uno supersonico è necessario passare da una sezione minima (sezione di gola).

3.1 Flusso subsonico/supersonico di un gas perfetto in un ugello convergente divergente

Consideriamo il ugello mostrato in figura. Il flusso nella sezione di gola (le cui condizioni sono indicate con un asterisco) sono soniche. Quindi nella sezione di gola:

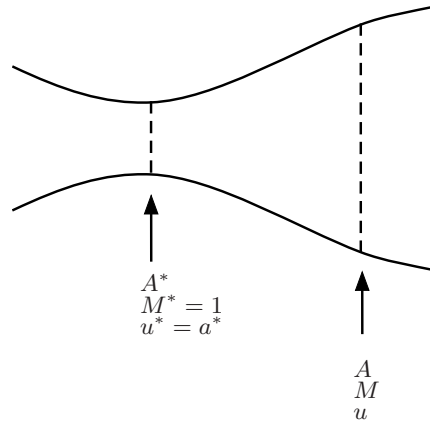


Figure 4: Ugello convergente divergente in condizioni bloccate (soniche nell'area di gola)

$$M^* = 1 \quad u^* = a^* \quad (40)$$

Per l'equazione di continuità:

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A \quad (41)$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho u} = \frac{\rho^* \rho_0 a^*}{\rho_0 \rho u} \quad (42)$$

dove ρ_0 è la densità totale e valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (43)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (44)$$

mentre:

$$\left(\frac{u}{a^*}\right)^2 = M^{*2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \quad (45)$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{A^*}\right)^2 &= \left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \left(\frac{a^*}{u}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{2/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{2/(\gamma-1)} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{\frac{\gamma+1}{2}M^2} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\boxed{\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (47)$$

L'equazione precedente lega il rapporto d'area al numero di Mach. Presa nel senso opposto, il numero di Mach è funzione del rapporto d'area tra l'area in un punto e l'area di gola. In particolare (vedi figura 5):

1. Il rapporto d'area deve sempre essere maggiore di 1.
2. Per ogni rapporto d'area esistono 2 numeri di Mach che verificano l'equazione (uno subsonico e uno supersonico)

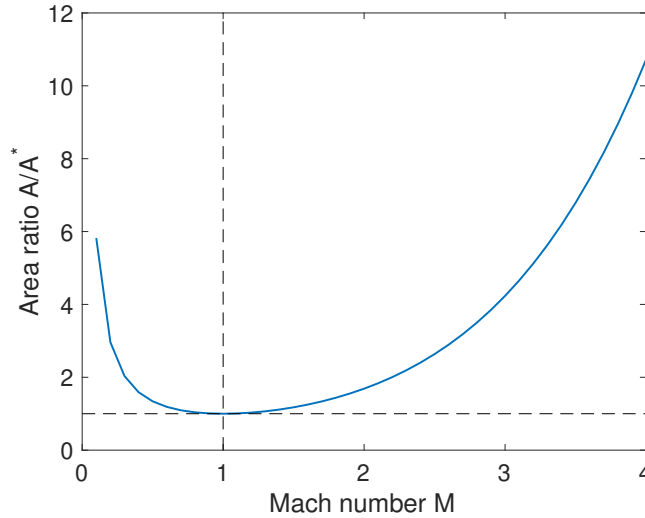


Figure 5: Relazione tra rapporto d'area e numero di Mach (equazione (47))

In figura 6 viene mostrato l'andamento dei valori di Mach, pressione e temperatura in ugello convergente-divergente supersonico, a partire dalle condizioni totali, quindi a partire da un serbatoio in cui possiamo considerare trascurabile la velocità. Per un dato ugello, esiste

solo un modo perchè il fluido si espanda in modo isentropico (in altre parole, in ogni punto dell'ugello, il numero di Mach è solo funzione del rapporto di aree $\frac{A}{A^*}$). Una volta noto il numero di Mach, è immediato calcolare rapporti di pressione e temperatura.

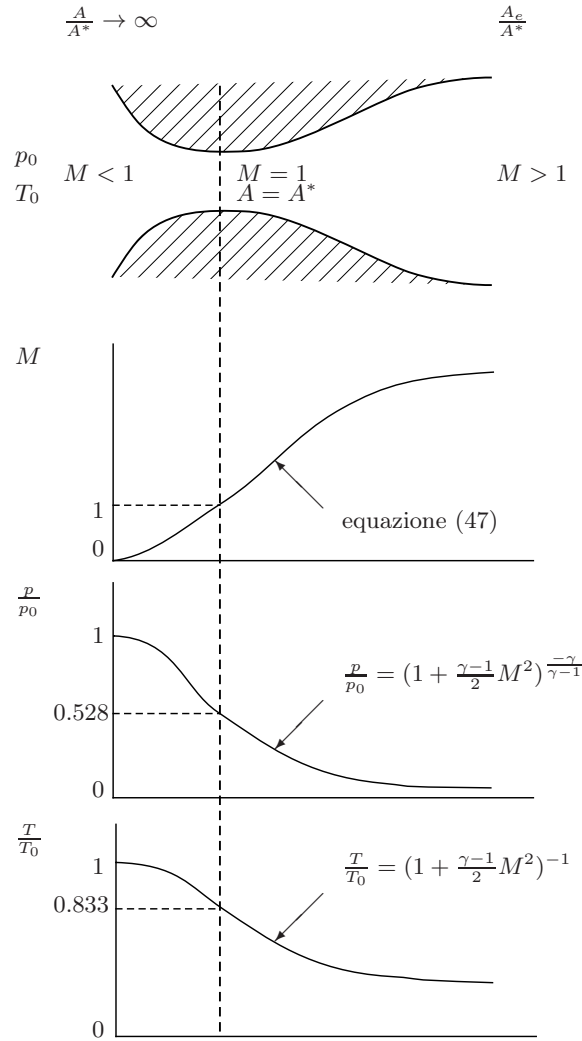


Figure 6: Flusso isentropico in un ugello convergente divergente (supersonico)

3.2 Effetto del Rapporto di Pressione su un Ugello Convergente-Divergente

Affinché si realizzi l'andamento di numeri di Mach (e quindi pressioni e temperature) mostrato in figura 6 è necessario che il rapporto tra la pressione di uscita e la pressione totale abbia precisamente il valore $\frac{p_e}{p_0}$, che dipende esclusivamente dal rapporto di aree $\frac{A_e}{A^*}$.

