

Corso di
Modellazione di Sistemi a Fluido

—

Introduzione alla Turbolenza

Tiziano Ghisu

July 10, 2018

Contents

1	Introduzione	3
2	Caratterizzazione dei flussi turbolenti	3
2.1	Direct Numerical Simulation (DNS)	6
2.2	Large Eddy Simulation (LES)	6
2.3	Approccio RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)	8
2.4	Modelli di turbolenza	11
2.5	Modelli a viscosità tubolenta (Eddy viscosity models)	11
2.5.1	Mixing-length model	12
2.5.2	Spalart-Allmaras	12
2.5.3	Modello $k - \epsilon$	13
2.6	Lo strato limite	14
2.6.1	Funzioni di parete	17

1 Introduzione

I flussi di interesse ingegneristico diventano instabili al di sopra di un certo numero di Reynolds ($Re = UL/\nu$ dove U e L sono velocità e lunghezza caratteristiche del flusso medio e ν la viscosità cinematica). A bassi numeri di Reynolds i flussi sono laminari, mentre ad alti numeri di Reynolds diventano turbolenti: si sviluppa uno stato di movimenti caotici e random nel quale velocità e pressione variano in modo continuo nella maggior parte dello spazio interessato dal flusso.

I flussi laminari sono descritti completamente dalle equazioni sviluppate nel capitolo 3, che possono essere anche risolte direttamente in alcuni casi semplici, oppure tramite gli approcci numerici introdotti nel capitolo 4. La maggior parte dei flussi di interesse ingegneristico sono però turbolenti, e ciò ne complica notevolmente sia la trattazione che la risoluzione numerica.

2 Caratterizzazione dei flussi turbolenti

Il numero di Reynolds fornisce una misura del rapporto tra forze inerziali (associate ad effetti convettivi) e forze viscosi. A valori del numero di Reynolds inferiori a un valore critico Re_c il flusso è calmo e strati adiacenti del flusso si muovono in modo ordinato. Se le condizioni al contorno non cambiano nel tempo il flusso è stazionario. Il regime viene detto **laminare**.

A valori del numero di Reynolds superiori a Re_c il flusso cambia radicalmente regime e si comporta in modo caotico e casuale. Le particelle si muovono in modo intrinsecamente non stazionario anche in presenza di condizioni al contorno costanti. Questo regime viene detto **turbolento**.

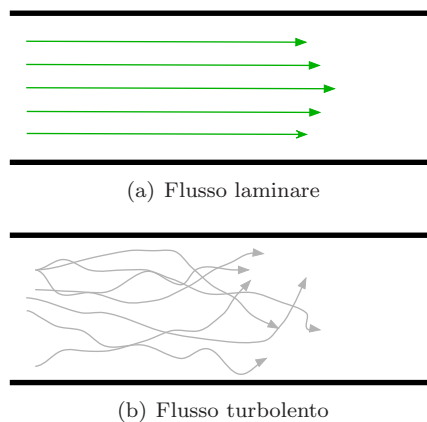


Figure 1: Confronto tra flusso laminare e flusso turbolento in un condotto

L'andamento tipico della velocità in un punto del flusso turbolento nel canale di figura 1 sarà quello mostrato in figura 5

Una descrizione istantanea delle fluttuazioni di velocità (o delle altre grandezze) in un flusso turbolento non è di interesse, pertanto si decompone il flusso caotico nella somma di un valore medio e di una componente fluttuante, in modo tale da poter caratterizzare il flusso tramite il suo valore medio e le proprietà statistiche delle fluttuazioni. Questo approccio prende il nome di **Decomposizione di Reynolds**.

