

Corso di
Modellazione di Sistemi a Fluido

—

Metodo ai volumi finiti

Tiziano Ghisu

December 11, 2019

Contents

1	Problemi di diffusione	3
1.1	Caso bidimensionale	8
2	Problemi di convezione-diffusione	11
3	Proprietà fondamentali per la stabilità di uno schema numerico	21
3.1	Schema Upwind	22
3.2	Schema Ibrido	24
3.3	Schema QUICK	24
3.3.1	Stabilità	27
3.4	Generalizzazione di schemi Upwind	28
4	Accoppiamento pressione-velocità	31
4.1	Sull'equazione di correzione della pressione	35
4.2	Griglie co-locate e "staggered"	35

1 Problemi di diffusione

Consideriamo un problema di diffusione stazionario per uno scalare generico ϕ

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\Gamma \nabla \phi) \cdot \vec{n} d\Omega + \int_{\mathcal{V}} S_{\phi} d\mathcal{V} = 0 \\ + \text{condizioni al contorno} \end{cases} \quad (1)$$

Per risolvere questo problema con il metodo dei Volumi Finiti, il primo passo è quello di suddividere il dominio in volumi di controllo. Se consideriamo un caso monodimensionale:

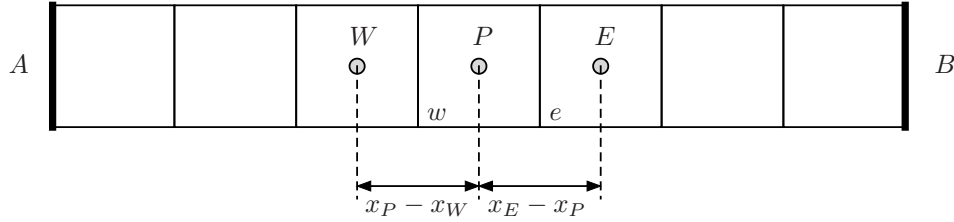


Figure 1: Discretizzazione di un problema monodimensionale con un approccio ai Volumi Finiti

Ogni volume è identificato da un centro-cella e da due facce (caso mono-dimensionale). Solitamente la geometria viene suddivisa in modo tale che gli estremi del dominio coincidano con facce di volumi di controllo.

Indichiamo con P un generico volume di controllo, con W e E i volumi di controllo rispettivamente a sinistra e destra rispetto al volume P , e con w e e le facce che separano rispettivamente i volumi W e P e i volumi P ed E . Le distanze tra i centri cella saranno $x_P - x_W$ e $x_E - x_P$, rispettivamente.

Troviamo un'approssimazione per l'integrale di superficie:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Gamma \nabla \phi) \cdot \vec{n} d\Omega &= \Gamma_e A_e \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e - \Gamma_w A_w \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w = \\ &= \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} (\phi_P - \phi_W) \end{aligned} \quad (2)$$

dove è stata utilizzata un'approssimazione del secondo ordine (centrata) per la derivata prima.

Per l'integrale di volume (termine sorgente):

$$\int_{\mathcal{V}} S_{\phi} d\mathcal{V} = S_P \phi_P + S_U \quad (3)$$

Spesso si approssima l'integrale di volume (termine sorgente) come somma di un contributo linearmente dipendente da ϕ_P e uno indipendente.

Sostituendo nell'equazione (1):

$$\frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P}(\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W}(\phi_P - \phi_W) + S_P \phi_P + S_U = 0 \quad (4)$$

Riordinando:

$$\left[-S_P + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \right) + \left(\frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \right] \phi_P = \left(\frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \right) \phi_E + \left(\frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \phi_W + S_U \quad (5)$$

In modo più compatto:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_U \quad (6)$$

dove

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \\ a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \\ a_P &= a_E + a_W - S_P \end{aligned}$$

Esempio

Consideriamo un problema di diffusione del calore in una barretta di metallo, in un caso stazionario.

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (k \nabla T) \cdot \vec{n} \, d\Omega = 0 \\ + \text{condizioni al di Dirichlet agli estremi: } T(A) = T_A \text{ e } T(B) = T_B \end{cases} \quad (7)$$

Utilizziamo una suddivisione del dominio in volumi di dimensione costante e scriviamo l'equazione (42) per questo caso:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_U \quad (8)$$

dove:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{k_e A_e}{\Delta x} \\ a_W &= \frac{k_w A_w}{\Delta x} \\ S_U &= 0 \\ S_P &= 0 \\ a_P &= a_E + a_W - S_P \end{aligned}$$

Per il primo volume (in cui conosciamo la temperatura sulla faccia $w = A$), l'equazione

(7) diventa:

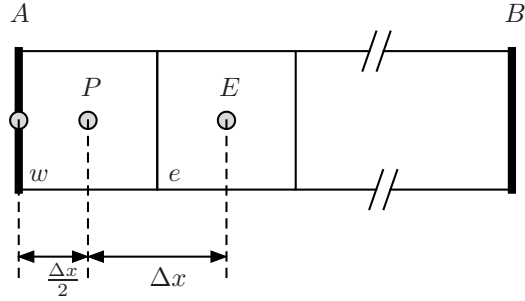


Figure 2: Condizione al contorno di Dirichlet in A

$$(k_e A_e) \frac{dT}{dx} \Big|_e - (k_w A_w) \frac{dT}{dx} \Big|_w = (k_e A_e) \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - (k_A A_A) \frac{T_P - T_A}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (9)$$

e perciò:

$$\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + 2 \frac{k_A A_A}{\Delta x} \right) T_P = \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} \right) T_E + 2 \left(\frac{k_A A_A}{\Delta x} \right) T_A \quad (10)$$

Perciò:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{k_e A_e}{\Delta x} \\ a_W &= 0 \\ S_U &= 2 \frac{k_A A_A}{\Delta x} T_A \\ S_P &= -2 \frac{k_A A_A}{\Delta x} \\ a_P &= a_E + a_W - S_P \end{aligned} \quad (12)$$

Per l'ultimo volume (in cui conosciamo la temperatura sulla faccia $e = B$), l'equazione (7) diventa:

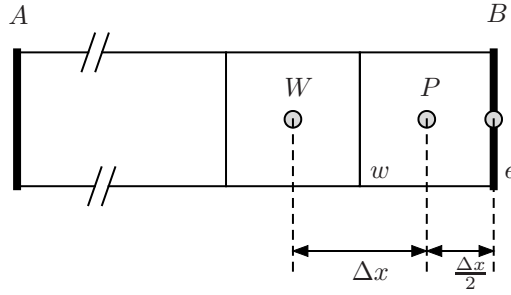


Figure 3: Condizione al contorno di Dirichlet in B

$$(k_e A_e) \frac{dT}{dx} \Big|_e - (k_w A_w) \frac{dT}{dx} \Big|_w = (k_B A_B) \frac{T_B - T_P}{\frac{\Delta x}{2}} - (k_w A_w) \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (13)$$

e perciò:

$$2 \left(\frac{k_B A_B}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} \right) T_P = 2 \left(\frac{k_B A_B}{\Delta x} \right) T_B + \left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} \right) T_W \quad (14)$$

Perciò:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_E &= 0 \\ a_W &= \frac{k_w A_w}{\Delta x} \\ S_U &= 2 \frac{k_B A_B}{\Delta x} T_B \\ S_P &= -2 \frac{k_B A_B}{\Delta x} \\ a_P &= a_E + a_W - S_P \end{aligned} \quad (16)$$

E se invece avessimo una condizione al contorno di Neumann (supponiamo in B)?

$$\frac{dT}{dx} \Big|_B = \sigma \text{ condizione al contorno di Neumann in B} \quad (17)$$