Ma cosa succede se il rapporto di pressioni $\frac{p_e}{p_0}$ è diverso da quello per cui l'ugello è stato progettato?

Supponiamo di avere $\frac{p_e}{p_0} = 1$. In questo caso non ci sarà alcun flusso nell'ugello. Se iniziamo a diminuire la pressione di uscita (e quindi il rapporto $\frac{p_e}{p_0}$) il fluido comincerà a

fluire nell'ugello. Diminuendo progressivamente il rapporto $\frac{p_e}{p_0}$, il numero di Mach locale aumenterà fino a raggiungere una situazione in cui il Mach nella sezione di gola sarà unitario, ma nella parte divergente dell'ugello ci sarà ancora un flusso subsonico.

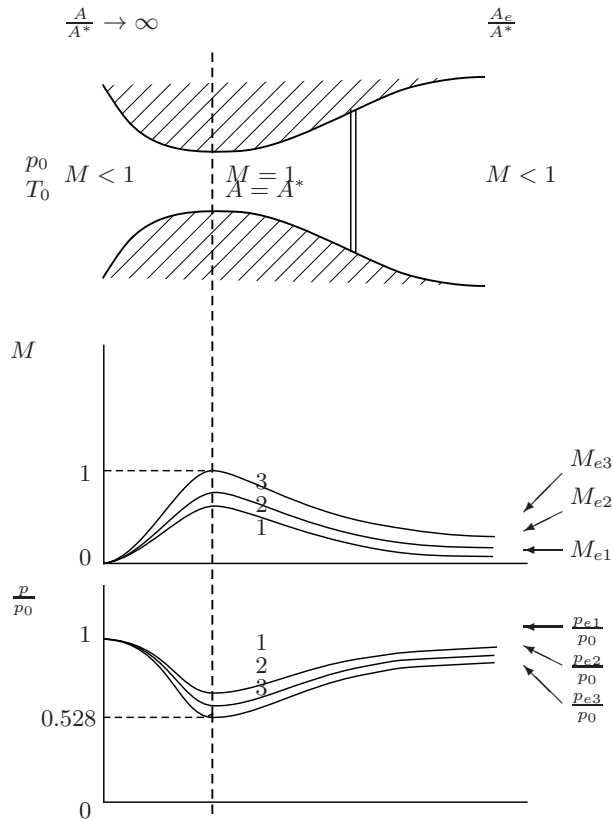


Figure 7: Flusso isentropico in un ugello convergente divergente (subsonico)

Continuando a diminuire il rapporto di pressione $\frac{p_e}{p_0}$, la portata nell'ugello non varierà più. Questo perché l'ugello ora è in condizioni bloccate (*choked flow*). Finché però il rapporto di pressioni non raggiunge quello dettato dalla soluzione supersonica per il rapporto d'aree con cui l'ugello è stato progettato (figura 6, la soluzione non potrà essere quella data dall'evoluzione supersonica isentropica.

Per tutti i rapporti di pressione intermedi tra $\frac{p_{e3}}{p_0}$ e $\frac{p_{e5}}{p_0}$, il flusso dopo la sezione di gola continuerà ad accelerare. Si verificherà quindi un'onda d'urto normale (non isoentropica) che riporterà il flusso in condizioni subsoniche. Da qui in poi il flusso rimarrà subsonico e seguirà fino all'uscita una compressione isoentropica (subsonica). L'evoluzione è rappresentata in figura 8.

Continuando a diminuire il rapporto di pressione $\frac{p_e}{p_0}$, l'onda d'urto si sposterà sempre più verso l'uscita dell'ugello, fino a che non si troverà sulla sezione d'uscita. Indichiamo questo rapporto di pressioni come $\frac{p_{e5}}{p_0}$. La situazione sarà quella illustrata in figura 9.

Per tutti i rapporti di pressione compresi tra $\frac{p_{e5}}{p_0}$ e $\frac{p_{e8}}{p_0}$ si verificheranno delle onde di compressione (oblique) esterne rispetto al ugello (figura ??).

Invece, per rapporti di pressione inferiori a $\frac{p_{e8}}{p_0}$ si verificheranno onde di espansione all'esterno del ugello (figura ??).