$$u(t) = U + u'(t) \tag{1}$$

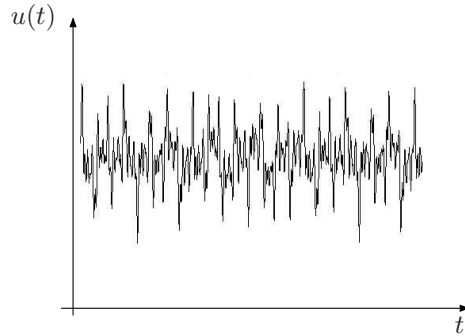


Figure 2: Fluttuazioni in un flusso turbolento

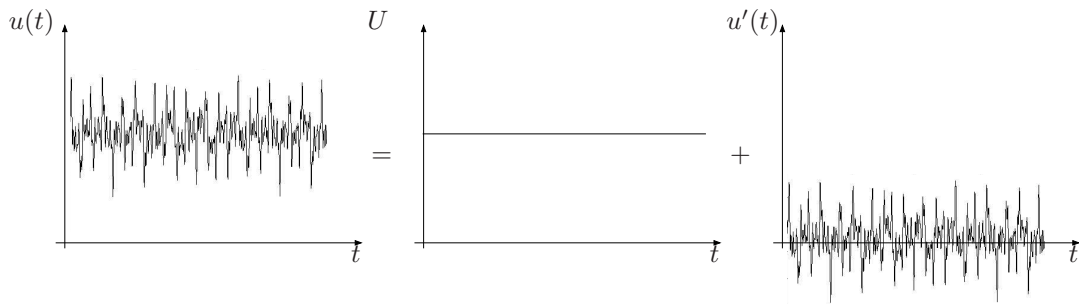


Figure 3: Decomposizione di Reynolds

Anche in flussi nei quali i valori medi delle grandezze fluidodinamiche non variano tridimensionalmente, le fluttuazioni turbolente hanno sempre un carattere tridimensionale. Inoltre, un'analisi visiva di un flusso turbolento rivelerebbe strutture (i cosiddetti vortici) con un'ampia gamma di scale. L'effetto della turbolenza è quello di avvicinare particelle di fluido che inizialmente si trovano ad elevate distanze, consentendo così uno scambio di massa, quantità di moto e energia molto più efficace.

I **vortici più grandi** estraggono energia dal flusso principale. Hanno velocità v_l e lunghezza l_l caratteristiche dello stesso ordine di grandezza di quelle del flusso principale. Il numero di Reynolds caratteristico dei **vortici di grande scala** $Re = v_l l_l / \nu$ è paragonabile a quello del flusso medio, e quindi il comportamento di questi vortici è dominato da effetti inerziali mentre gli effetti viscosi sono minimi.

I **vortici più piccoli** in un flusso di interesse ingegneristico possono raggiungere dimensioni dell'ordine di 10^{-2} mm e frequenze dell'ordine dei 10 kHz e sono invece dominati da effetti viscosi. Il numero di Reynolds caratteristico dei **vortici di piccola scala** $Re = v_d l_d / \nu$ è dell'ordine dell'unità (forze inerziali e forze viscosi sono dello stesso ordine di grandezza). Queste scale sono chiamate scale di Kolmogorov. L'energia dei vortici di piccola scala è dissipata dalle forze viscosi e convertita in energia termica. L'esistenza dei vortici di Kolmogorov nei flussi turbolenti è il motivo delle maggiori perdite di energia.

Tramite un'analisi dimensionale si può ricavare il rapporto tra le dimensioni caratteristiche dei vortici di larga scala e quelli di piccola scala. La velocità di dissipazione (unità di misura m^2/s^3) deve essere proporzionale al rapporto v^3/l

$$\epsilon \propto \frac{v_d^3}{l_d} \propto \frac{v_l^3}{l_l} \quad (2)$$

$$Re_l \propto \frac{v_l l_l}{v_d l_d} \quad (3)$$

Da queste relazioni si possono ricavare le seguenti:

$$\frac{v_l}{v_d} \propto Re_l^{1/4} \quad (4)$$

$$\frac{l_l}{l_d} \propto Re_l^{3/4} \quad (5)$$

$$\frac{t_l}{t_d} \propto Re_l^{1/2} Re_l \propto \frac{v_l l_l}{v_d l_d} \quad (6)$$

L'effetto illustrato nelle equazioni precedenti prende il nome di **separazione delle scale**. Il rapporto tra le dimensioni di vortici di grande e vortici di piccola scala aumenta all'aumentare del numero di Reynolds del flusso principale.

Sempre da un'analisi dimensionale si può vedere come l'energia cinetica per unità di numero d'onda (il numero d'onda k è definito come $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dove λ è la lunghezza d'onda) abbia il seguente andamento

$$E(k) = \alpha k^{-5/3} \epsilon^{2/3} \quad (7)$$

dove α è una costante da trovare sperimentalmente.

Nella precedente

$$[E] = \frac{m^3}{s^2}, [k] = \frac{1}{m}, [\epsilon] = \frac{m^2}{s^3} \quad (8)$$

dove α è una costante da trovare sperimentalmente.

