

Corso di
Modellazione di Sistemi a Fluido

—

Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali

Tiziano Ghisu

October 23, 2018

Contents

1	Introduzione	3
2	Il concetto di caratteristica	3
2.1	Sistemi di due equazioni del primo ordine	8
2.2	Equazioni del secondo ordine	9
3	Equazioni ellittiche	10
3.1	Soluzione tramite metodo diretto	10
3.2	Soluzione tramite metodo iterativo	13
3.3	Analisi dell'errore locale di troncamento	14
4	Equazioni paraboliche	15
4.1	Metodo esplicito	16
4.2	Metodo di Crank-Nickolson	16
4.3	Cenni sull'implementazione numerica	18
4.4	Analisi dell'errore locale di troncamento	19
4.5	Stabilità	20
5	Equazioni iperboliche	23
5.1	Metodo centrato	24
5.2	Lax-Friedrichs	25
5.3	Lax-Wendroff	25
5.4	Metodo upwind	26
5.5	Alcune considerazioni	26
5.6	Analisi dell'errore locale di troncamento	27
5.7	Stabilità (metodo di Von Neumann)	29
5.8	Stabilità (metodo delle linee)	31
6	Esercizi	35

1 Introduzione

Un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE, Partial Differential Equation) è una relazione del tipo:

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (1)$$

dove:

- x, y, \dots sono le VARIABILI INDIPENDENTI
- $u(x, y, \dots)$ è la VARIABILE DIPENDENTE
- $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$ sono le DERIVATE parziali della variabile dipendente

L'**ordine** della PDE è l'ordine più alto in cui compare la derivata della variabile dipendente u .

L'equazione differenziale può essere **lineare**:

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad (2)$$

oppure non lineare se almeno uno dei coefficienti (a, b, c o d) è anche funzione della variabile dipendente $u(x, t)$.

I problemi fisici descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali possono essere di 2 tipi:

- problemi di PROPAGAZIONE (non stazionari)
- problemi di EQUILIBRIO (stazionari)

I secondi devono avere adeguate condizioni al contorno, mentre i primi sono problemi di Cauchy, quindi devono avere anche adeguate condizioni iniziali (si tratta di problemi ai valori iniziali o di Cauchy).

2 Il concetto di caratteristica

Consideriamo un'equazione differenziale del primo ordine alle derivate parziali

$$au_x + bu_y = c \quad (3)$$

dove la nostra incognita (variabile dipendente) è $u(x, y)$. Supponiamo di conoscere la soluzione $u(x, y)$ su una curva γ definita tramite equazioni parametriche $\phi(\tau)$ e $\psi(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} = \\ &= u_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + u_y \frac{\partial y}{\partial \tau} = f'(\tau) \end{aligned} \quad (4)$$

Mi chiedo quando dalla conoscenza di $u(\tau)$ su γ sono in grado di risalire a u_x e u_y sulla stessa curva γ . Posso mettere a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} au_x + bu_y = c \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} u_x + \frac{\partial y}{\partial \tau} u_y = f'(\tau) \end{cases} \quad (5)$$

Il sistema ammette soluzione unica se il determinante della matrice associata è diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \frac{dy}{d\tau} - b \frac{dx}{d\tau} \neq 0$$

quindi se

$$\frac{dy}{dx} \neq \frac{b}{a} \quad (6)$$

Le curve con coefficiente angolare b/a sono dette **caratteristiche dell'equazione differenziale**.

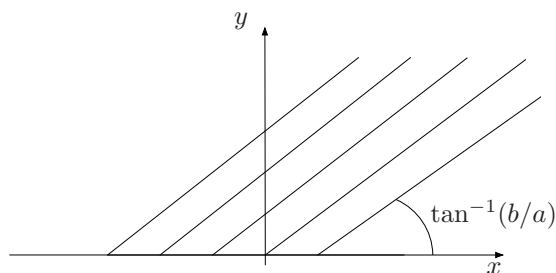


Figure 1: Curve caratteristiche

Vediamo la stessa cosa in un altro modo. Consideriamo l'equazione (3), in cui poniamo $c = 0$:

$$au_x + bu_y = 0 \quad (7)$$

Faccio una trasformazione di coordinate tale che

$$\xi = ax + by; \eta = bx - ay \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = b \frac{\partial u}{\partial \xi} - a \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (10)$$

Pertanto:

$$au_x + bu_y = a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + ab \frac{\partial u}{\partial \eta} + b^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - ab \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (11)$$

e quindi

$$(a^2 + b^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (12)$$

Significa quindi che u non è funzione di ξ , quindi è solo funzione di η , ossia si mantiene costante sulle curve caratteristiche.

Abbiamo visto che sulla caratteristica vale (equazione (5)):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a \\ \frac{dy}{d\tau} = b \\ \frac{du}{d\tau} = c \end{cases} \quad (13)$$

Pertanto:

$$\begin{cases} x = a\tau + c_1 \\ y = b\tau + c_2 \end{cases} \quad (14)$$

Chiaramente i valori di c_1 e c_2 dipendono esclusivamente da quale caratteristica sto considerando. Su questa posso risolvere $\frac{du}{d\tau} = 0$.