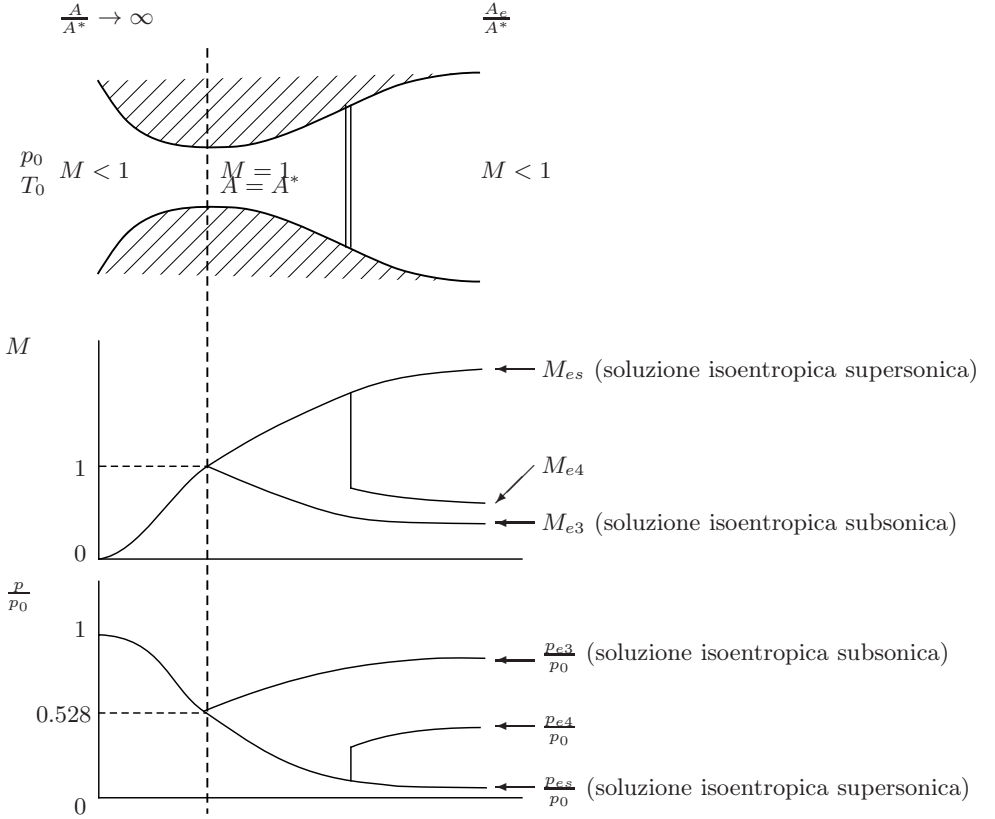


Figure 8: Onda d'urto in un ugello convergente-divergente

4 Cono di Mach

Consideriamo un piccolo oggetto che si muove in un fluido fermo (figura 12). Si possono verificare 3 situazioni:

1. Supponiamo che si muova a velocità inferiore rispetto a quella del suono ($V < a$). In questo caso il disturbo dovuto alla presenza dell'oggetto si propagherà con una velocità a maggiore rispetto a quella dell'oggetto ($M < 1$). Disturbi emessi in tempi successivi non entrano in contatto.
2. Nel caso in cui $V = a$ (l'oggetto si muove alla velocità del suono) le onde emesse percorrono in un tempo dt una distanza at , pari alla distanza percorsa dall'oggetto. Quindi non ci sarà modo per il disturbo di arrivare prima dell'oggetto stesso, e i disturbi emessi a tempi diversi si raggiungeranno tutti la stessa posizione (quella occupata dall'oggetto)
3. Se poi $V > a$ (quindi $M > 1$), l'oggetto si muoverà a una velocità maggiore rispetto al disturbo (onde sonore) emesse dallo stesso, formando (se la velocità V è costante) quello che prende il nome di *cono di Mach*, con un angolo:

$$\mu = \tan^{-1} \left(\frac{a}{V} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{M} \right) \quad (48)$$

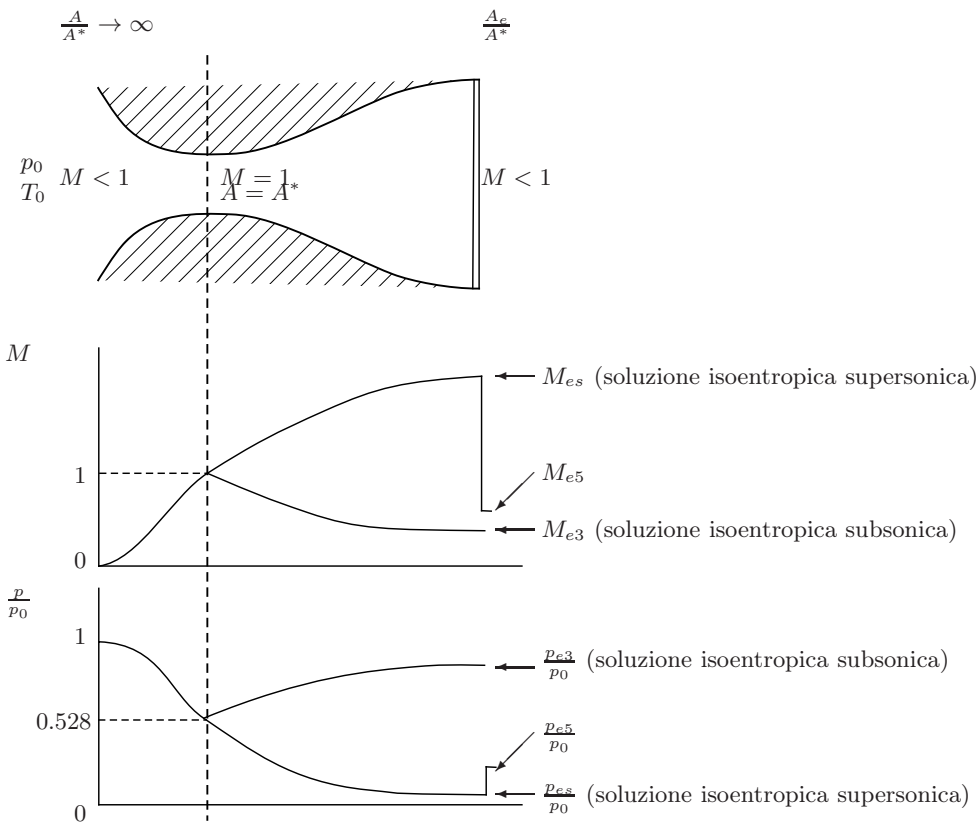


Figure 9: Onda d'urto nella sezione di uscita di un ugello convergente-divergente