In questo caso ($\frac{dT}{dx} \Big|_e = \frac{dT}{dx} \Big|_B = \sigma$):

$$\int_{\Omega} (k \nabla T) \cdot \vec{n} d\Omega = 0 \quad (k_e A_e) \frac{dT}{dx} \Big|_e - (k_w A_w) \frac{dT}{dx} \Big|_w = (k_B A_B) \sigma - (k_w A_w) \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (18)$$

e perciò:

$$\frac{k_w A_w}{\Delta x} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + k_B A_B \sigma \quad (19)$$

Quindi:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_u \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_E &= 0 \\ a_W &= \frac{k_w A_w}{\Delta x} \\ S_U &= k_B A_B \sigma \\ S_P &= 0 \\ a_P &= a_E + a_W - S_P \end{aligned} \quad (21)$$

Mettendo tutto insieme otteniamo un sistema matriciale di questo tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{P,1} & -a_{E,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{W,2} & a_{P,2} & -a_{E,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{W,3} & a_{P,3} & -a_{E,3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{W,N-2} & a_{P,N-2} & -a_{E,N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{W,N-1} & a_{P,N-1} & -a_{E,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{W,N} & a_{P,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{U,1} \\ S_{U,2} \\ S_{U,3} \\ \vdots \\ S_{U,N-2} \\ S_{U,N-1} \\ S_{U,N} \end{bmatrix} \quad (22)$$

che deve essere risolto per trovare la soluzione del problema.

1.1 Caso bidimensionale

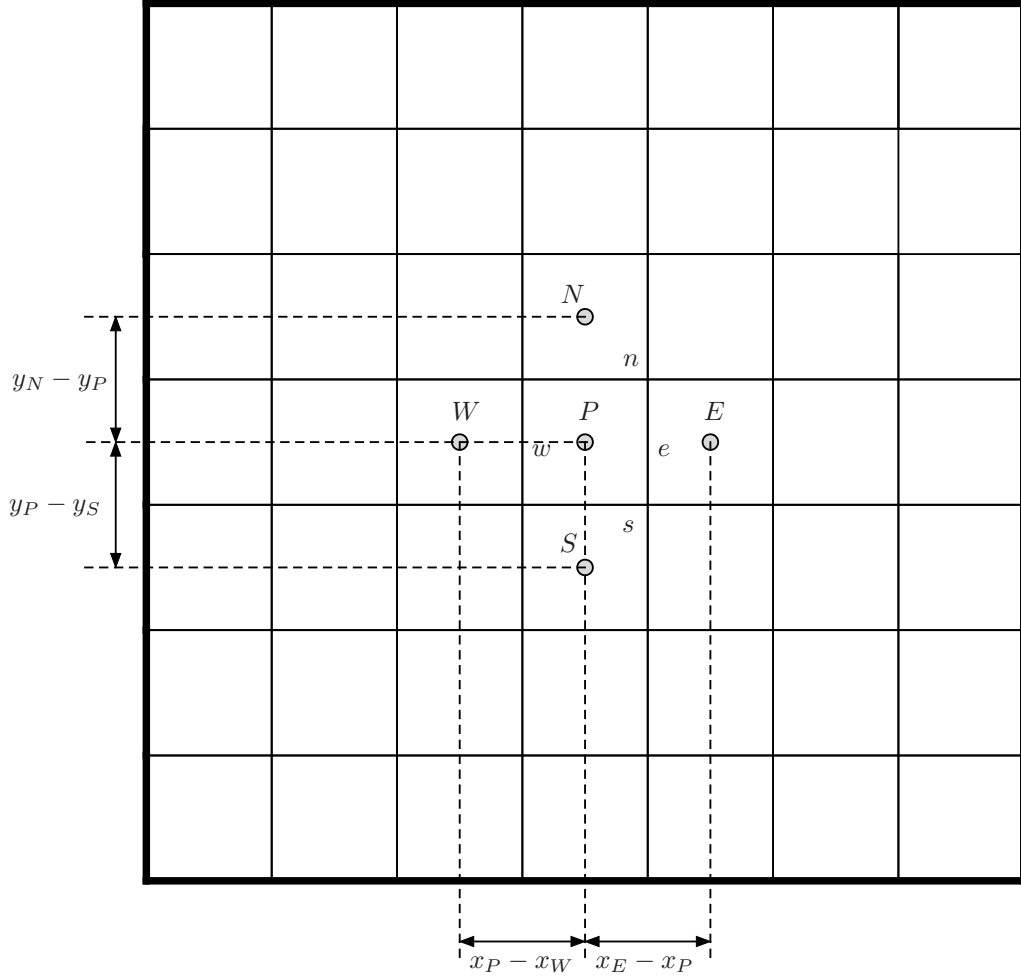


Figure 4: Condizione al contorno di Dirichlet in B

In questo caso possiamo approssimare l'integrale di superficie nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\Gamma \nabla \phi) \cdot \vec{n} d\Omega &= \Gamma_e A_e \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e - \Gamma_w A_w \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w + \Gamma_n A_n \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_n - \Gamma_s A_s \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_s = \\
 &= \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} (\phi_P - \phi_W) \\
 &+ \frac{\Gamma_n A_n}{y_N - y_P} (\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_s A_s}{y_P - y_S} (\phi_P - \phi_S)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Sostituendo nell'equazione (1):

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P}(\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W}(\phi_P - \phi_W) \\ & + \frac{\Gamma_n A_n}{y_N - y_P}(\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_s A_s}{y_P - y_S}(\phi_P - \phi_S) + S_P \phi_P + S_U = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Riordinando:

$$\begin{aligned} & \left[-S_P + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \right) + \left(\frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{y_N - y_P} \right) + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{y_P - y_S} \right) \right] \phi_P = \\ & = \left(\frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \right) \phi_E + \left(\frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{y_N - y_P} \right) \phi_N + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{y_P - y_S} \right) \phi_S + S_U \end{aligned} \quad (25)$$

In modo più compatto:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_U \quad (26)$$

dove

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \\ a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \\ a_N &= \frac{\Gamma_n A_n}{y_N - y_P} \\ a_S &= \frac{\Gamma_s A_s}{y_P - y_S} \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \end{aligned}$$

Analogamente si ricava l'espressione per un caso tridimensionale:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_U a_F \phi_F + a_B \phi_B + S_U \quad (27)$$

dove

$$a_E = \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P}$$

$$a_W = \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W}$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n A_n}{y_N - y_P}$$

$$a_S = \frac{\Gamma_s A_s}{y_P - y_S}$$

$$a_F = \frac{\Gamma_f A_f}{y_F - y_P}$$

$$a_B = \frac{\Gamma_b A_b}{y_P - y_B}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_F + a_B - S_P$$

2 Problemi di convezione-diffusione

Consideriamo un problema di convezione-diffusione stazionario per uno scalare generico ϕ , scritto in forma integrale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\rho \vec{V} \phi) \cdot \vec{n} d\Omega = \int_{\Omega} (\Gamma \nabla \phi) \cdot \vec{n} d\Omega + \int_{\mathcal{V}} S_{\phi} d\mathcal{V} \\ + \text{condizioni al contorno} \end{array} \right. \quad (28)$$

Contemporaneamente, deve essere rispettata anche l'equazione di continuità, che può essere espressa in forma integrale nel seguente modo:

$$\int_{\Omega} (\rho \vec{V}) \cdot \vec{n} d\Omega = 0 \quad (29)$$

Consideriamo un problema monodimensionale, discretizzato in figura 5.