Esempio 1

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) \text{ condizione iniziale} \end{cases} \quad (15)$$

Le curve caratteristiche sono quelle per cui:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 1 \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 \end{cases} \quad (16)$$

Su queste vale l'equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{du}{d\tau} = 0; \quad (17)$$

Le curve caratteristiche hanno perciò equazione:

$$\begin{cases} x = \tau + c_1 \\ t = \tau + c_2 \end{cases} \quad (18)$$

oppure

$$\begin{cases} x = \tau + s \\ t = \tau \end{cases} \quad (19)$$

Su queste:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = 0; \\ u(0) = \sin(s) \end{cases} \quad (20)$$

Posso risolvere:

$$u(\tau) = \cos t = \sin(s) \quad (21)$$

e sostituendo

$$u(x, t) = \sin(x - t) \quad (22)$$

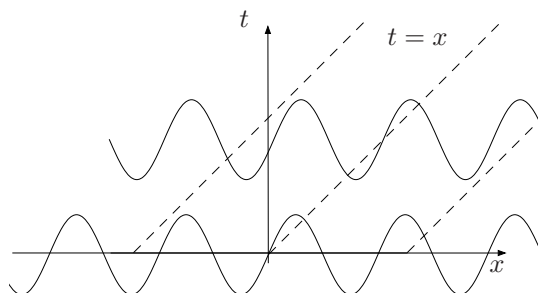


Figure 2: Curve caratteristiche

Esempio 2

$$\begin{cases} u_t + u_x = -2u \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{condizione iniziale} \quad (23)$$

Le curve caratteristiche hanno ancora equazione:

$$\begin{cases} x = \tau + s \\ t = \tau \end{cases} \quad (24)$$

Su queste vale l'equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -2u; \\ u(0) = \sin(s) \end{cases} \quad (25)$$

Posso risolvere:

$$\frac{du}{u} = -2d\tau \Rightarrow \ln(u) = -2\tau + c \Rightarrow u(\tau) = ke^{-2\tau} \quad (26)$$

Pertanto (sfruttando la condizione al contorno):

$$u(\tau) = \sin(s)e^{-2\tau} \quad (27)$$

Sostituendo:

$$u(x, t) = \sin(x - t)e^{-2t} \quad (28)$$

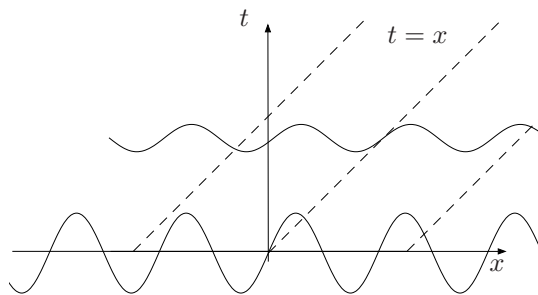


Figure 3: Curve caratteristiche

2.1 Sistemi di due equazioni del primo ordine

Possiamo estendere lo studio delle caratteristiche a un sistema di due equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y = f_1 \\ a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y = f_2 \end{cases} \quad (29)$$

Supponiamo di conoscere la soluzione $u(x, y), v(x, y)$ su una curva γ definita tramite equazioni parametriche $\phi(\tau)$ e $\psi(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} = u_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + u_y \frac{\partial y}{\partial \tau} = f'(\tau) \quad (30)$$

$$\frac{d}{d\tau} v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} = v_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + v_y \frac{\partial y}{\partial \tau} = f'(\tau) \quad (31)$$

Le caratteristiche si trovano imponendo che il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} = 0$$

che equivale a:

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) - \left(\frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau}\right) (a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1) + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 (b_1 d_2 - b_2 d_1) = 0 \quad (32)$$

La precedente può essere scritta nella forma:

$$A \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B \left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \quad (33)$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ B &= -(a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ C &= (b_1 d_2 - b_2 d_1) \end{aligned}$$

A seconda del valore del determinante $\Delta = B^2 - 4AC$ posso avere:

- $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ caratteristiche (sistema iperbolico)
- $\Delta = 0 \Rightarrow 1$ caratteristiche (sistema parabolico)
- $\Delta < 0 \Rightarrow 0$ caratteristiche (sistema ellittico)

2.2 Equazioni del secondo ordine

Se considero un'equazione del secondo ordine:

$$aw_{xx} + bw_{xy} + cw_{yy} = 0 \quad (34)$$

Posso trasformare la precedente in un sistema di due equazioni del primo ordine. Introducendo:

$$\begin{cases} u = w_x \\ v = w_y \end{cases} \quad (35)$$

Sostituendo nell'equazione (34):

$$\begin{cases} au_x + bu_y + cv_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Questa è un sistema di equazioni del tipo di quello introdotto nell'equazione 29, per cui:

$$\begin{aligned} A &= (a_1c_2 - a_2c_1) = -a \\ B &= -(a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) = b \\ C &= (b_1d_2 - b_2d_1) = -c \end{aligned}$$