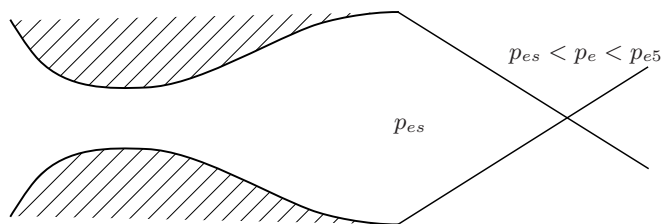


Figure 10: Onde d'urto oblique in un ugello convergente-divergente

5 Onde d'Urto Normali

Un'onda d'urto è una discontinuità nel flusso (una brusca variazione delle sue caratteristiche) che si presenta in alcune situazioni, quando il fluido non è capace di adeguarsi normalmente alle variazioni delle condizioni richieste).

Consideriamo un'onda d'urto normale (o piana), come rappresentato in figura:

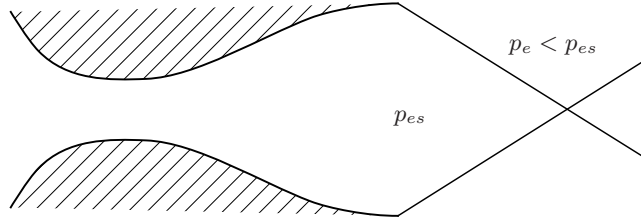


Figure 11: Onde d'espansione in un ugello convergente-divergente

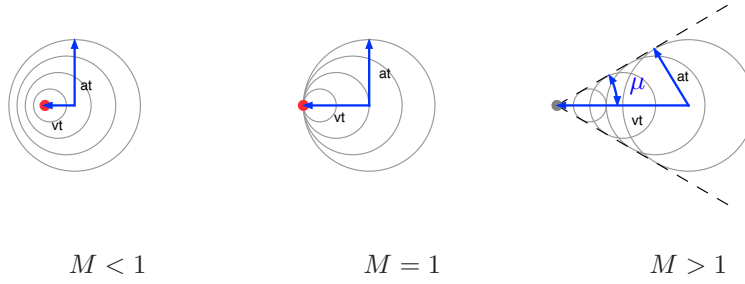


Figure 12: Cono di Mach

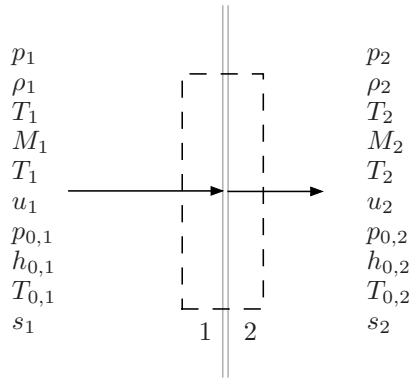


Figure 13: Onda d'urto normale

Scriviamo le equazioni di conservazione:

$$\text{CONTINUITÀ: } \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (49)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO: } p_1 - p_2 = -\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 \Rightarrow p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (50)$$

$$\text{ENERGIA: } h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (51)$$

Dividiamo l'equazione della quantità di moto con quella di continuità:

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2 \Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = u_2 - u_1 \quad (52)$$

Ricordando che $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$:

$$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1 \quad (53)$$

Scriviamo a^2 in funzione di a^{*2} (dove con * indichiamo le condizioni soniche), dove:

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (54)$$

$$a^* = \sqrt{\gamma RT^*} \quad (55)$$

Considerando che l'entalpia totale in un urto di conserva (nessuno scambio di calore)

$$h_0 = \text{cost} = h + \frac{1}{2}u^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT + \frac{1}{2}u^2 = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2 \quad (56)$$

Quindi:

$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 = \text{cost} = \frac{\gamma+1}{2}a^{*2} \quad (57)$$

Pertanto:

$$a_1^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_1^2 = a_2^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_2^2 = \frac{\gamma+1}{2}a^{*2} \quad (58)$$

Sostituendo la precedente nell'equazione 53:

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}a^{*2}u_1 - \frac{\gamma+1}{2\gamma}a^{*2}u_2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}u_1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}u_2 = u_2 - u_1 \quad (59)$$

$$\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}a^{*2}u_1u_2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) (u_2 - u_1) = u_2 - u_1 \quad (60)$$

E di conseguenza:

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}a^{*2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}u_1u_2 = u_1u_2 \quad (61)$$

$$a^{*2} = u_1u_2 \quad (62)$$

$$a^{*2} = u_1u_2 \quad (63)$$

e quindi:

$$\boxed{M_2^* = \frac{1}{M_1^*}} \quad (64)$$

Riprendiamo la relazione:

$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 = \frac{\gamma+1}{2}a^{*2} \quad (65)$$

La stessa può essere scritta nel modo seguente (dividendo la precedente per u^2):

$$\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{M^{*2}} \quad (66)$$

$$\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{M^{*2}} = \frac{1}{M^2} + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{2M^2} \quad (67)$$

oppure:

$$\frac{1}{M^{*2}} = \frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{(\gamma+1)M^2} \quad (68)$$

Ne consegue che:

$$\frac{(\gamma+1)M_2^2}{2 + (\gamma-1)M_2^2} = \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (69)$$

Isolando M_2^2 possiamo ricavare:

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \frac{2 \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}}{(\gamma+1) - \frac{(\gamma-1)(2+(\gamma-1)M_1^2)}{(\gamma+1)M_1^2}} = \\ &= \frac{2(2 + (\gamma-1)M_1^2)}{(\gamma+1)(\gamma+1)M_1^2 - 2(\gamma-1) - (\gamma-1)^2M_1^2} = \\ &= \frac{2(2 + (\gamma-1)M_1^2)}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma-1)} = \end{aligned}$$

$$\boxed{M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}} \quad (70)$$

La precedente rappresenta il rapporto di numeri di Mach attraverso un urto piano. Da notare come M_2 sia sempre inferiore all'unità e come tenda al valore $\frac{\gamma-1}{2\gamma}$ per $M_1 \rightarrow \infty$.