Per risolvere numericamente un flusso turbolento è necessario catturare tutte le strutture vorticosi presenti, fino ai vortici di piccola scala, quindi utilizzando discretizzazioni spaziali dell'ordine di $l_l/Re^{3/4}$, che per molti flussi di interesse ingegneristico equivale a 10^{-6} m. L'approccio più comune per evitare un costo computazionale così elevato è quello di modellare (almeno in parte) la turbolenza. Si possono perciò distinguere diversi approcci alla simulazione numerica di flussi turbolenti, elencati di seguito in ordine di costo computazionale decrescente:

- Simulazione diretta (**DNS**, Direct Numerical Simulation)
- Simulazione dei soli vortici di scala maggiore (**LES**, Large Numerical Simulation)
- Simulazione delle equazioni Reynolds Averaged (**RANS**, Reynolds Averaged Navier-Stokes)

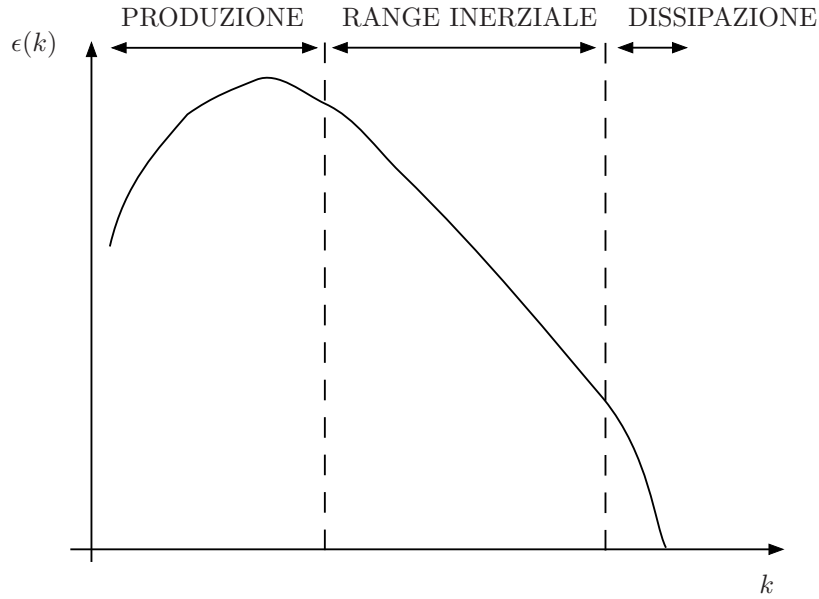


Figure 4: Spettro di energia in un flusso turbolento

2.1 Direct Numerical Simulation (DNS)

È possibile ottenere direttamente la soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes, descritte nel Capitolo 3 e valide per qualsiasi tipo di flusso, quindi anche per quelli turbolenti. Non richiedendo alcuna ipotesi aggiuntiva, questo approccio rappresenta il migliore dal punto di vista dell'accuratezza e dell'affidabilità dei risultati. Lo svantaggio tuttavia è il costo in termini di potenza di calcolo richiesta e di mole di dati prodotta. Le simulazioni devono sempre essere tridimensionali (anche per problemi mediamente bidimensionali) e la risoluzione spaziale deve essere minore della dimensione dei vortici di Kolmogorov. Il CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) deve essere dell'ordine dell'unità per consentire una corretta risoluzione temporale.

$$\text{costo} \propto N_{\text{celle}} N_{\Delta t} \propto (Re^{3/4})^2 Re^{3/4} = Re^3 \quad (9)$$

dove la proporzionalità del numero di intervalli temporali $N_{\Delta t}$ da $Re^{3/4}$ deriva dal fatto che $\Delta t = CFL \Delta x$.

2.2 Large Eddy Simulation (LES)

L'approccio LES per la simulazione di flussi turbolenti consente una buona affidabilità con costi computazionali inferiori rispetto a quelli dell'approccio DNS. Si basa su alcune consid-

erazioni:

- le strutture turbolente di grande scala hanno natura convettiva e numeri di Reynolds relativamente elevati, hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio, hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente), estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta, hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Reynolds della corrente media, e sono generalmente anisotrope;
- le strutture turbolente di scala intermedia sono generate dall'instabilità delle grandi strutture, risultano anch'esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati, e hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai piccoli vortici l'energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;
- le strutture turbolente di piccola scala nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi; sono stabili in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds bassi (dell'ordine dell'unità), hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosità, l'energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi. Hanno vita media molto più breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale; inoltre possiedono tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio.