Pertanto in questo caso il determinante $\Delta = b^2 - 4ac$ determina il tipo di equazione differenziale e quindi il numero di caratteristiche:

- $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ caratteristiche (sistema iperbolico)
- $\Delta = 0 \Rightarrow 1$ caratteristiche (sistema parabolico)
- $\Delta < 0 \Rightarrow 0$ caratteristiche (sistema ellittico)

3 Equazioni ellittiche

Le PDE ellittiche definiscono problemi di equilibrio (stazionari). Una PDE ellittica è:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (37)$$

Esempi tipici sono:

- il campo stazionario di temperatura in una piastra
- la funzione di tensione nel solido di Saint-Venant
- il flusso a potenziale in un fluido

Per le equazioni ellittiche devono essere definite le condizioni su tutti i contorni del dominio di definizione:

- condizione al contorno di Neumann: derivata normale $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ fissata
- condizione al contorno di Dirichlet: valore di u fissato

Sono possibili due metodi di soluzione:

1. **Metodo diretto:** si scrive un sistema di equazioni algebriche a partire dall'equazione differenziale di partenza, che poi si risolve in modo diretto (inversione della matrice).
2. **Metodo indiretto o iterativo:** si parte da una soluzione "di tentativo" che può anche non avere un significato fisico; questa viene poi modificata utilizzando le condizioni al contorno e l'equazione algebrica derivante dalla PDE; il procedimento si interrompe quando la differenza tra un'iterazione e la successiva è accettabile (per es. inferiore a un certo valore).

3.1 Soluzione tramite metodo diretto

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ + \text{condizioni al contorno} \end{cases} \quad (38)$$

Come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, anche qui devo discretizzare il dominio di definizione dell'equazione:

$$\begin{cases} x_i = a_1 + i\Delta x; \Delta x = \frac{b_1 - a_1}{N_1}; i = 0, \dots, N_1 \\ y_j = a_2 + j\Delta y; \Delta y = \frac{b_2 - a_2}{N_2}; j = 0, \dots, N_2 \end{cases} \quad (39)$$

Ogni punto della discretizzazione sarà definito univocamente da una coppia di indici (i, j) . Sostituisco le derivate seconde con delle differenze finite (centrate):

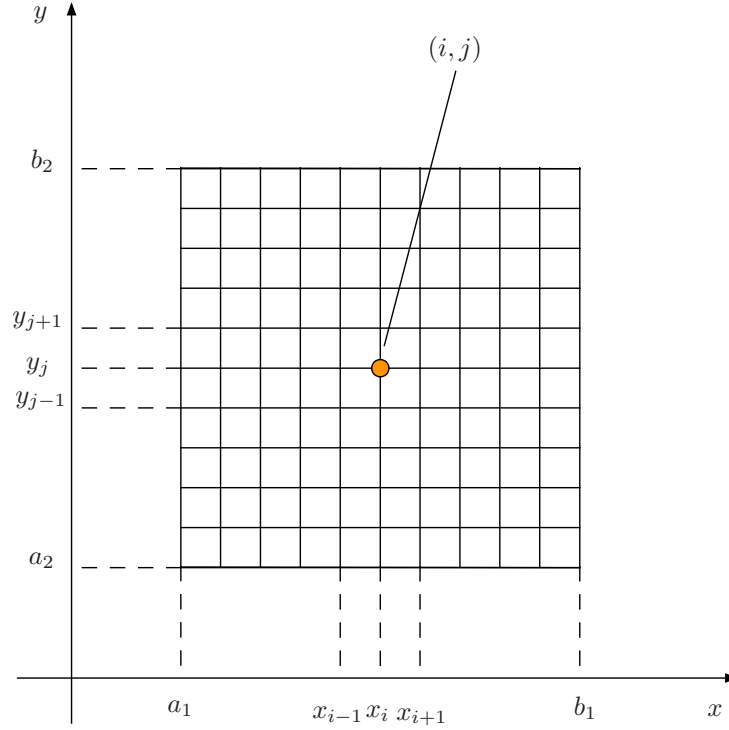


Figure 4: Discretizzazione

$$\frac{1}{\Delta x^2}(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) = 0 \quad (40)$$

Se supponiamo che $\Delta x = \Delta y = h$:

$$\frac{1}{h^2}(T_{i-1,j} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i+1,j}) = 0 \quad (41)$$

La matrice caratteristica sarà una matrice pentadiagonale. Se considero per esempio $N = 4$, potrò scrivere l'equazione precedente per tutti i punti interni ($i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$).

Ipotizzando **condizioni al contorno di Dirichlet** (quindi valore della funzione noto negli estremi del dominio di definizione, avrò quindi un sistema di 9 equazioni nelle incognite $T_{i,j}$, per $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$):

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,1} \\ T_{2,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \quad (42)$$

$$-\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T_{1,0} \\ 0 \\ 0 \\ T_{2,0} \\ 0 \\ 0 \\ T_{3,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{1,4} \\ 0 \\ T_{2,4} \\ 0 \\ 0 \\ T_{3,4} \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T_{0,1} \\ T_{0,2} \\ T_{0,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{4,1} \\ T_{4,2} \\ 0 \\ T_{4,3} \end{bmatrix} \quad (43)$$

dove le matrici colonna a secondo membro rappresentano i contributi delle condizioni al contorno, rispettivamente su estremi inferiore, superiore, sinistro e destro del dominio di definizione.