Per quanto riguarda invece il rapporto delle densità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2} = \quad (71)$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}} \quad (72)$$

Il rapporto delle velocità:

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}} \quad (73)$$

Il rapporto delle pressioni:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 \quad (74)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1}{p_1} u_1 (u_1 - u_2) = 1 + \frac{\gamma u_1^2}{a_1^2} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) \quad (75)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}\right) \quad (76)$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)} \quad (77)$$

Posso anche ottenere il rapporto delle temperature:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)\right) \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}} \quad (78)$$

Possiamo calcolare anche l'aumento di entropia attraverso uno shock (da $ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$):

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}} \quad (79)$$

Per quanto riguarda le grandezze totali:

$$\boxed{T_{02} = T_{01}} \text{ non c'è scambio di calore} \quad (80)$$

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad (81)$$

$$\boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{1}{R}(s_2 - s_1)}} \quad (82)$$

6 Onde d'Urto Oblique

Consideriamo un'onda d'urto obliqua (figura 14). Scriviamo le equazioni di conservazione nelle direzioni normale e parallela all'urto:

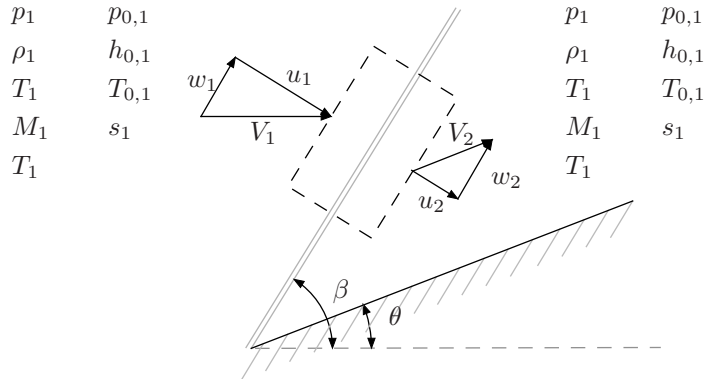


Figure 14: Onda d'urto obliqua

Scriviamo le equazioni di conservazione:

$$\text{CONTINUITÀ:} \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (83)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO:} \quad p_1 - p_2 = -\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 \Rightarrow p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (84)$$

$$-\rho_1 u_1 w_1 + \rho_2 u_2 w_2 \Rightarrow w_1 = w_2 \quad (85)$$

$$\text{ENERGIA:} \quad h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{1}{2} w_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} w_2^2 \quad (86)$$

L'equazione 85 dice che la componente della velocità parallela all'urto si conserva attraverso lo stesso. Le equazioni 83, 84 e 86 sono le stesse scritte in precedenza nel caso di onde d'urto normali (equazioni 49, 50 e 51), a parte il fatto che contengono le componenti della velocità normali all'urto (cosa vera anche nel caso delle onde d'urto normali, visto che questa era l'unica componente non nulla).

Le equazioni per i rapporti dei numeri di Mach, densità, pressioni, temperature, e così via sono equivalenti a quelle scritte per gli urti normali, con l'unica differenza che in questo caso valgono per la componente normale. Pertanto:

$$\boxed{M_{n2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{n1}^2}{\gamma M_{n1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}}} \quad (87)$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}M_{n1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{n1}^2}} \quad (88)$$

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{n1}^2}{\frac{\gamma+1}{2}M_{n1}^2}} \quad (89)$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{n1}^2 - 1)} \quad (90)$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{n1}^2 - 1)\right) \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{n1}^2}{\frac{\gamma+1}{2}M_{n1}^2}} \quad (91)$$

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}} \quad (92)$$

$$\boxed{T_{02} = T_{01}} \quad (93)$$

$$\boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{1}{R}(s_2 - s_1)}} \quad (94)$$

Nelle precedenti:

$$M_{n1} = M_1 \sin(\beta) \quad M_{n2} = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad (95)$$

Per calcolare l'angolo dell'urto, scriviamo le seguenti relazioni:

$$\tan(\beta) = \frac{u_1}{w_1} \quad \tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2} \quad (96)$$

Quindi:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan(\beta)} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{n1}^2}{\frac{\gamma+1}{2}M_{n1}^2} = A \quad (97)$$

Essendo:

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\theta)}{1 + \tan(\beta)\tan(\theta)} \quad (98)$$

$$A \tan(\beta)(1 + \tan(\beta)\tan(\theta)) = (\tan(\beta) - \tan(\theta)) \quad (99)$$

$$\tan(\theta) (1 + A \tan^2(\beta)) = \tan(\beta) (1 - A) \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \tan(\beta) \frac{(1 - A)}{(1 + A \tan^2(\beta))} = \tan(\beta) \frac{(\gamma + 1)M_{n1}^2 - (\gamma - 1)M_{n1}^2 - 2}{(\gamma + 1)M_{n1}^2 + [(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2] \tan^2(\beta)} = \\ &= 2 \tan(\beta) \frac{M_{n1}^2 - 1}{M_{n1}^2 [\gamma(1 + \tan^2(\beta)) + (1 - \tan^2(\beta))] + 2 \tan^2(\beta)} = \\ &= 2 \tan(\beta) \frac{M_{n1}^2 - 1}{\frac{M_{n1}^2}{\cos^2(\beta)} [\gamma + (\cos^2(\beta) - \sin^2(\beta))] + 2 \tan^2(\beta)} \end{aligned} \quad (101)$$