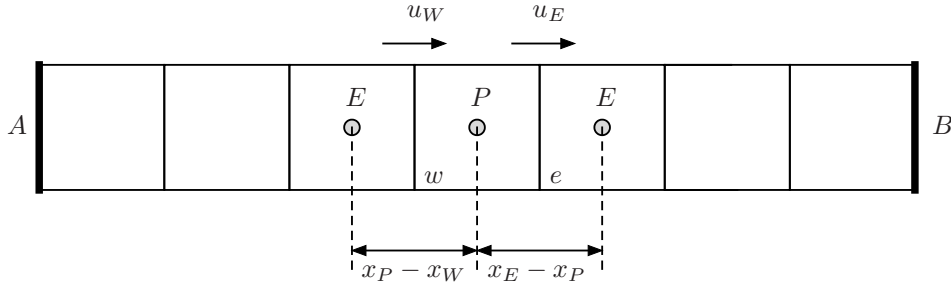


Figure 5: Discretizzazione di un problema monodimensionale di convezione-diffusione con un approccio ai Volumi Finiti

Possiamo approssimare:

$$\int_{\Omega} (\rho \vec{V} \phi) \cdot \vec{n} d\Omega = (\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w \quad (30)$$

$$\int_{\Omega} (\Gamma \nabla \phi) \cdot \vec{n} d\Omega = \Gamma_e A_e \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e - \Gamma_w A_w \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w \quad (31)$$

$$\int_{\mathcal{V}} S_{\phi} d\mathcal{V} = S_P \phi_P + S_U \quad (32)$$

Introduciamo i due termini:

$$F = \rho u A \quad D = \frac{\Gamma A}{\Delta x} \quad (33)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
F_e &= \rho_e u_e A_e & D_e &= \frac{\Gamma_e A_e}{x_E - x_P} \\
F_w &= \rho_w u_w A_w & D_w &= \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W}
\end{aligned} \tag{34}$$

Continuiamo ad utilizzare una differenza centrata (secondo ordine), come nel caso della sola diffusione, per approssimare i valori di ϕ e del suo gradiente sulle facce:

$$\begin{aligned}
\phi_e &= \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \\
\phi_w &= \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \\
\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \\
\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{x_P - x_W}
\end{aligned} \tag{35}$$

Tralasciando il termine sorgente, e sostituendo nell'equazione (32):

$$F_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - F_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{36}$$

Riordinando:

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \tag{37}$$

In forma compatta:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \tag{38}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_E &= \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \\
a_W &= \left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) \\
a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w)
\end{aligned} \tag{39}$$

Notiamo come il termine $(F_e - F_w)$ è nullo quando è rispettata l'equazione di continuità (equazione (29)).

Particolare attenzione è richiesta nell'applicazione delle condizioni al contorno. Per il primo volume:

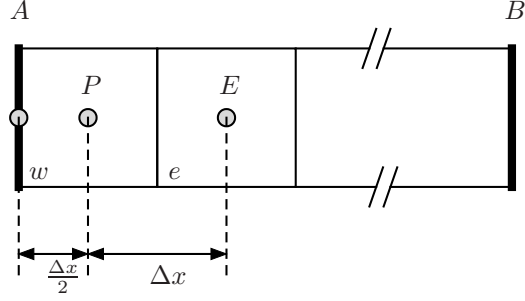


Figure 6: Discretizzazione per il primo volume

L'equazione (36) diventa:

$$F_e \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - F_A \phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - 2D_A(\phi_P - \phi_A) \quad (40)$$

Riordinando:

$$\left[2D_A + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E + 2D_A \phi_A + F_A \phi_A \quad (41)$$

In forma compatta:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_u \quad (42)$$

dove:

$$\begin{aligned} a_E &= \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \\ a_W &= 0 \\ S_U &= 2\left(D_A + \frac{F_A}{2} \right) \phi_A \\ S_P &= -2\left(D_A + \frac{F_A}{2} \right) \\ a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_A) - S_P = \left[2D_A + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Per l'ultimo:

L'equazione (36) diventa:

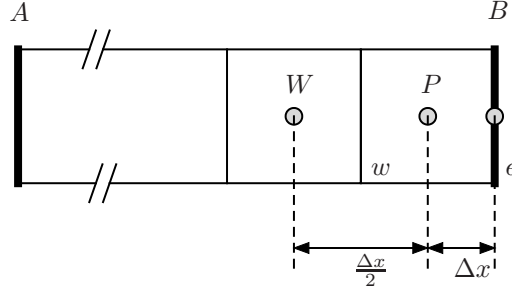


Figure 7: Discretizzazione per l'ultimo volume

$$F_B \phi_B - F_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} = 2D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (44)$$

Riordinando:

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + 2D_B \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + 2D_B \phi_B - F_B \phi_B \quad (45)$$

In forma compatta:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_u \quad (46)$$

dove:

$$\begin{aligned} a_E &= 0 \\ a_W &= \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \\ S_U &= 2 \left(D_B - \frac{F_B}{2} \right) \phi_B \\ S_P &= -2 \left(D_B - \frac{F_B}{2} \right) \\ a_P &= a_E + a_W + (F_B - F_w) - S_P = \left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + 2D_B \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Mettendo tutto insieme otteniamo un sistema matriciale di questo tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{P,1} & -a_{E,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{W,2} & a_{P,2} & -a_{E,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{W,3} & a_{P,3} & -a_{E,3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{W,N-2} & a_{P,N-2} & -a_{E,N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{W,N-1} & a_{P,N-1} & -a_{E,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{W,N} & a_{P,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{N-2} \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{U,1} \\ S_{U,2} \\ S_{U,3} \\ \vdots \\ S_{U,N-2} \\ S_{U,N-1} \\ S_{U,N} \end{bmatrix} \quad (48)$$

che deve essere risolto per trovare la soluzione del problema.

Esempio 1

Consideriamo:

$$\begin{aligned} u &= 0.1; \rho = 1; \Gamma = 0.1 \\ x_A &= 0; x_B = 1; \Delta x = 0.2; A = 1 \\ \phi_A &= 1; \phi_B = 0 \end{aligned}$$

$$F_e = (\rho u A)_e = 0.1$$

$$F_w = (\rho u A)_w = 0.1$$

$$D_e = \left(\frac{\Gamma A}{\Delta x} \right)_e = 0.5$$

$$D_w = \left(\frac{\Gamma A}{\Delta x} \right)_w = 0.5$$

Applichiamo:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_U$$

Per i nodi interni:

$$a_E = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) = 0.45$$

$$a_W = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) = 0.55$$

$$S_U = 0$$

$$S_P = 0$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) = 1$$

Per il primo volume:

$$a_E = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) = 0.45$$

$$a_W = 0$$

$$S_U = 2\left(D_A + \frac{F_A}{2}\right)\phi_A = 1.1\phi_A = 1.1$$

$$S_P = -2\left(D_A + \frac{F_A}{2}\right) = -1.1$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_A) - S_P = 1.55$$

Per l'ultimo volume:

$$a_E = 0$$

$$a_W = 0.55$$

$$S_U = 0.9\phi_B = 0$$

$$S_P = -0.9$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_B - F_w) - S_P = 1.45$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1. & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1. & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1. & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione è mostrata in figura:

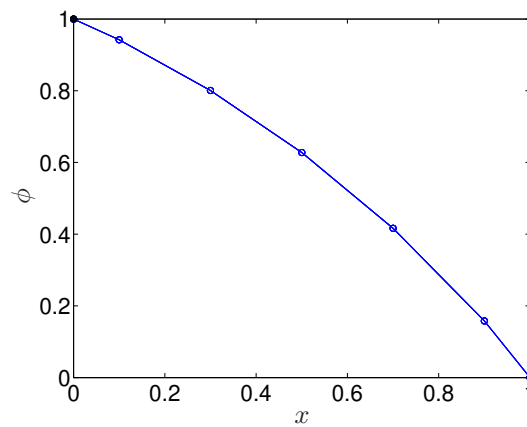


Figure 8: Soluzione numerica del problema

Esempio 2

Consideriamo:

$$\begin{aligned}u &= 2.5; \rho = 1; \Gamma = 0.1 \\x_A &= 0; x_B = 1; \Delta x = 0.2; A = 1 \\ \phi_A &= 1; \phi_B = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_e &= (\rho u A)_e = 2.5 \\F_w &= (\rho u A)_w = 2.5 \\D_e &= \left(\frac{\Gamma A}{\Delta x}\right)_e = 0.5 D_w &= \left(\frac{\Gamma A}{\Delta x}\right)_w = 0.5\end{aligned}$$