Supponiamo invece di avere una **condizione al contorno di Neumann** sul contorno destro del dominio di definizione, quindi $\frac{\partial T}{\partial x} = \sigma$. In questo caso il valore della variabile dipendente nei punti $T_{4,j}$ non è conosciuto. Dobbiamo perciò scrivere 12 equazioni, per $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3$. Le equazioni per i punti $(4, j)$ conterranno anche i punti $(5, j)$, che non appartengono al dominio di definizione (ghost points) e che eliminiamo applicando la condizione al contorno.

$$\frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h} = \sigma \Rightarrow T_{i+1,j} = T_{i-1,j} + 2h\sigma \quad (\text{per } i=4) \quad (44)$$

L'equazione precedente va sostituita nell'equazione (41), ottenendo:

$$\frac{1}{h^2} (2T_{i-1,j} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + 2h\sigma) = 0 \quad (45)$$

Il sistema di equazioni da risolvere diventa:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,1} \\ T_{2,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \\ T_{4,1} \\ T_{4,2} \\ T_{4,3} \end{bmatrix} = \quad (46)$$

$$-\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T_{1,0} \\ 0 \\ 0 \\ T_{2,0} \\ 0 \\ 0 \\ T_{3,0} \\ 0 \\ 0 \\ T_{4,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ T_{2,4} \\ 0 \\ 0 \\ T_{3,4} \\ 0 \\ 0 \\ T_{4,4} \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T_{0,1} \\ T_{0,2} \\ T_{0,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2h\sigma \\ 2h\sigma \\ 2h\sigma \end{bmatrix} \quad (47)$$

dove le matrici colonna a secondo membro rappresentano i contributi delle condizioni al contorno, rispettivamente su estremi inferiore, superiore, sinistro e destro del dominio di definizione.

3.2 Soluzione tramite metodo iterativo

Riprendiamo la discretizzazione utilizzata per l'equazione (37):

$$\frac{1}{h^2}(T_{i-1,j} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i+1,j}) = 0 \quad (48)$$

e scriviamola nella forma

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + T_{i+1,j}) \quad (49)$$

Questa vale per tutti i punti interni e può essere utilizzata, a partire da una soluzione di "tentativo" per tutti i punti interni del dominio, fissando i valori nei punti estremi del dominio

nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet, oppure calcolandoli tramite:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(2T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + 2h\sigma) \quad (50)$$

La precedente è stata ricavata ipotizzando per l'estremo destro del dominio una condizione di Neumann e sostituendo nella equazione (49) la $T_{i+1,j} = T_{i,j} + 2h\sigma$.

Il metodo deve essere applicato fino a raggiungere un errore (differenza tra i valori a due iterazioni successive) minore di un valore prefissato.

3.3 Analisi dell'errore locale di troncamento

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (51)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} h + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{h^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \quad (52)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} h + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{h^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \quad (53)$$

Perciò:

$$u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 + O(h^4) \quad (54)$$

e quindi

$$\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = O(h^2) \quad (55)$$

Allo stesso modo:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = O(h^2) \quad (56)$$

In conclusione:

$$\tau_{i,j} = O(h^2) \quad (57)$$

4 Equazioni paraboliche

Le PDE paraboliche sono legate a fenomeni non stazionari. Il caso classico è quello della diffusione del calore (scambio termico). Le equazioni di Navier-Stokes sono paraboliche quando il termine diffusivo domina su quello convettivo.

la forma classica è rappresentata dalla seguente equazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ per } t_0 < t < t_1 \text{ e } x_0 < x < x_1 \\ + \text{ condizioni al contorno} \end{cases} \quad (58)$$

Le condizioni al contorno devono essere di questo tipo:

- condizione al contorno di Dirichlet per $t = t_0$: $u(x, t = t_0) = u_0(x)$
- condizioni al contorno di Dirichlet o Neumann per $x = x_0$ e $x = x_1$: $u(x = x_0, t) = a_0(t)$ e $u(x = x_1, t) = a_1(t)$ oppure $\frac{\partial u}{\partial x}(x = x_0, t) = \sigma_0(t)$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(x = x_1, t) = \sigma_1(t)$

Devo quindi innanzitutto discretizzare le variabili indipendenti (t e x):