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{2}{\tan(\beta)} \frac{M_1^2 \sin^2(\beta) - 1}{M_1^2 [\gamma + \cos(2\beta)] + 2}} \quad (102)$$

L'equazione 102 specifica il valore dell'angolo θ di deviazione del flusso dopo, in funzione del numero di Mach a monte dell'urto M_1 e dell'angolo dell'urto obliquo (β). Solitamente, conosciamo M_1 e θ e vogliamo calcolare β (funzione implicita). Alcune considerazioni:

1. Per ogni valore del numero di Mach a monte dell'urto M_1 esiste un angolo di deviazione massima θ_{max} . Significa che per quel numero di Mach e per quella deviazione del flusso non è possibile avere in natura un'onda d'urto obliqua. Si genererà invece un'onda curva, staccata dal vertice del corpo, come illustrato in figura.
2. Per ogni valore di θ minore di θ_{max} esistono due soluzioni per ogni numero di Mach a monte. Il valore più piccolo di β rappresenta la soluzione debole, il valore più grande la soluzione forte (o urto debole e urto forte). Questa classificazione deriva dal fatto che per l'urto debole la decelerazione è minore, e così sono minori anche i rapporti di densità e pressione. In natura solitamente si verifica l'urto debole.
3. Se $\theta = 0$ ci possono essere due soluzioni ($\beta = 90^\circ$ e $\beta = \mu$). Nel primo caso abbiamo un

urto normale, nel secondo un urto infinitesimo. In entrambi i casi, non c'è deviazione del flusso.

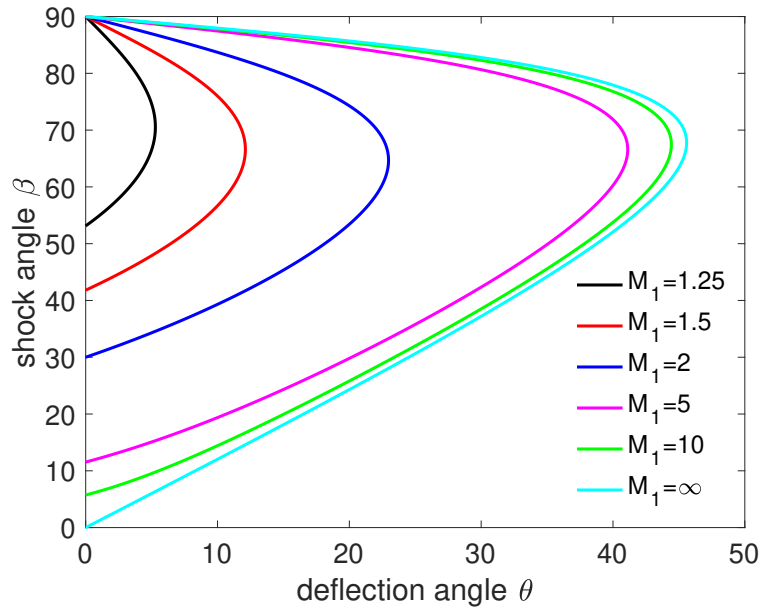


Figure 15: Onde d'urto oblique. Dipendenza dell'angolo di deviazione dal numero di Mach e dall'angolo dell'urto

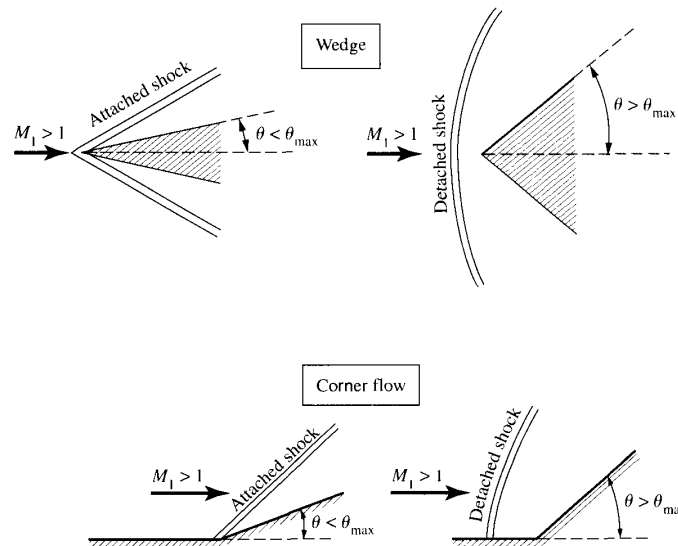


Figure 16: Onde d'urto oblique attaccate e onde d'urto staccate

7 Onde di Espansione

Consideriamo un flusso supersonico che incontra uno spigolo convesso, come in figura 17. Questa situazione viene chiamata espansione di Prandtl-Meyer.

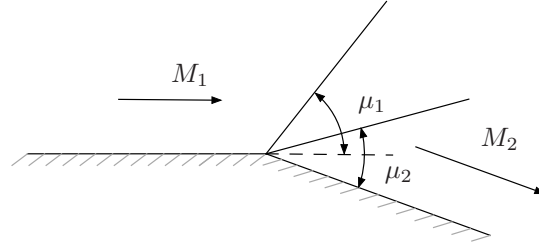


Figure 17: Espansione di Prandtl-Meyer

Consideriamo un'onda di espansione infinitesima (figura 18).