Queste considerazioni portano a due conclusioni che sono le idee alla base del Large Eddy Simulation (LES):

- i vortici grandi e medi devono essere necessariamente risolti esplicitamente, come in una DNS;
- soltanto i vortici piccoli si prestano ad essere modellati.

Con l'approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si è costretti ad usare modelli che devono simulare gli effetti della totalità dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente che non possono essere universali (perché dipendono dalla geometria); mentre con la LES si può sperare, modellando i soli vortici piccoli (quelli grandi sono risolti direttamente) di puntare a modelli non eccessivamente complicati ma sufficientemente universali, dal momento che i vortici, che richiedono la modellazione, hanno per loro natura caratteristiche universali. Anche l'isotropia, implicita nel concetto dello scalare viscosità turbolenta, è più ragionevolmente ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala. Nella risoluzione LES si applica un filtro spaziale, risolvendo direttamente la parte media (risolve le frequenze più basse), e il resto viene modellato sulla base di considerazioni molto generali, fondate sulle caratteristiche dei vortici di piccola scala (che possiedono una frequenza più elevata). Alle equazioni viene applicato un filtro passa basso (avente dimensione Δ) che permette di filtrare le frequenze più elevate della turbolenza. Questo filtro viene impostato grazie alla struttura della Mesh costituente il dominio computazionale, definendo la corretta distanza spaziale delle singole celle. Vengono così eliminate le strutture spaziali che possiedono una lunghezza d'onda inferiore a Δ (i piccoli vortici). Chiaramente, riducendo le dimensioni del filtro si torna a un problema di tipo DNS.

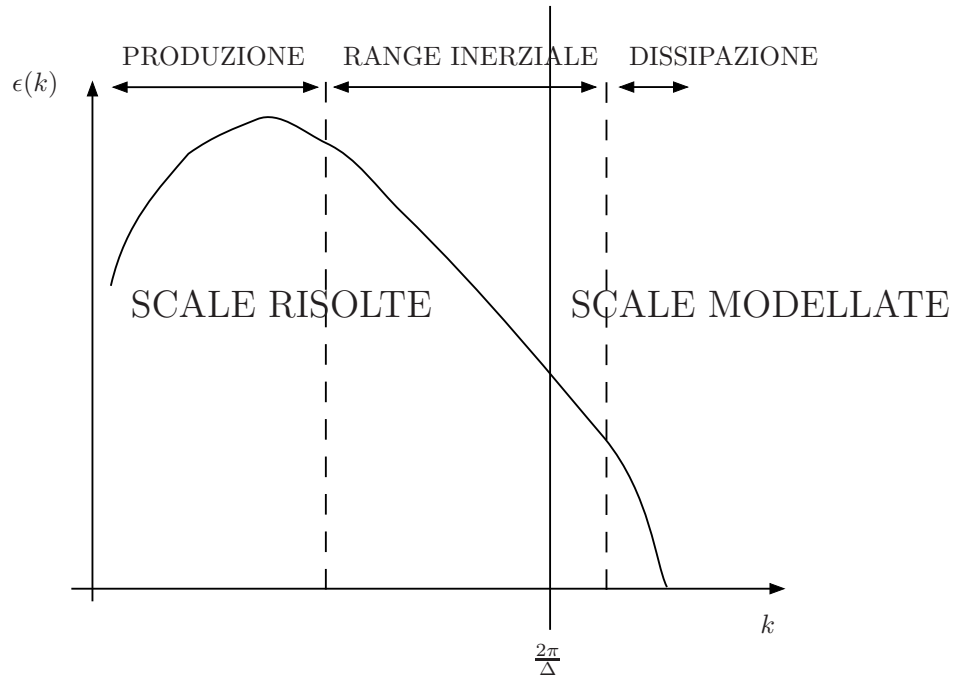


Figure 5: Applicazione del filtro spaziale nelle simulazioni LES

2.3 Approccio RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

Un segnale può essere scomposto nella somma della sua media e della fluttuazione attorno alla media:

$$u(t) = \overline{u(t)} + u'(t) \quad (10)$$

dove abbiamo considerato la parte media \overline{u} dipendente dal tempo (ma potrebbe anche essere indipendente):

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt \quad (11)$$

L'equazione (10, decomposizione di Reynolds, viene solitamente scritta in modo abbreviato:

$$u = \overline{u} + u' \quad (12)$$

omettendo la dipendenza dal tempo.