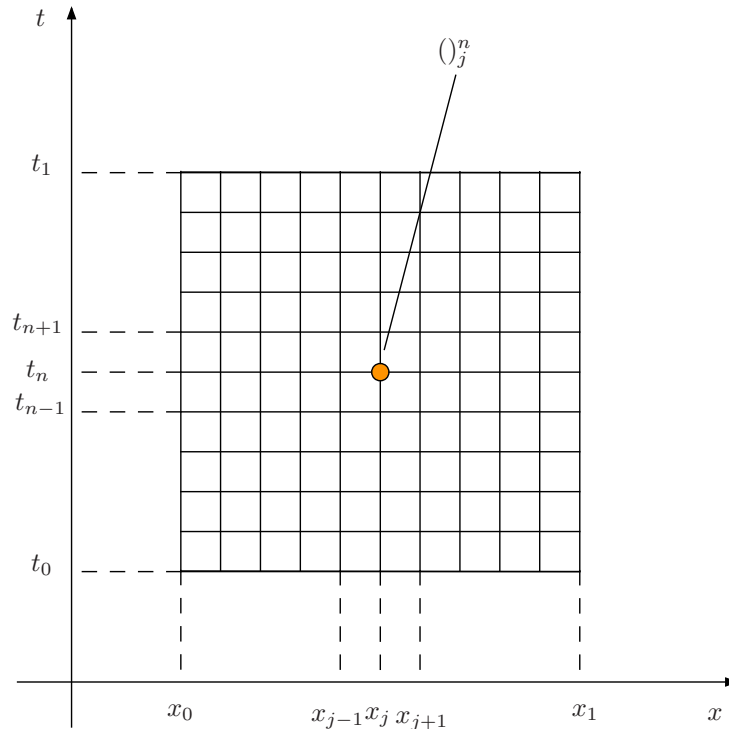


Figure 5: Discretizzazione per equazione parabolica

Il passo temporale si indica solitamente con un apice, mentre il punto spaziale si continua ad indicare con un pedice. Il valore della variabile dipendente u nel punto i al tempo n si

indica pertanto con:

$$u_j^n \tag{59}$$

4.1 Metodo esplicito

Ritornando all'equazione (58), devo fornire una approssimazione numerica per la derivata (prima) temporale e la derivata (seconda (spaziale)). Utilizziamo Eulero in avanti per approssimare la derivata temporale e una differenza centrata per la derivata spaziale:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{60}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{61}$$

Sostituendo nell'equazione (58):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{62}$$

Questo è un metodo **ESPLICITO AD UN PASSO**. È stabile per:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \tag{63}$$

4.2 Metodo di Crank-Nickolson

Utilizzo le seguenti approssimazione per le derivate:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \tag{65}$$

Indicando con $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \frac{r}{2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{66}$$

Questo è un metodo **IMPLICITO AD UN PASSO**. Separando le variabili al tempo $n + 1$ da quelle al tempo n :

$$-\frac{r}{2}u_{j-1}^{n+1} + (1+r)u_j^{n+1} - \frac{r}{2}u_{j+1}^{n+1} = \frac{r}{2}u_{j-1}^n + (1-r)u_j^{n+1} + \frac{r}{2}u_{j+1}^{n+1} \quad (67)$$

oppure:

$$-ru_{j-1}^{n+1} + (2+2r)u_j^{n+1} - ru_{j+1}^{n+1} = ru_{j-1}^n + (2-2r)u_j^{n+1} + ru_{j+1}^{n+1} \quad (68)$$

Devo quindi risolvere un sistema matriciale del tipo:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2+2r & -r & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r & 2+2r & -r & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & -r & 2+2r & -r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -r & 2+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_2^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} ru_0^n + (2-2r)u_1^n + ru_2^n \\ ru_1^n + (2-2r)u_2^n + ru_3^n \\ \vdots \\ ru_{N-3}^n + (2-2r)u_{N-2}^n + ru_{N-1}^n \\ ru_{N-2}^n + (2-2r)u_{N-1}^n + ru_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ru_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ru_N^{n+1} \end{bmatrix} \quad (69) \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine rappresenta il contributo delle condizioni al contorno (**condizioni al contorno di Dirichlet**).

E se invece avessi una **condizione al contorno di Neumann**? Supponiamo di avere sull'estremo destro del dominio spaziale di definizione:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \sigma \quad (70)$$

Dovrei in questo caso risolvere l'equazione (68) anche per il punto $i = N$, inserendo un ghost point ($N + 1$) che elimino dalle equazioni imponendo la condizione al contorno:

$$\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta x} = \sigma \Rightarrow u_{N+1} = u_{N-1} + 2\sigma\Delta x \quad (71)$$

L'equazione per il punto N diventa perciò:

$$-2ru_{N-1}^{n+1} + (2+2r)u_N^{n+1} - 2\sigma^{n+1}r\Delta x = 2ru_{N-1}^n + (2-2r)u_N^{n+1} + 2\sigma^n r\Delta x \quad (72)$$

In forma matriciale:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 2+2r & -r & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r & 2+2r & -r & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & -r & 2+2r & -r & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -r & 2+2r & -r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -r & 2+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_2^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} ru_0^n + (2-2r)u_1^n + ru_2^n \\ ru_1^n + (2-2r)u_2^n + ru_3^n \\ \vdots \\ ru_{N-3}^n + (2-2r)u_{N-2}^n + ru_{N-1}^n \\ ru_{N-2}^n + (2-2r)u_{N-1}^n + ru_N^n \\ ru_{N-1}^n + (2-2r)u_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ru_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2\sigma^n r \Delta x + 2\sigma^{n+1} r \Delta x \end{bmatrix} \quad (73)
\end{aligned}$$

4.3 Cenni sull'implementazione numerica

L'implementazione del metodo esplicito (equazione (62)) è immediata: ad ogni istante temporale devo risolvere (per ogni punto della discretizzazione spaziale) un'equazione esplicita da cui posso ricavare l'incognita u_j^{n+1} .