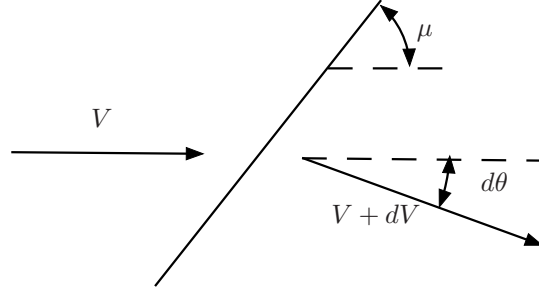


Figure 18: Onda di espansione infinitesima

È facile dimostrare che, come nel caso delle onde d'urto (vedi equazione 85), la componente parallela all'onda si conserva. Pertanto:

$$V \cos(\mu) = (V + dV) \cos(\mu + d\theta) \quad (103)$$

Sviluppando e utilizzando le approssimazioni valide per $d\theta$ infinitesimi ($\cos(d\theta) \approx 1$ e $\sin(d\theta) \approx d\theta$):

$$V \cos(\mu) = (V + dV) (\cos(\mu) \cos(d\theta) - \sin(\mu) \sin(d\theta)) \approx (V + dV) (\cos(\mu) - \sin(\mu) d\theta) \quad (104)$$

Pertanto:

$$1 + \frac{dV}{V} \approx \frac{\cos(\mu)}{\cos(\mu) + \sin(\mu) d\theta} = \frac{1}{1 - d\theta \tan(\mu)} \quad (105)$$

Utilizzando l'espansione in serie di Taylor:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \approx 1 + x \quad (106)$$

$$1 + \frac{dV}{V} \approx 1 + d\theta \tan(\mu) \quad (107)$$

$$1 + \frac{dV}{V} \approx 1 + d\theta \tan(\mu) \quad (108)$$

$$d\theta \approx \frac{dV/V}{\tan\mu} \quad (109)$$

Possiamo scrivere $\tan(\mu)$ in un altro modo, considerando che $\sin(\mu) = 1/M$

$$\tan(\mu) = \frac{1/M}{\sqrt{1 - 1/M^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (110)$$

Perciò l'equazione 109 diventa:

$$\boxed{d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}} \quad (111)$$

L'equazione (111) lega la variazione di angolo del flusso al numero di Mach e alla variazione di velocità. È valida per angoli infinitesimi. Per analizzare l'intera espansione di Prandtl-Meyer bisogna integrare rispetto all'angolo $\Delta\theta$. Di conseguenza:

$$\Delta\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (112)$$

Perché l'equazione (112) sia integrabile è necessario ricavare il legame tra V e M . Per definizione:

$$V = Ma \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} \quad (113)$$

Dobbiamo perciò ricavare il legame tra la velocità del suono a e il numero di Mach M . Essendo:

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/2} \quad (114)$$

$$da = -a_0 \frac{\gamma - 1}{2} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-3/2} dM \quad (115)$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\frac{da}{a} &= -\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/2} \frac{\gamma-1}{2}M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-3/2} dM = \\ &= -\frac{\gamma-1}{2}M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1} dM\end{aligned}\quad (116)$$

Riprendendo la (113):

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} &= \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} = \frac{dM}{M} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}\end{aligned}\quad (117)$$

Sostituendo la precedente nell'equazione (112):

$$\Delta\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}\quad (118)$$

L'integrale

$$\nu(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}\quad (119)$$

è detto *funzione di Prandtl-Meyer* ed è solitamente indicato con il simbolo ν . Può essere integrato in modo esatto e da:

$$\boxed{\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1}}\quad (120)$$

La costante di integrazione che comparirebbe nella precedente viene convenzionalmente posta uguale a zero, in modo che $\nu(M) = 0$ quando $M = 1$. Il suo valore non è comunque importante in quanto si semplificherebbe nell'equazione (??), che quindi può essere riscritta nel seguente modo:

$$\Delta\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1)\quad (121)$$

La funzione di Prandtl-Meyer può essere calcolata algebricamente oppure viene spesso fornita in tabelle in funzione del numero di Mach. Per conoscere il numero di Mach in seguito a un'espansione di Prandtl Meyer, il procedimento è il seguente:

1. Calcolare la funzione di Prandtl-Meyer corrispondente a M_1 ($\nu(M_1)$)

2. Calcolare $\nu(M_2) = \nu(M_1) + \Delta\theta$
3. Calcolare M_2 per il quale $\nu(M_2)$ è uguale al valore calcolato al punto 2 (tramite inversione numerica).
4. La velocità, la temperatura e la pressione dopo l'espansione possono essere calcolate tramite le relazioni isoentropiche.

8 Metodo delle Caratteristiche

8.1 Equazione del Potenziale

Consideriamo un flusso inviscido e stazionario, bidimensionale:

$$\text{CONTINUITÀ:} \quad \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (122)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO x:} \quad \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (123)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO y:} \quad \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (124)$$

Sviluppando le precedenti:

$$\text{CONTINUITÀ:} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (125)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO x:} \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \rho_x = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (126)$$

$$\text{Q.TÀ DI MOTO y:} \quad \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \rho_y = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (127)$$

Sostituendo le equazioni (126) e (127) nell'equazione (125), e dividendo per ρ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u}{a^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{v}{a^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (128)$$

Introduciamo una funzione Φ (detta FUNZIONE POTENZIALE) tale che $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & - \frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] \\ & - \frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (129)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (130)$$

L'equazione (130) rappresenta l'equazione del potenziale, che vale per flusso inviscido, stazionario, bidimensionale.