Applichiamo:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_U$$

Per i nodi interni:

$$\begin{aligned}a_E &= \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) = -0.75 \\a_W &= \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) = 1.75 \\S_U &= 0 \\S_P &= 0 \\a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w) = 1\end{aligned}$$

Per il primo volume:

$$\begin{aligned}a_E &= \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) = -0.75 \\a_W &= 0 \\S_U &= 2\left(D_A + \frac{F_A}{2}\right)\phi_A = 3.5\phi_A = 3.5 \\S_P &= -2\left(D_A + \frac{F_A}{2}\right) = -3.5 \\a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_A) - S_P = 2.75\end{aligned}$$

Per l'ultimo volume:

$$\begin{aligned}
 a_E &= 0 \\
 a_W &= 1.75 \\
 S_U &= -1.5\phi_B = 0 \\
 S_P &= 1.5 \\
 a_P &= a_E + a_W + (F_B - F_w) - S_P = 0.25
 \end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 2.75 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ -1.75 & 1. & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 1. & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & -1.75 & 1. & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & -1.75 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione è mostrata in figura:

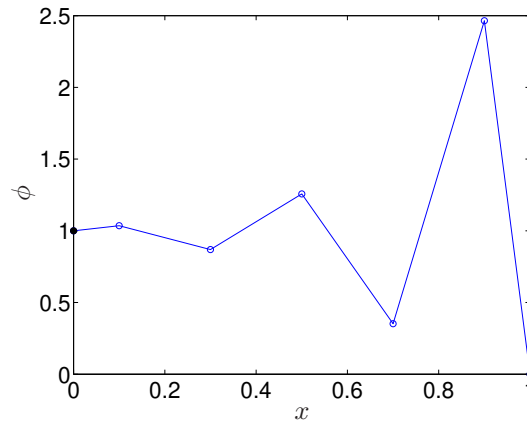


Figure 9: Soluzione numerica del problema (2)

Chiaramente in questo caso la soluzione non è accurata (instabile).

Esempio 3

Consideriamo:

$$\begin{aligned}
 u &= 2.5; \rho = 1; \Gamma = 0.1 \\
 x_A &= 0; x_B = 1; \underline{\Delta x} = 0.05; A = 1 \\
 \phi_A &= 1; \phi_B = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_e &= (\rho u A)_e = 2.5 \\
F_w &= (\rho u A)_w = 2.5 \\
D_e &= \left(\frac{\Gamma A}{\Delta x}\right)_e = 2 \\
D_w &= \left(\frac{\Gamma A}{\Delta x}\right)_w = 2
\end{aligned}$$

Applichiamo:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_U$$

Per i nodi interni:

$$\begin{aligned}
a_E &= \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) = 0.75 \\
a_W &= \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) = 3.25 \\
S_U &= 0 \\
S_P &= 0 \\
a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w) = 4
\end{aligned}$$

Per il primo volume:

$$\begin{aligned}
a_E &= \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) = 0.75 \\
a_W &= 0 \\
S_U &= 2\left(D_A + \frac{F_A}{2}\right)\phi_A = 6.5\phi_A = 6.5 \\
S_P &= -2\left(D_A + \frac{F_A}{2}\right) = -6.5 \\
a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_A) - S_P = 7.25
\end{aligned}$$

Per l'ultimo volume:

$$\begin{aligned}
a_E &= 0 \\
a_W &= 3.25 \\
S_U &= 1.5\phi_B = 0 \\
S_P &= -1.5 \\
a_P &= a_E + a_W + (F_B - F_w) - S_P = 4.75
\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 7.25 & -0.75 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.25 & 4 & -0.75 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.25 & 4 & -0.75 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -3.25 & 4 & -0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -3.25 & 4 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -3.25 & 4.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{18} \\ \phi_{19} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione è mostrata in figura:

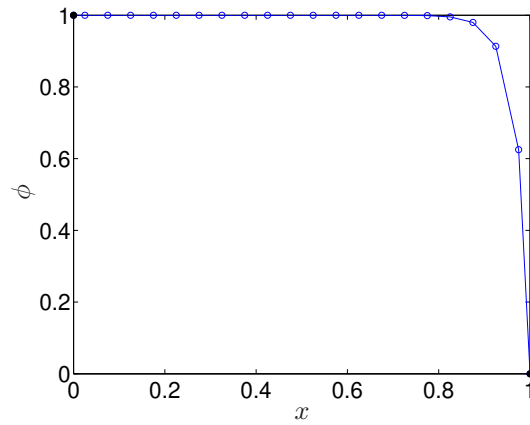


Figure 10: Soluzione numerica del problema (3)

3 Proprietà fondamentali per la stabilità di uno schema numerico

Esistono tre proprietà fondamentali per la stabilità di uno schema numerico:

1. Uno schema numerico deve essere CONSERVATIVO. Ciò significa che il flusso che esce da un volume di controllo deve entrare in un altro. Questo è verificato se per 2 volumi di controllo adiacenti una data faccia il flusso viene calcolato allo stesso modo.
2. Uno schema numerico deve essere LIMITATO. Questo significa che lo schema numerico non deve causare un incremento del valore della variabile dipendente nella cella oltre il valore presente nelle celle precedenti. Questo si verifica se per ogni cella:

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_p|} \leq 1 \quad (49)$$

dove a_{nb} il valore del coefficiente utilizzato per la generica cella vicina nell'espressione approssimata.

3. Uno schema numerico deve essere TRASPORTIVO, cioè deve tenere conto della reale direzione di provenienza del flusso. Introduciamo il numero di Peclet come rapporto.

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\Delta x} \quad (50)$$

Il numero di Peclet rappresenta una misura della forza relativa di convezione e diffusione. Consideriamo 3 punti W , P e E , dove i punti W e E rappresentano due sorgenti di uno scalare ϕ e cerchiamo di valutarne l'effetto nel punto intermedio P . Le figure successive rappresentano i contorni di $\phi = \text{costante}$ nei casi di pura diffusione e di convezione via via crescente. Nel primo caso ($Pe = 0$, pura diffusione) i punti W e E influenzano il punto E allo stesso modo. Nel caso di contributo convettivo non trascurabile (Pe via via maggiori), l'influenza del punto a monte (W in questo caso) diventa sempre maggiore. È perciò importante che lo schema numerico tenga conto della direzionalità del flusso.

Esempio: Schema centrato

- Si tratta di uno schema conservativo. Flussi entranti o uscenti da una cella sono sempre espressi con uno schema centrato, perciò ciò che esce da una cella entra nella successiva.
- Si tratta di uno schema limitato?

$$\begin{aligned} a_W &= D_w + \frac{F_w}{2} \\ a_E &= D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (51)$$

Considerando il caso $F_e = F_w > 0$, lo schema è limitato solo se i coefficienti a_E e a_W