Nel metodo di Crank-Nicholson, devo invece invertire (ad ogni istante di tempo) una matrice tridiagonale (nel caso monodimensionale, o pentadiagonale e eptadiagonale rispettivamente per problemi bidimensionali e tridimensionali).

Nel caso di matrice tridiagonale (vedi equazioni (69) e (73)), devo risolvere un sistema del tipo:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_2^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_N \end{bmatrix} \quad (74)
\end{aligned}$$

che posso risolvere utilizzando il Metodo di Gauss, cioè trasformando il sistema nel seguente modo:

$$r'_2 = r_2 - \frac{a_2}{b_1} r_1; \quad d'_2 = d_2 - \frac{a_2}{b_1} d_1 \quad (75)$$

$$r'_3 = r_3 - \frac{a_3}{b'_2} r'_2; \quad d'_3 = d_3 - \frac{a_3}{b'_2} d'_2 \quad (76)$$

$$r'_j = r_j - \frac{a_j}{b'_{j-1}} r'_{j-1}; \quad d'_j = d_j - \frac{a_j}{b'_{j-1}} d'_{j-1} \quad (77)$$

dove r_j e indica la riga j -esima e l'apice i valori modificati dopo la sostituzione.

In questo modo, ottengo una matrice triangolare superiore che posso risolvere tramite sostituzione all'indietro.

4.4 Analisi dell'errore locale di troncamento

Metodo esplicito

$$\tau_j^n = \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \right) \quad (78)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_j^n \frac{\Delta t^3}{3!} + O(\Delta t^4) \quad (79)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (80)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (81)$$

Perciò:

$$\tau_j^n = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_j^n \frac{\Delta t^3}{3!} + O(\Delta t^4) \right) \quad (82)$$

$$- \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \Delta x^2 + O(\Delta x^4) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \right) \quad (83)$$

In conclusione:

$$\tau_j^n = O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (84)$$

Pertanto il metodo esplicito è consistente e l'errore locale di troncamento è del primo ordine temporale e del secondo ordine spaziale.

Metodo di Crank-Nickolson

$$\tau_j^n = \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{\alpha}{2\Delta x^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \right) \quad (85)$$

Come nel caso precedente:

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + O(\Delta x^2) \quad (86)$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^{n+1} + O(\Delta x^2) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 t} \Big|_j^n \Delta t + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \end{aligned} \quad (87)$$

$$\frac{1}{2\Delta x^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 t} \Big|_j^n \Delta t + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (88)$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \tau_j^n &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^2) \right) \\ &- \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 t} \Big|_j^n \Delta t + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \Delta t - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 t} \Big|_j^n \Delta t \right) + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \end{aligned} \quad (89)$$

Il termine tra parentesi è sempre nullo. Ciò può essere dimostrato differenziando l'equazione originale (equazione (58) rispetto al tempo).

Pertanto, così come il metodo esplicito, anche il metodo di Crank-Nickolson è consistente. Inoltre, l'errore locale di troncamento è del secondo ordine temporale e del secondo ordine spaziale.

4.5 Stabilità

Studiamo la stabilità di una PDE parabolica con il metodo di Von Neumann, che può essere usato per tutte le equazioni ad avanzamento. Riprendiamo il problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \text{ per } t_0 < t < t_1 \text{ e } x_0 < x < x_1 \\ + \text{ condizioni al contorno} \end{cases} \quad (90)$$

Ipotizziamo che la variabile dipendente sia una funzione periodica:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m e^{i(mk_0x + \phi)} \quad (91)$$

dove $k_0 = 2\pi/\lambda$ e m è il numero d'onda.

Studiamo un modo generico $e^{ix\xi}$, dove $\xi = mk_0$

La soluzione numerica sarà:

$$u_j^n = e^{ij\Delta x\xi} \quad (92)$$

$$u_j^{n+1} = e^{ij\Delta x\xi} g(\xi) \quad (93)$$

dove $g(\xi)$ rappresenta il fattore di amplificazione. Affinchè la soluzione numerica sia stabile deve essere:

$$|g(\xi)| \leq 1 \quad (94)$$

Metodo esplicito

Riprendiamo l'espressione ricavata per il metodo esplicito (equazione (62)):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \quad (95)$$

Sostituiamo l'equazione (93) e otteniamo

$$g(\xi)e^{ij\Delta x\xi} = e^{ij\Delta x\xi} + r (e^{i(j-1)\Delta x\xi} - 2e^{ij\Delta x\xi} + e^{i(j+1)\Delta x\xi}) \quad (96)$$