Cominciamo col definire alcune regole per calcolare la media di grandezze fluttuanti:

$$u(t) = \bar{u} + u' \quad (13)$$

$$v(t) = \bar{v} + v' \quad (14)$$

$$\overline{u'} = 0 \quad (15)$$

$$\overline{v'} = 0 \quad (16)$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \quad (17)$$

$$\overline{\int u ds} = \int \bar{u} ds \quad (18)$$

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v} \quad (19)$$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'} \quad (20)$$

$$\overline{u'v'} = 0 \quad (21)$$

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes istantanee in coordinate cartesiane (2D) per un flusso incompressibile e a viscosità costante:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla \cdot (\nabla u) \quad (23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot v \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla \cdot (\nabla v) \quad (24)$$

In forma estesa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

Applichiamo l'operazione di media temporale all'equazione di continuità:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$(29)$$

e alle equazioni di quantità di moto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (31)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \quad (33)$$

Le precedenti sono le equazioni RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) in coordinate cartesiane per un fluido incompressibile e a viscosità costante. Spesso il segno di media viene ommesso per brevità e le equazioni vengono scritte in questa forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(-\rho \bar{u}'u')}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \bar{u}'v')}{\partial y} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(-\rho \bar{u}'v')}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \bar{v}'v')}{\partial y} \right) \quad (36)$$

Le equazioni RANS sono simili alle equazioni non mediate ma sono comparsi alcuni termini aggiuntivi. Questi termini rappresentano dimensionalmente degli sforzi e prendono il nome di sforzi di Reynolds (Reynolds stresses):

$$\tau_{xx} = -\rho \bar{u}'u' \quad (37)$$

$$\tau_{xy} = -\rho \bar{u}'v' \quad (38)$$

$$\tau_{yx} = -\rho \bar{v}'u' \quad (39)$$

$$\tau_{yy} = -\rho \bar{v}'v' \quad (40)$$

Gli stress di Reynolds sono sempre diversi da zero nei flussi turbolenti perchè contengono il quadrato di fluttuazioni. Di solito nei flussi turbolenti sono molto maggiori degli stress viscosi.

Abbiamo considerato le fluttuazioni della densità nulle. Questo è vero per flussi incompressibili. Per flussi compressibili, le fluttuazioni della densità sono trascurabili finchè il numero di Mach è inferiore a 1, mentre dopo non possono più essere trascurate. Si usa in questo caso un altro tipo di media (Favre averaging) che porta alle Favre-Averages Navier-Stokes equations.

2.4 Modelli di turbolenza

Per la maggior parte dei flussi di interesse ingegneristico non è necessario conoscere i dettagli delle fluttuazioni turbolente, che sono, per di più, casuali e quindi cambierebbero da un caso all'altro.

Pertanto, risolvere le equazioni da un punto di vista statistico è sufficiente nella maggior parte dei casi. Questo può essere fatto risolvendo le equazioni RANS, dove però deve essere in qualche modo “modellato” il contributo delle fluttuazioni turbolente sul flusso medio. Questo viene fatto risolvendo un certo numero di equazioni differenziali aggiuntive, accoppiate alle equazioni discusse di conservazione di massa, energia e quantità di moto. Alcuni modelli di chiusura delle equazioni RANS sono elencati in tabella 1.

Numero di equazioni differenziali	MODELLO
0	mixing-length
1	Spalart-Allmaras
2	k - ϵ
2	k - ω
7	Reynolds-stress

2.5 Modelli a viscosità tubolenta (Eddy viscosity models)

La maggior parte dei modelli di chiusura della turbolenza sono basati sull'ipotesi di Boussinesq, che propone un'analogia tra gli sforzi viscosi e gli sforzi di Reynolds, che sono quindi ipotizzati proporzionali alle deformazioni, attraverso un coefficiente di proporzionalità chiamato viscosità turbolenta e indicato con μ_T (unità di misura $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$):

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \tau_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (41)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker (uguale a 1 per $i = j$ e nullo altrimenti) e k l'energia cinetica turbolenta:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (42)$$