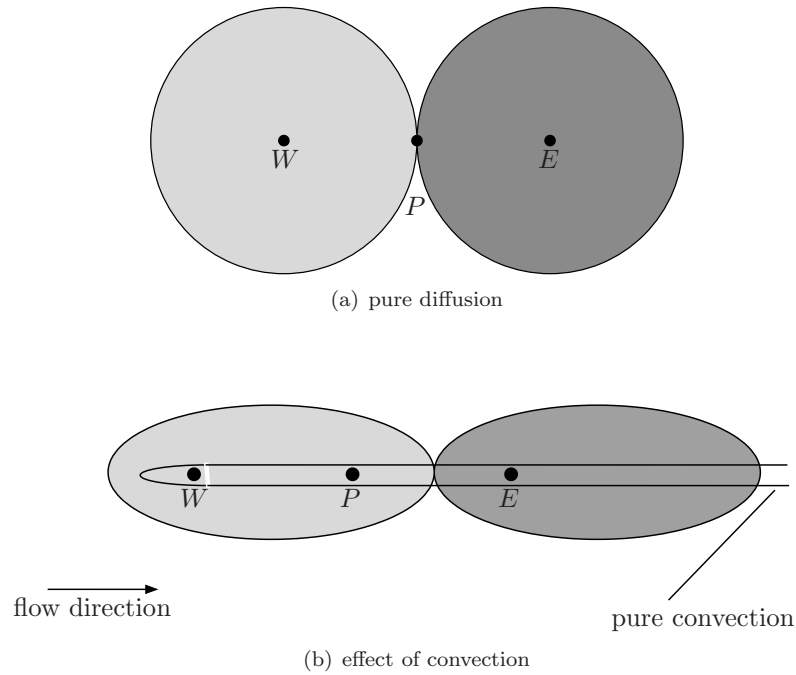


Figure 11: Effetto del numero di Peclet

hanno lo stesso segno, cioè se:

$$D_e - \frac{F_e}{2} > 0 \rightarrow Pe = \frac{F_e}{D_e} < 2 \quad (52)$$

In caso contrario lo schema non è limitato.

- Lo schema non è trasportivo perchè non tiene conto della direzione del flusso. I flussi attraverso le facce vengono calcolati come media dei valori a monte e a valle della faccia stessa.

3.1 Schema Upwind

Riconsideriamo l'equazione di convezione-diffusione (equazione (28)) discretizzata:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (53)$$

dove abbiamo utilizzato una differenza centrata per approssimare le derivate spaziali al secondo membro.

Il metodo upwind approssima i valori della variabile incognita ϕ sulle facce con il valore

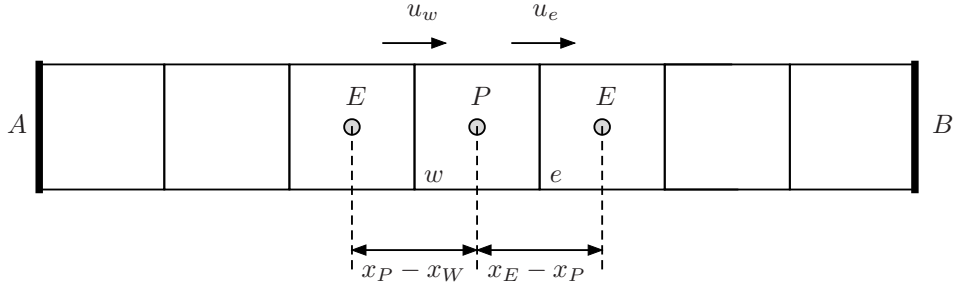


Figure 12: Discretizzazione di un problema monodimensionale di convezione-diffusione con un approccio ai Volumi Finiti

a monte della stessa:

$$\begin{cases} \phi_e = \phi_P & \text{se } F_e \geq 0 \\ \phi_e = \phi_E & \text{se } F_e < 0 \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} \phi_w = \phi_W & \text{se } F_w \geq 0 \\ \phi_w = \phi_P & \text{se } F_w < 0 \end{cases} \quad (55)$$

Pertanto, nel caso di flusso positivo ($F_w = F_e \geq 0$)

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (56)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E \\ a_W &= D_w + F_w \\ a_E &= D_e \\ a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (57)$$

Invece, nel caso di flusso negativo ($F_w = F_e < 0$)

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (58)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E \\ a_W &= D_w \\ a_E &= D_e - F_e \\ a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (59)$$

Mettendo tutto insieme

$$\begin{aligned}
 a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E \\
 a_W &= D_w + \max(0, F_w) \\
 a_E &= D_e + \max(0, -F_e) \\
 a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w)
 \end{aligned} \tag{60}$$

3.2 Schema Ibrido

I coefficienti vengono calcolati nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E \\
 a_W &= \max(0, D_w + F_w/2, F_w) \\
 a_E &= D_e + \max(0, D_e - F_e/2, -F_e) \\
 a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w)
 \end{aligned} \tag{61}$$

Quindi se $Pe < 2$ ne segue che $F_w/2 < D_w$ e $F_e/2 < D_e$ e lo schema corrisponde ad utilizzare uno schema centrato (secondo ordine). In caso contrario lo schema corrisponde ad utilizzare uno schema upwind in cui si è fissata a zero la diffusione.

3.3 Schema QUICK

I metodi upwind e ibrido (per $Pe > 2$) sono schemi del primo ordine. Sono metodi molto stabili ma presentano problemi di “falsa diffusione” determinati proprio dal fatto che sono metodi del primo ordine. Questi errori possono essere ridotti utilizzando discretizzazioni di ordine superiore che tengano conto della direzione del flusso. Un esempio di questi metodi è lo schema **QUICK** (Quadratic Upting Interpolation for Convective Kinetics), che calcola il valore della variabile incognita sulla faccia facendo uso di tre nodi, due a monte e uno a valle della faccia stessa, come mostrato in figura:

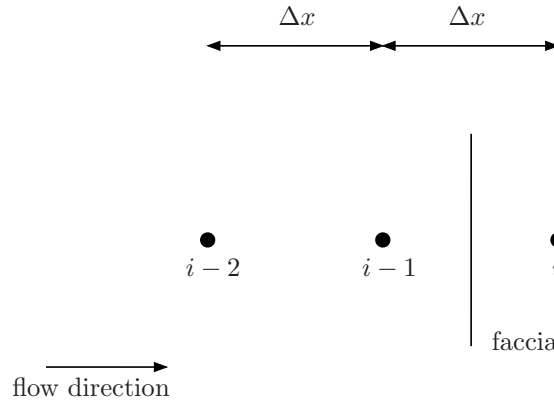


Figure 13: Approssimazione del valore sulla faccia tramite il metodo QUICK

Posso scrivere:

$$\phi_i = \phi_f + \phi'_f \frac{\Delta x}{2} + \phi''_f \frac{\Delta x^2}{8} + O(\Delta x^3) \quad (62)$$

$$\phi_{i-1} = \phi_f - \phi'_f \frac{\Delta x}{2} + \phi''_f \frac{\Delta x^2}{8} + O(\Delta x^3) \quad (63)$$

$$\phi_{i-2} = \phi_f - \phi'_f \frac{3\Delta x}{2} + \phi''_f \frac{9\Delta x^2}{8} + O(\Delta x^3) \quad (64)$$

dove ϕ_f rappresenta il valore sulla faccia. Affinchè il metodo sia del terzo ordine:

$$\begin{aligned} a\phi_i + b\phi_{i-1} + c\phi_{i-2} &= (a+b+c)\phi_f + (a-b-3c)\phi'_f \frac{\Delta x}{2} \\ &+ (a+b+9c)\phi''_f \frac{\Delta x^2}{8} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b-3c=0 \\ a+b+9c=0 \end{cases}$$

La soluzione è:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{6}{8} \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Volendo calcolare i valori ϕ_e e ϕ_w con lo schema QUICK:

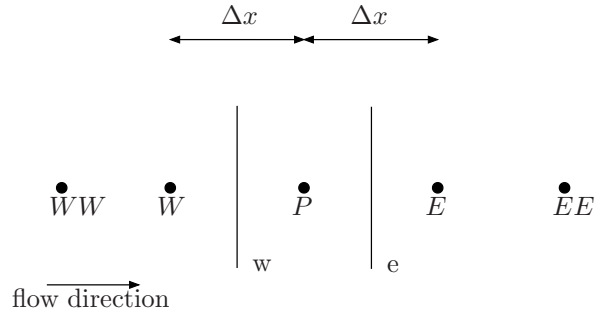


Figure 14: Approssimazione del valore sulla faccia tramite il metodo QUICK (2)