Dividendo per $e^{ij\Delta x\xi}$:

$$g(\xi) = 1 + r (e^{-i\Delta x\xi} - 2 + e^{i\Delta x\xi}) \quad (97)$$

Ricordando che $e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$:

$$g(\xi) = 1 + 2r (\cos(\Delta x\xi) - 1) \quad (98)$$

Essendo il $(\cos(\Delta x\xi) - 1)$ sempre negativo e mai minore di -2 :

$$g(\xi) \geq 1 - 4r \quad (99)$$

Per la stabilità $|g(\xi)| \leq 1$ e quindi:

$$1 - 4r \geq -1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (100)$$

Metodo di Crank-Nickolson

Riprendiamo l'espressione ricavata per il metodo di Crank-Nickolson (equazione (66)):

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2}(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \frac{r}{2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \quad (101)$$

Sostituiamo l'equazione (93) e otteniamo

$$\begin{aligned} -rg(\xi)e^{i(j-1)\Delta x\xi} + (2 + 2r)g(\xi)e^{ij\Delta x\xi} - rg(\xi)e^{i(j+1)\Delta x\xi} = \\ -re^{i(j-1)\Delta x\xi} + (2 - 2r)e^{ij\Delta x\xi} + re^{i(j+1)\Delta x\xi} \end{aligned} \quad (102)$$

Divido ancora per $e^{ij\Delta x\xi}$:

$$-rg(\xi)e^{-i\Delta x\xi} + (2 + 2r)g(\xi) - rg(\xi)e^{i\Delta x\xi} = -re^{-i\Delta x\xi} + (2 - 2r) + re^{i\Delta x\xi} = \quad (103)$$

Ricordando che $e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$:

$$(-2r\cos(\Delta x\xi) + 2 + 2r)g(\xi) = (2 - 2r) + 2r\cos(\Delta x\xi) \quad (104)$$

E quindi:

$$g(\xi) = \frac{1 - r + r\cos(\Delta x\xi)}{1 + r - r\cos(\Delta x\xi)} \quad (105)$$

L'espressione precedente è del tipo $\frac{1-x}{1+x}$ con $x = r(1 - \cos(\Delta x\xi))$ sempre positivo, per cui $g(\xi)$ è sempre minore o uguale a 1 e il metodo di Crank-Nickolson è sempre stabile.

5 Equazioni iperboliche

Anche le PDE iperboliche sono legate a fenomeni non-stazionari. La forma classica è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (106)$$

Questa equazione è iperbolica in quanto $\Delta = b^2 - 4ac = 4c > 0$ e quindi ammette due curve caratteristiche.

Molto più frequentemente ci troviamo però a che fare con la forma del primo ordine (convezione):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (107)$$

Questa equazione ammette una caratteristica con pendenza $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}$.

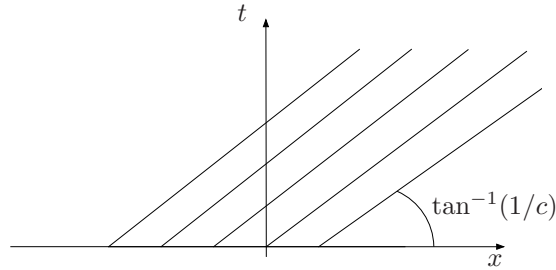


Figure 6: Curve caratteristiche per la PDE $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

La soluzione è $u(x - ct)$. Posso infatti definire:

$$\xi = t + cx; \eta = -ct + x \quad (108)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (109)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (110)$$

Pertanto:

$$u_t + cu_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta} + c^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + c \frac{\partial u}{\partial \eta} = (1 + c^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (111)$$

E quindi:

$$u = u(\eta) = u(x - ct) \quad (112)$$

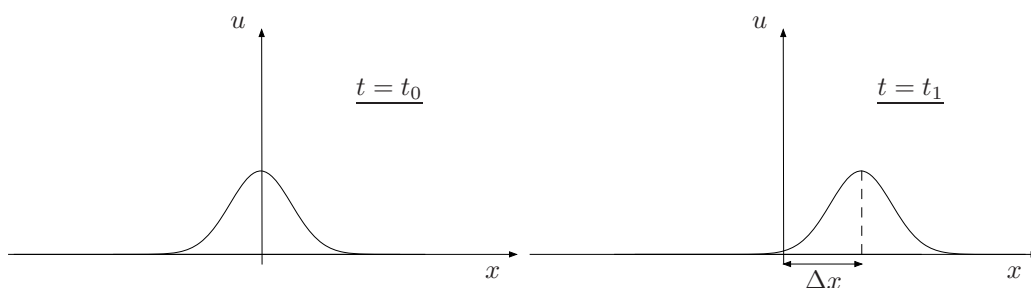


Figure 7: Esempio di convezione di un'onda

L'equazione $u_t + cu_x = 0$ rappresenta un'equazione di convezione o trasporto. L'onda si propaga con velocità c e quindi percorre nel tempo $t_1 - t_0$ una distanza $c(t_1 - t_0)$.

$$x_0 - ct_0 = x_1 - ct_1 \Rightarrow \Delta x = x_1 - x_0 = c(t_1 - t_0) \quad (113)$$

5.1 Metodo centrato

Riprendiamo l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \text{ per } x \in [0, b], t > t_0 \\ u(x = 0, t) = \bar{u}(t) \\ u(x, t = t_0) = u_0(x) \end{cases} \quad (114)$$

Come nel caso del problema parabolico, utilizziamo Eulero in avanti per approssimare la derivata temporale e una differenza centrata per la derivata spaziale:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (115)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (116)$$

Sostituendo nell'equazione (107):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (117)$$

Questo schema però non è stabile.