Esiste anche una viscosità cinematica turbolenta (unità di misura m^2s^{-1})

$$\nu_T = \frac{\mu_T}{\rho} \quad (43)$$

Il termine $-\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$ serve per assicurare che:

$$2\mu_T S_{ii} = 2\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (44)$$

Infatti:

$$2\mu_T \sum_{i=1}^3 S_{ii} = -\overline{\rho u' u'} + \frac{2}{3}\rho k - \overline{\rho v' v'} + \frac{2}{3}\rho k - \overline{\rho w' w'} + \frac{2}{3}\rho k = \quad (45)$$

$$= -\rho (\overline{u' u'} + \overline{v' v'} + \overline{w' w'}) + 2\rho k = 0 \quad (46)$$

2.5.1 Mixing-length model

Su base dimensionale ν_T (m^2s^{-1}) può essere espressa come prodotto di una velocità (θ) e una lunghezza (l):

$$\nu_T = C\theta l \quad (47)$$

$$\mu_T = C\rho\theta l \quad (48)$$

La maggior parte dell'energia cinetica turbolenta è contenuta nei vortici di grande scala, perciò:

$$\theta = cl \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (49)$$

e quindi:

$$\nu_T = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (50)$$

dove l_m è una lunghezza di scala che incorpora le costanti c e C .

Questo modello prende il nome di PRANDTL MIXING-LENGTH MODEL.

In uno strato limite:

$$\text{per } \frac{y}{\delta} \leq 0.22 \quad l_m = ky \left(1 - e^{-y^+ / 26} \right) \quad (51)$$

$$\text{per } \frac{y}{\delta} > 0.22 \quad l_m = 0.09\delta \quad (52)$$

I vantaggi principali del modello mixing-length sono legati al basso costo computazionale e alle buone prestazioni per flussi semplici (per esempio strati limite su lastra piana), mentre non si comporta in modo soddisfacente per flussi complessi, quali flussi separati.

2.5.2 Spalart-Allmaras

Il modello Spalart-Allmaras è un modello a basso costo computazionale, che si basa sulla soluzione di una sola equazione di trasporto, per un parametro $\overline{\nu}$ (eddy viscosity parameter). Si comporta bene in aerodinamica esterna e in presenza di flussi con elevati gradienti di pressione.

La viscosità turbolenta μ_T viene ricavata come segue:

$$\mu_T = \rho \overline{\nu} f_{v1} \quad (53)$$

k ed ϵ sono utilizzate per definire velocità e lunghezza di scala nel modo seguente:

$$\theta = k^{1/2} \quad (61)$$

$$l = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (62)$$

$$\mu_T = \rho C_{mu} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (63)$$

Le equazioni di trasporto per k ed ϵ possono essere scritte nel modo seguente:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \vec{V}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2\mu_T S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \epsilon \quad (64)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \vec{V}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} 2\mu_T S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (65)$$

I termini contenuti nelle equazioni differenziali rappresentano rispettivamente:

- variazione di k o ϵ nel tempo
- trasporto per convezione
- trasporto per diffusione
- produzione
- distruzione

Le equazioni contengono una serie di costanti che sono state ricavate adattando il comportamento ai risultati di un elevato numero di casi di studio:

$$c_\mu = 0.09 \quad (66)$$

$$\sigma_k = 1.00 \quad (67)$$

$$\sigma_\epsilon = 1.30 \quad (68)$$

$$C_{1\epsilon} = 1.44 \quad (69)$$

$$C_{2\epsilon} = 1.92 \quad (70)$$

Questo modello è sicuramente uno dei più utilizzati tra tutti i modelli RANS ed è incorporato nella grande maggioranza dei software CFD commerciali. Valido per flussi turbolenti completamente sviluppati, è uno dei modelli più robusti e di facile implementazione, con un costo computazionale non troppo elevato. Per questo motivo risulta essere ancora oggi largamente utilizzato nonostante le difficoltà del modello nella predizione di flussi complessi, specialmente nel trattamento di gradienti di pressione avversi e di linee di flusso ad alta curvatura.