Se $F_w = F_e > 0$:

$$\phi_e = \frac{1}{8}(3\phi_E + 6\phi_P - \phi_W) \quad (66)$$

$$\phi_w = \frac{1}{8}(3\phi_P + 6\phi_W - \phi_{WW}) \quad (67)$$

Altrimenti:

$$\phi_e = \frac{1}{8}(3\phi_P + 6\phi_E - \phi_{EE}) \quad (68)$$

$$\phi_w = \frac{1}{8}(3\phi_W + 6\phi_P - \phi_E) \quad (69)$$

Pertanto, sostituendo nell'equazione (32), nel caso $F_w = F_e > 0$:

$$F_e \left(\frac{3}{8}\phi_E + \frac{6}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W \right) - F_w \left(\frac{3}{8}\phi_P + \frac{6}{8}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) = D_e(\phi_E - \phi_P) + D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (70)$$

Riordinando:

$$\begin{aligned} & \left(D_w - \frac{3}{8}F_w + D_e + \frac{6}{8}F_e \right) \phi_P = \\ & \left(D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{3}{8}F_e \right) - \frac{1}{8}F_w \phi_{WW} \end{aligned} \quad (71)$$

Perciò:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_{WW} \phi_{WW} + a_W \phi_W + a_E \phi_E \\ a_{WW} &= -\frac{1}{8}F_w \\ a_W &= D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \\ a_E &= D_e - \frac{3}{8}F_e \\ a_P &= a_{WW} + a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (72)$$

Nel caso $F_w = F_e < 0$:

$$F_e \left(\frac{3}{8}\phi_P + \frac{6}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_{EE} \right) - F_w \left(\frac{3}{8}\phi_W + \frac{6}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_E \right) = D_e(\phi_E - \phi_P) + D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (73)$$

Riordinando:

$$\begin{aligned} & \left(D_w - \frac{6}{8}F_w + D_e + \frac{3}{8}F_e \right) \phi_P = \\ & \left(D_w + \frac{3}{8}F_w \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{6}{8}F_e - \frac{1}{8}F_w \right) \phi_E + \frac{1}{8}F_e \phi_{EE} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{EE} \phi_{EE} \\
a_W &= D_w + \frac{3}{8} F_w \\
a_E &= D_e - \frac{6}{8} F_e - \frac{1}{8} F_w \\
a_{EE} &= \frac{1}{8} F_e \\
a_P &= a_W + a_E + a_{EE} (F_e - F_w)
\end{aligned} \tag{75}$$

In generale:

$$\begin{aligned}
a_P \phi_P &= a_{WW} \phi_{WW} + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{EE} \phi_{EE} \\
a_{WW} &= -\frac{1}{8} \alpha_w F_w \\
a_W &= D_w + \frac{6}{8} \alpha_w F_w + \frac{1}{8} \alpha_e F_e + \frac{3}{8} (1 - \alpha_w) F_w \\
a_E &= D_e - \frac{3}{8} \alpha_e F_e - \frac{6}{8} (1 - \alpha_e) F_e - \frac{1}{8} (1 - \alpha_w) F_w \\
a_{EE} &= \frac{1}{8} (1 - \alpha_e) F_e \\
a_P &= a_{WW} + a_W + a_E + a_{EE} + (F_e - F_w)
\end{aligned} \tag{76}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\alpha_w &= 1 \text{ se } F_w \geq 0, 0 \text{ altrimenti} \\
\alpha_e &= 1 \text{ se } F_e \geq 0, 0 \text{ altrimenti}
\end{aligned}$$

3.3.1 Stabilità

Nella forma precedente, il metodo QUICK può risultare instabile a causa della presenza di coefficienti negativi che ne fanno un metodo non limitato. Una delle possibili soluzioni prevede di approssimare il valore della variabile ϕ sulle facce nel seguente modo:

Se $F_w = F_e > 0$:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8} (3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W) \tag{77}$$

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{8} (3\phi_P - 2\phi_W - \phi_{WW}) \tag{78}$$

Altrimenti:

$$\phi_e = \phi_E + \frac{1}{8} (3\phi_P - 2\phi_E - \phi_{EE}) \tag{79}$$

$$\phi_w = \phi_P + \frac{1}{8} (3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E) \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
a_P \phi_P &= a_W \phi_W + a_E \phi_E + \bar{S} \\
a_W &= D_w + \alpha_w F_w \\
a_E &= D_e + (1 - \alpha_e) F_e \\
a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \\
\bar{S} &= \frac{1}{8}(3\phi_P - 2\phi_W - \phi_{WW})\alpha_w F_w + \frac{1}{8}(3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E)(1 - \alpha_w)F_w \\
&\quad - \frac{1}{8}(3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W)\alpha_e F_e - \frac{1}{8}(3\phi_P - 2\phi_E - \phi_{EE})(1 - \alpha_e)F_e \tag{81}
\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\alpha_w &= 1 \text{ se } F_w \geq 0, 0 \text{ altrimenti} \\
\alpha_e &= 1 \text{ se } F_e \geq 0, 0 \text{ altrimenti}
\end{aligned}$$

Questo approccio prende il nome di DEFERRED CORRECTION e consiste di trattare i termini che danno luogo a coefficienti negativi come termine sorgente, in modo tale da diminuirne l'effetto sulla stabilità (uso di metodi iterativi).

3.4 Generalizzazione di schemi Upwind

Assumiamo che il flusso sia nella direzione x positiva ($F_e > 0$ e consideriamo la discretizzazione utilizzata per il termine convettivo:

$$\begin{aligned}
\text{schema UPWIND} & \quad \phi_e = \phi_P \\
\text{schema CENTRATO} & \quad \phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \\
\text{schema LUD} & \quad \phi_e = \frac{3\phi_P - \phi_W}{2} \\
\text{schema QUICK} & \quad \phi_e = \frac{3\phi_E + 6\phi_P - \phi_W}{8} \tag{82}
\end{aligned}$$

dove lo schema numerico LUD è uno schema upwind del secondo ordine costruito utilizzando i due punti a monte rispetto alla faccia e .

Le stesse approssimazioni possono anche essere scritte nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
\text{schema UPWIND} & \quad \phi_e = \phi_P \\
\text{schema CENTRATO} & \quad \phi_e = \phi_P + \frac{\phi_E - \phi_P}{2} \\
\text{schema LUD} & \quad \phi_e = \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_W}{2} \\
\text{schema QUICK} & \quad \phi_e = \phi_P + \frac{3\phi_E + 2\phi_P - \phi_W}{8} \tag{83}
\end{aligned}$$

Consideriamo di scrivere tutti gli schemi precedenti nel modo seguente:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\Psi(\phi_E - \phi_P) \quad (84)$$

dove Ψ è una funzione che assume i seguenti valori:

schema UPWIND	$\Psi = 0$	
schema CENTRATO	$\Psi = 1$	
schema LUD	$\Psi = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}$	
schema QUICK	$\Psi = \frac{1}{4} \frac{3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} \right)$	(85)

Se introduciamo r come il rapporto tra il gradiente calcolato con i due punti a monte della faccia e il gradiente calcolato con i due punti ai due lati della faccia:

$$r = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} \quad (86)$$

schema UPWIND	$\Psi(r) = 0$	
schema CENTRATO	$\Psi(r) = 1$	
schema LUD	$\Psi(r) = r$	
schema QUICK	$\Psi(r) = \frac{3+r}{4}$	(87)

Spesso queste relazioni vengono indicate nel diagramma r, Ψ

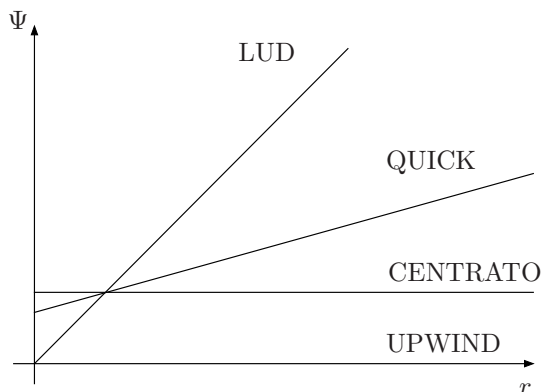


Figure 15: Rappresentazione r, Ψ per alcuni schemi numerici

Tra questi schemi sappiamo che lo schema upwind è il più stabile, mentre quello centrato e il QUICK possono risultare instabili in certe condizioni.