8.2 Caratteristiche

Scriviamo l'equazione del potenziale (130) nel seguente modo:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2 \frac{uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (131)$$

Possiamo inoltre scrivere:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dy \quad (132)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy \quad (133)$$

Immaginiamo di dover trovare il valore di $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ dalle precedenti equazioni. Utilizzando la regola di Cramer:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\begin{vmatrix} (1 - \frac{u^2}{a^2}) & 0 & (1 - \frac{v^2}{a^2}) \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - \frac{u^2}{a^2}) & -2 \frac{uv}{a^2} & (1 - \frac{v^2}{a^2}) \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} \quad (134)$$

Supponiamo di conoscere le condizioni del flusso su una linea di corrente, come rappresentato in figura 19. Risolvere questo sistema di equazioni serve se, date le condizioni (u, v) in un punto A, volessimo calcolare le condizioni (u, v) in un punto distante ds :

Infatti:

$$u_B = u_A = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_A dy = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_A dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_A dy \quad (135)$$

$$v_B = v_A + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_A dx + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_A dy = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_A dx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_A dy \quad (136)$$

Affinchè l'equazione (134) abbia soluzione, è necessario che il denominatore sia diverso da

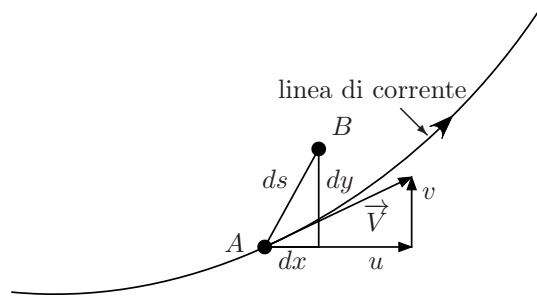


Figure 19: Linee di corrente

zero. Quindi:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) dy^2 + 2\frac{uv}{a^2} dx dy + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dx^2 \quad (137)$$

Possiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{uv}{a^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)} = \\ &= \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)} = \\ &= \frac{-M^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \pm \sqrt{M^2 - 1}}{1 - M^2 \cos(\theta)} = \\ &= \frac{-\frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin^2(\mu)} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\mu)} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} = \\ &= \frac{-\sin(\theta) \cos(\theta) \pm \sin^2(\mu) \frac{\cos(\mu)}{\sin(\mu)}}{\sin^2(\mu) - \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{-\sin(\theta) \cos(\theta) \pm \sin(\mu) \cos(\mu)}{\sin^2(\mu) - \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{-\frac{\sin(2\theta)}{2} \pm \frac{\sin(2\mu)}{2}}{-\frac{\cos(2\mu)}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2}} \\ &= \frac{-\sin(2\theta) \pm \sin(2\mu)}{-\cos(2\mu) - \cos(2\theta)} \\ &= \frac{\sin(2\theta) \mp \sin(2\mu)}{\cos(2\mu) + \cos(2\theta)} \quad (138) \end{aligned}$$

Essendo:

$$\begin{aligned}
\sin(A) + \sin(B) &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\sin(A) - \sin(B) &= 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \\
\cos(A) + \cos(B) &= 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)
\end{aligned} \tag{139}$$

L'equazione (138) diventa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\theta \mp \mu) \cos(\theta \pm \mu)}{\cos(\theta + \mu) \cos(\theta - \mu)} = \tag{140}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta \mp \mu) \tag{141}$$

L'equazione del potenziale (equazione (130)) ammette pertanto due caratteristiche, con coefficienti angolari $\tan(\theta - \mu)$ e $\tan(\theta + \mu)$.

Sulle caratteristiche, essendo il denominatore uguale a zero, anche il numeratore deve annullarsi (equazione (138). Pertanto:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) du dy + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dv dx = 0 \tag{142}$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) dy}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dx} = -\frac{\cancel{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)} - \frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)} \tag{143}$$

Pertanto:

$$\frac{d(V \sin(\theta))}{d(V \cos(\theta))} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)} = \frac{M^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \mp \sqrt{M^2 - 1}}{1 - M^2 \sin^2(\theta)} = A \tag{144}$$

Sviluppando:

$$\begin{aligned}
\sin(\theta)dV + V \cos(\theta)d\theta &= A(\cos(\theta)dV - V \sin(\theta)d\theta) \\
(A \sin(\theta) + \cos(\theta))d\theta &= (A \cos(\theta) - \sin(\theta))\frac{dV}{V}
\end{aligned} \tag{145}$$

Sostituendo A :

$$\begin{aligned}
d\theta &= \frac{M^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \mp \sqrt{M^2 - 1} \cos(\theta) - \sin(\theta) + M^2 \sin^3(\theta)}{M^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \mp \sqrt{M^2 - 1} \sin(\theta) + \cos(\theta) - M^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta)} \frac{dV}{V} = \\
&= \frac{M^2 \sin(\theta) - \sin(\theta) \mp \sqrt{M^2 - 1} \cos(\theta)}{\mp \sqrt{M^2 - 1} \sin(\theta) + \cos(\theta)} \frac{dV}{V} = \\
&= \frac{\mp \sqrt{M^2 - 1} (\mp \sqrt{M^2 - 1} \sin(\theta) + \cos(\theta))}{\mp \sqrt{M^2 - 1} \sin(\theta) + \cos(\theta)} \frac{dV}{V} \tag{146}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\boxed{d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}} \tag{147}$$

A parte il segno \mp , la precedente è la stessa equazione trovata per l'espansione di Prandtl-Meyer (equazione 111). Risolvendola nello stesso modo e introducendo la funzione di Prandtl-Meyer (equazione (??)):

$$\boxed{d\theta = \mp d\nu} \tag{148}$$

Quindi sulle caratteristiche **positive**:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \quad d\theta = d\nu \Rightarrow \theta - \nu = \text{cost.} \tag{149}$$

Invece sulle caratteristiche **negative**:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \quad d\theta = -d\nu \Rightarrow \theta + \nu = \text{cost.} \tag{150}$$