2.6 Lo strato limite

Lo strato limite è la regione di flusso vicina a parete, generata a causa delle forze di attrito generate dalla stessa. È spesso definita convenzionalmente come la regione in cui la velocità del flusso è minore del 99

La struttura dello strato limite può essere studiata a partire da un'analisi dimensionale. In uno strato limite turbolento si possono identificare due regioni. La regione più interna (inner layer) e quella più esterna (outer layer):

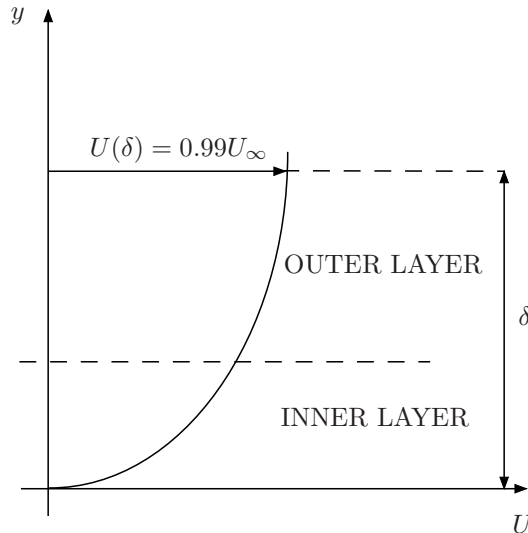


Figure 6: Struttura dello strato limite

All'interno dell'inner layer, le variabili fondamentali sono:

grandezza	unità di misura	significato
U	ms^{-1}	velocità
y	m	distanza da parete
τ_w	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$	sforzo a parete
ρ	kg m^{-3}	densità
ν	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	viscosità cinematica

Ci sono 5 variabili, 3 unità di misura, perciò per il teorema di Buckingham il problema può essere descritto tramite 2 gruppi adimensionali:

$$u^+ = \frac{U}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \quad (71)$$

$$y^+ = \frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} \quad (72)$$

dove y^+ è la distanza da parete non-dimensionalizzata e u^+ la velocità non-dimensionalizzata. $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ viene chiamata velocità di attrito (friction velocity).

Nell'outer layer, più lontano da parete, la viscosità cinematica ν non è più importante, mentre diventa importante lo spessore dello strato limite δ :

Anche nell'outer layer ci sono 5 variabili importanti e 3 unità di misura, perciò anche qui

grandezza	unità di misura	significato
U	ms^{-1}	velocità
y	m	distanza da parete
τ_w	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$	sforzo a parete
ρ	kg m^{-3}	densità
δ	m	spessore dello strato limite

possono essere definiti 2 gruppi adimensionali:

$$u^+ = \frac{U}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \quad (73)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (74)$$

Pertanto nello strato limite:

$$\text{INNER LAYER} \quad u^+ = f_w(y^+) = f_w\left(\frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} \frac{\delta}{\delta}\right) = f_w(\eta\delta^+) \quad (75)$$

$$\text{OUTER LAYER} \quad u^+ = f_o(y/\delta) = f_o(\eta) \quad (76)$$

dove $\delta^+ = \frac{\delta\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}$.

Affinchè vi sia una transizione graduale tra inner layer e outer layer, la velocità adimensionalizzata può essere scritta nel seguente modo:

$$u^+ = f_w(\eta\delta^+) + f_o(\eta) \quad (77)$$

Differenziando per δ^+ :

$$\frac{\partial u^+}{\partial \delta^+} = \eta f'_w(\eta\delta^+) \quad (78)$$

e quindi per η (u^+ non è funzione di η nell'inner layer):

$$0 = f'_w(\eta\delta^+) + \eta\delta^+ f''_w(\eta\delta^+) = f'_w(y^+) + y^+ f''_w(y^+) = \frac{d}{dy^+} (y^+ f'_w(y^+)) \quad (79)$$

Integrando due volte:

$$y^+ f_w(y^+) = c_1 \quad (80)$$

$$f_w(y^+) = c_1 \ln(y^+) + c_2 \quad (81)$$

La precedente viene spesso scritta nella seguente forma:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (82)$$

Questa è la legge logaritmica di parete (valida nell'inner layer). k è la costante di Von-Karman. Da confronto con strati limite reali:

$$\kappa = 0.41 \quad (83)$$

$$B = 5.0 \quad (84)$$

Nello strato limite c'è poi una regione dell'inner layer, la parte più vicina a parete detta viscous sublayer) dove dominano gli effetti viscosi e quindi:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \text{costante} \quad (85)$$

Perciò:

$$du^+ = dy^+ \quad (86)$$

$$u^+ = y^+ \quad (87)$$

L'andamento della velocità non-dimensionalizzata viene spesso mostrata in funzione della distanza non-dimensionalizzata, nello strato limite, in assi semi-logaritmici:

2.6.1 Funzioni di parete

Ad alti numeri di Reynolds risolvere lo strato limite direttamente richiederebbe delle celle molto piccole. Per ridurre lo sforzo computazionale, molti modelli fanno uso di funzioni di parete, che hanno la funzione di "collegare" il valore delle grandezze nella prima cella a parete senza necessità di risolvere lo strato limite nel dettaglio.