Una parte della ricerca sulla stabilità di metodi numerici per schemi ai volumi finiti si

basa sullo studio dei “monotonicity preserving schemes”, ossia schemi che conservano la monotonicità. Significa che dati un certo numero di valori di una variabile ϕ , lo schema non deve creare estremi o aumentare quelli esistenti. Riferendosi alla figura 16, la variazione totale ($|\phi_1 - \phi_2| + |\phi_2 - \phi_3| + |\phi_3 - \phi_4| + |\phi_4 - \phi_5|$) deve diminuire. Questi schemi prendono il nome di TVD (total variation diminishing).

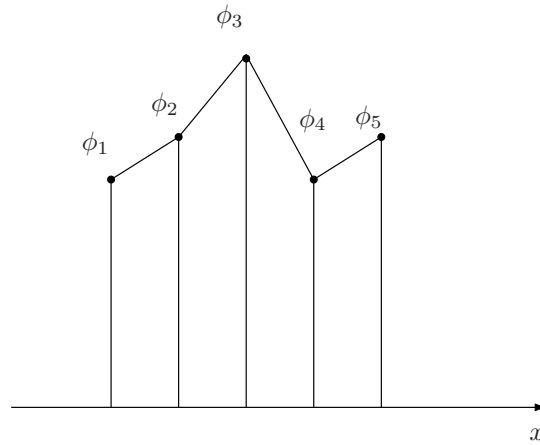


Figure 16: Variazione totale per schemi TVD

Si può dimostrare che affinché uno schema sia TVD deve essere:

$$\begin{aligned}\Psi(r) &\leq 2r \\ \Psi(r) &\leq 2\end{aligned}\tag{88}$$

Inoltre, affinché uno schema sia del secondo ordine:

$$\begin{aligned}\Psi(r) &\geq r \text{ per } r < 1 \\ \Psi(r) &\leq r \text{ per } r > 1 \\ \Psi(r) &\geq 1\end{aligned}\tag{89}$$

Graficamente queste relazioni identificano una regione del piano r, Ψ , mostrata in figura:

La funzione $\Psi(r)$ prende il nome di LIMITER, in quanto rappresenta una limitazione alla propagazione del gradiente $\phi_E - \phi_P$. Alcuni schemi molto usati sono:

schema VAN LEER	$\Psi = \frac{r + r }{1 + r}$	
schema VAN ALBADA	$\Psi = \frac{r + r^2}{1 + r^2}$	
schema MIN-MOD (ROE)	$\Psi = \min(r, 1)$	(90)

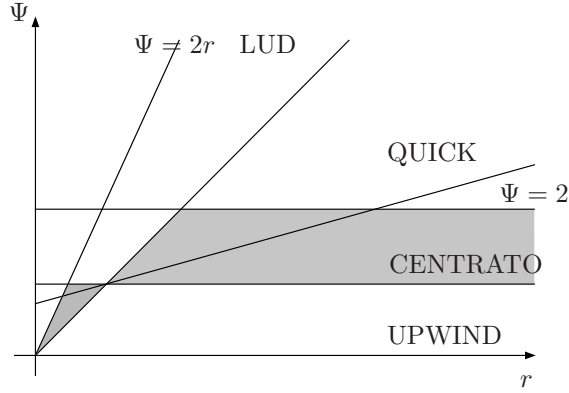


Figure 17: Regione di stabilità per schemi di ordine 2 nel piano r, Ψ

4 Accoppiamento pressione-velocità

Abbiamo visto come risolvere un'equazione di convezione-diffusione stazionaria per uno scalare generico ϕ , una volta noto il campo di velocità. In generale, il campo di velocità non è noto ma emerge come parte della soluzione.

Possiamo scrivere delle equazioni di trasporto per la velocità. In 2D, ipotizzando un problema stazionario e flusso incompressibile:

$$\int_{\Omega} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_{\forall} -\frac{\partial p}{\partial x} d\forall + \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \vec{n} d\Omega \quad (91)$$

$$\int_{\Omega} \rho u \vec{V} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_{\forall} -\frac{\partial p}{\partial x} d\forall + \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \vec{n} d\Omega \quad (92)$$

Possiamo risolvere queste equazioni solo se è noto il campo di pressione, altrimenti dobbiamo ricavare anche questo. Nel caso di fluidi incompressibili l'equazione di continuità non ci aiuta in quanto:

$$\int_{\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Omega = 0 \quad (93)$$

Nel caso di fluidi compressibili, questa rappresenta un'equazione di trasporto per la densità ρ , che è legata alla pressione tramite l'equazione di stato,

$$\int_{\Omega} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Omega = 0 \quad (94)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (95)$$

Notiamo anche che le equazioni della quantità di moto sono non-lineari (i coefficienti sono funzione della soluzione). Avremo perciò bisogno di un metodo iterativo.

Inoltre l'integrale di volume $\int_V -\frac{\partial p}{\partial x} dV$ può anche essere espresso come $\int_{\Omega} -p \vec{i} \cdot \vec{n} d\Omega$.

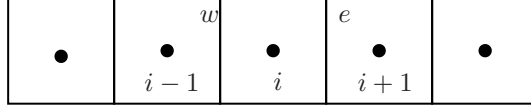


Figure 18: Griglia 1D

Consideriamo il caso monodimensionale e approssimiamo i termini convettivi e diffusivi dell'equazione di conservazione della quantità di moto con uno dei metodi visti nei paragrafi precedenti. L'integrale di pressione può invece essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_{\Omega} -p \vec{i} \cdot \vec{n} d\Omega = (p_w - p_e) A_i \quad (96)$$

dove $p_w = (p_{i-1} + p_i)/2$ e $p_e = (p_i + p_{i+1})/2$.

L'equazione 91 diventa:

$$a_i u_i = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \frac{p_{i-1} - p_{i+1}}{2} A_i \quad (97)$$

dove i coefficienti dipendono dallo schema che usiamo. Nel caso di un metodo upwind per esempio:

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= D_w + \max(F_w, 0) \\ a_{i+1} &= D_e - \max(-F_e, 0) \\ a_i &= a_{i-1} + a_{i+1} + (F_e - F_w) \end{aligned} \quad (98)$$

Chiaramente non posso trovare il campo di velocità perchè mi manca il campo di pressione. L'algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) parte da un valore di tentativo per la pressione (indicato con p^*). Le equazioni della quantità di moto discretizzate (equazione (97)) vengono risolte utilizzando il valore di tentativo p^* e permettono di calcolare una velocità di tentativo u^* :

$$a_i u_i^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + \frac{p_{i-1}^* - p_{i+1}^*}{2} A_i \quad (99)$$

Definiamo ora come correzione della pressione (pressure correction) la correzione p' che deve essere applicata a p^* per trovare la pressione corretta p :

$$p = p^* + p' \quad (100)$$

e similarmemente:

$$u = u^* + u' \quad (101)$$

Sottraendo la equazione (99) dalla (97) ottengo:

$$a_i u'_i = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + \frac{p'_{i-1} - p'_{i+1}}{2} A_i \quad (102)$$

A questo punto introduciamo la seguente approssimazione (chiaramente corretta a convergenza, cioè quando $p^* = p$ e $p' = 0$). Questa rappresenta la principale approssimazione del metodo SIMPLE.

$$\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} = 0 \quad (103)$$

Pertanto:

$$u'_i = d_i \frac{p'_{i-1} - p'_{i+1}}{2} \quad \text{dove } d_i = \frac{A_i}{d_i} \quad (104)$$

e quindi:

$$u_i = u_i^* + d_i \frac{p'_{i-1} - p'_{i+1}}{2} \quad (105)$$

Finora abbiamo considerato solo l'equazione della quantità di moto. Dobbiamo ancora introdurre l'equazione di continuità.

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (106)$$

Sostituendo le due espressioni precedenti:

$$\rho_e A_e (u_e^* + d_e (p'_i - p'_{i+1})) - \rho_i A_w (u_w^* + d_w (p'_{i-1} - p'_i)) = 0 \quad (107)$$

Riordinando:

$$[(\rho d A)_e + (\rho d A)_w] p'_i = (\rho d A)_e p'_{i+1} + (\rho d A)_w p'_{i-1} + (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e \quad (108)$$

che puo'essere anche scritta in forma compatta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
a_i p'_i &= a_{i-1} p'_{i-1} + a_{i+1} p'_{i+1} + b'_i \\
a_{i-1} &= (\rho dA)_w \\
a_{i+1} &= (\rho dA)_e \\
a_i &= a_{i-1} + a_{i+1} \\
b'_I &= (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e
\end{aligned} \tag{109}$$

Questa rappresenta l'equazione di correzione della pressione. Il termine sorgente rappresenta il residuo dell'equazione di continuita' dovuto all'errato compo di velocita'. Il fatto di aver omesso i termini $\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$ nell'equazione di correzione della velocita' non crea problemi in quanto questi termini a convergenza sono nulli.

Devo quindi utilizzare un metodo iterativo, in cui parto da un campo di pressione di tentativo, ottengo un campo di velocita' di tentativo, correggo pressione e velocita' e ricomincio dall'inizio finche' i residui non sono al di sotto di un certo valore.

$$\begin{cases} p^{*,n+1} = p^{*,n} + p' \\ u^{*,n+1} = u^{*,n} + u' \end{cases} \tag{110}$$

In realta' a volte questo metodo puo' risultare instabile. Una possibile soluzione e' quella di usare un sotto-rilassamento delle equazioni (che corrisponde a modificare in modo meno rapido i valori di p^* e u^*):

$$\begin{cases} p^{*,n+1} = \alpha_p (p^{*,n} + p') + (1 - \alpha_p) p^{*,n} \\ u^{*,n+1} = \alpha_u (u^{*,n} + u') + (1 - \alpha_u) u^{*,n} \end{cases} \tag{111}$$

dove α_p e α_u sono due fattori di sotto-rilassamento (under-relaxation factors).

Un riassunto schematico del metodo SIMPLE e' riportato di seguito:

1. Definire il campo di pressione di tentativo p^* e calcolare la velocita' di tentativo u^* .
2. Risolvere l' equazione di correzione della pressione e calcolare p' .
3. Correggere la pressione e la velocita' di tentativo (calcolare p e u).
4. Utilizzare la precedente p come nuova pressione di tentativo. O in alternativa:

$$\begin{cases} p^{*,new} = \alpha_p (p) + (1 - \alpha_p) p^* \\ u^{*,new} = \alpha_u (u) + (1 - \alpha_u) u^* \end{cases} \tag{112}$$

5. Sono giunto a convergenza? In caso positivo il procedimento e' terminato, in caso negativo riprendere dal punto 1.

4.1 Sull'equazione di correzione della pressione

Le equazioni di continuità e quantità di moto (fluidi incompressibili, stazionari):

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (113)$$

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (114)$$

Se applichiamo l'operatore divergenza all'equazione di quantità di moto:

$$\rho \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = -\nabla \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla^2 \vec{V}) \quad (115)$$

Gli operatori laplaciano e divergenza sono commutabili, perciò:

$$\rho \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = -\nabla^2 p + \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (116)$$

L'ultimo termine è nullo per l'equazione di continuità. Questa rappresenta un'equazione ellittica per la pressione, che avevamo ottenuto nel paragrafo precedente a partire dalle equazioni discretizzate.

$$\rho \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = -\nabla^2 p \quad (117)$$

4.2 Griglie co-locate e “staggered”

Supponiamo di avere una griglia bidimensionale con un campo di pressione a scacchiera, indicato numericamente in figura:

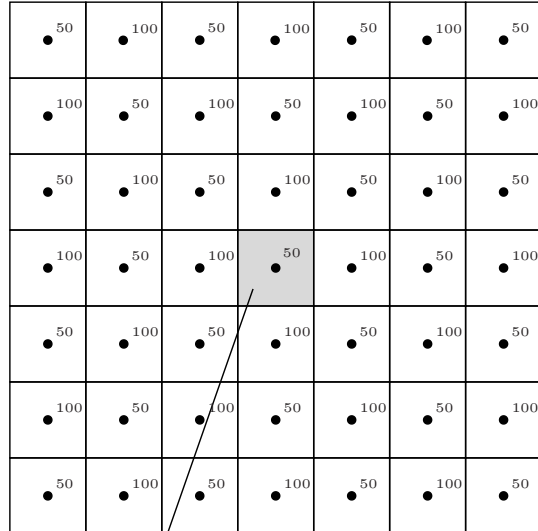
Se scriviamo l'equazione di conservazione per la quantità di moto nella direzione x , per il volume di controllo evidenziato in figura, il termine sorgente dato dall'integrale di pressione darà il contributo:

$$\int_{\Omega} -p \vec{i} \cdot \vec{n} d\Omega = p_w A_w - p_e A_e = \frac{p_P + p_W}{2} A_w - \frac{p_P + p_E}{2} A_E = \frac{A}{2} (p_W - p_E) = 0 \quad (118)$$

La stessa cosa accade nella direzione y . Quindi nonostante il campo di pressione a scacchiera, il termine sorgente nell'equazione di quantità di moto è sempre nullo. Chiaramente questo è un fatto fisicamente insensato e al quale bisogna porre rimedio.

Una possibile soluzione è quella di utilizzare una griglia “staggered”, cioè composta da griglie diverse (tre in 2D) su cui vengono risolte rispettivamente l'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione x , l'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione y e l'equazione per la pressione. La griglia “staggered” è mostrata in figura 20: in nero la griglia utilizzata per la pressione (e altre equazioni scalari), in rosso quella per la quantità di moto in direzione x , in blu quella per la quantità di moto in direzione y .

Un'altra soluzione consiste nell'aggiungere una diffusione artificiale tale da “evitare” il formarsi di campi di pressione a scacchiera, evitando in questo modo l'uso di griglie “staggered” che risulta poco pratico soprattutto nel caso di geometrie complesse. La diffusione artificiale deve essere abbastanza da evitare il formarsi di soluzioni a scacchiera, ma non eccessivo da condizionare la soluzione.



Volume di controllo

Figure 19: Campo di pressione a scacchiera

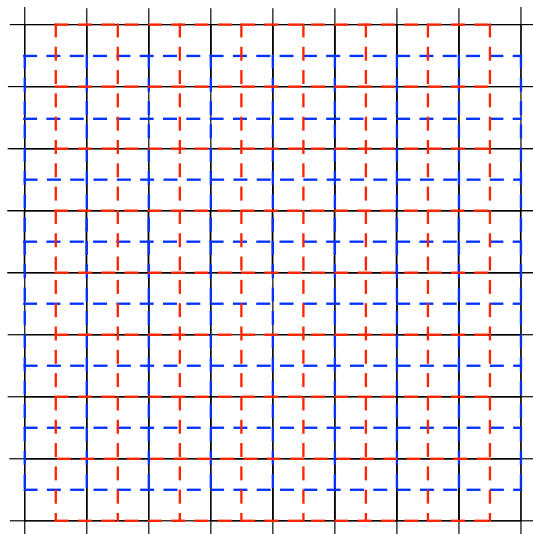


Figure 20: Griglia "staggered"