Nella zona logaritmica dello strato limite:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B \quad (88)$$

$$k = \frac{u_\tau^2}{C_\mu^{1/2}} \quad (89)$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau^3}{ky} \quad (90)$$

Le ultime due relazioni si ottengono dall'ipotesi che la produzione e la dissipazione di energia cinetica siano uguali.

Nel caso si desideri risolvere lo strato limite (figura 8(a)) la griglia deve essere abbastanza fitta, in modo che $y^+ \equiv 1$. Se invece utilizziamo una funzione di parete nella zona logaritmica

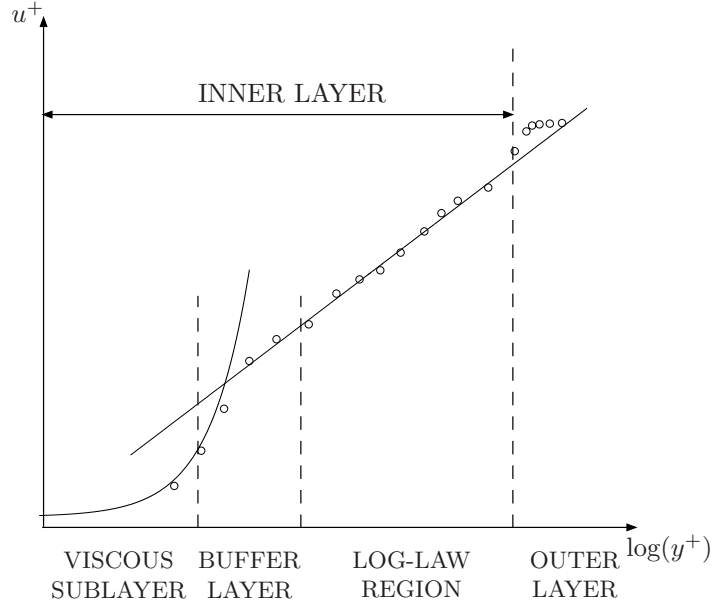


Figure 7: Struttura dello strato limite in termini non-dimensionali

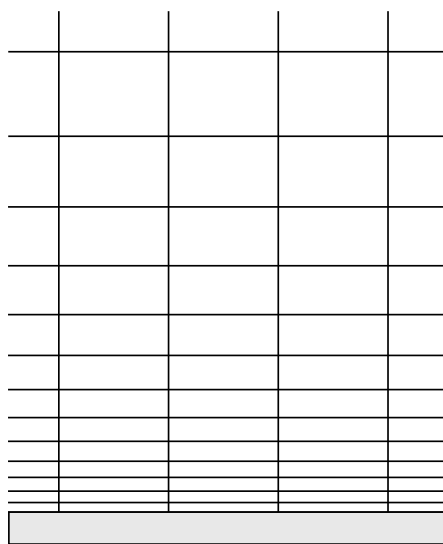
($11.3 < y^+ < 50$):

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B \quad (91)$$

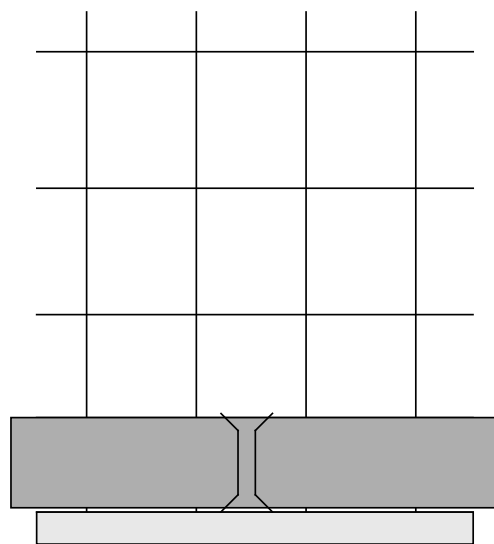
$$u^+ = \frac{U_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\tau_w / \rho} \quad (92)$$

$$y^+ = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P}{\mu} \quad (93)$$

$$\tau_w = \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/4} \frac{U_P}{U_*} \quad (94)$$



(a) Risoluzione diretta dello strato limite



(b) Risoluzione con funzione di parete

Figure 8: Struttura dello strato limite in termini non-dimensionali