5.2 Lax-Friedrichs

Il metodo di Lax-Friedrichs si ottiene sostituendo u_j^n con $\frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2}$ nella equazione (118).

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (118)$$

La precedente è equivalente a:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2} = \\ &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (119)$$

È come se stessi aggiungendo un termine contenente una derivata seconda, con coefficiente di diffusione $\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$, quindi come se stessi risolvendo l'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (120)$$

Questo metodo è stabile se $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

5.3 Lax-Wendroff

Il metodo di Lax-Friedrichs si ottiene applicando il metodo di Lax-Friedrichs per ottenere la $u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ e la $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ e quindi il metodo esplicito centrato per ottenere la u_j^{n+1} :

$$u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (121)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (122)$$

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) = \\ &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \\ &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2\Delta t}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (123)$$

Anche in questo caso è come se stessi aggiungendo un termine contenente una derivata seconda, con coefficiente di diffusione $\frac{c^2\Delta t}{2}$, quindi come se stessi risolvendo l'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^2\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (124)$$

Anche questo metodo è stabile se $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

5.4 Metodo upwind

Questo metodo tiene conto della conoscenza dell'esistenza di direzioni caratteristiche, cioè del fatto che l'informazione si propaga dal punto $j - 1$ verso il punto j . Scriviamo pertanto le approssimazioni delle derivate temporale e spaziale nel seguente modo:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (125)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (126)$$

Sostituendo nell'equazione (107):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (127)$$

L'espressione precedente è equivalente a

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{j+1}^n}{2} - \frac{u_{j+1}^n}{2} + u_j^n - \frac{u_{j-1}^n}{2} - \frac{u_{j-1}^n}{2} \right) = \\ &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \\ &= u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c\Delta x}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (128)$$

Anche in questo caso è come se stessi aggiungendo un termine contenente una derivata seconda, con coefficiente di diffusione $\frac{c\Delta x}{2}$, quindi come se stessi risolvendo l'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (129)$$

Anche questo metodo è stabile se $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

5.5 Alcune considerazioni

I metodi di Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff e Upwind risolvono effettivamente l'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (130)$$

Dove il coefficiente del termine diffusivo ϵ assume i seguenti valori

$$\begin{cases} \epsilon_{LF} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \\ \epsilon_{LW} = \frac{c^2 \Delta t}{2} \\ \epsilon_{UW} = \frac{c\Delta x}{2} \end{cases} \quad (131)$$

Tutti questi metodi sono stabili per $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Questo rapporto viene spesso indicato con l'acronimo CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Da notare come per CFL=1:

$$\epsilon_{LF} = \epsilon_{LW} = \epsilon_{UW} \quad (132)$$

5.6 Analisi dell'errore locale di troncamento

Metodo centrato, metodi di Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff e Upwind possono essere scritti nel seguente modo:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\epsilon}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (133)$$

dove:

$$\begin{cases} \epsilon_C = 0 \\ \epsilon_{LF} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \\ \epsilon_{LW} = \frac{c^2\Delta t}{2} \\ \epsilon_{UW} = \frac{c\Delta x}{2} \end{cases} \quad (134)$$

$$\tau_j^n = \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{c}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{\Delta x^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + c \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \right) \quad (135)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_j^n \frac{\Delta t^3}{3!} + O(\Delta t^4) \quad (136)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (137)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (138)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\tau_j^n &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \right) \\
&+ \frac{c}{2\Delta x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \Delta x + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_j^n \frac{\Delta x}{3!} + O(\Delta x^5) \right) \\
&- \frac{\epsilon}{\Delta x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n \Delta x^2 + O(\Delta x^4) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + c \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \right)
\end{aligned} \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
\tau_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_j^n \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\
&- \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + c \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \right)
\end{aligned} \tag{140}$$

Differenziando l'equazione originaria una volta per x e una per t e eliminando il termine misto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{141}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \tag{142}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{143}$$

Sostituendo nella precedente:

$$\begin{aligned}
\tau_j^n &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n + (c^2 \frac{\Delta t}{2} - \epsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\
&- \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + c \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n \right)
\end{aligned} \tag{144}$$

Pertanto tutti i metodi precedenti introducono un termine diffusivo, che però si annulla se:

$$\epsilon = c^2 \frac{\Delta t}{2} \tag{145}$$

che equivale a:

$$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} = c^2 \frac{\Delta t}{2} \quad (\text{LF}) \quad (146)$$

$$\frac{c^2 \Delta t}{2} = c^2 \frac{\Delta t}{2} \quad (\text{LW}) \quad (147)$$

$$\frac{c\Delta x}{2} = c^2 \frac{\Delta t}{2} \quad (\text{UW}) \quad (148)$$

5.7 Stabilità (metodo di Von Neumann)

Metodo centrato

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (149)$$

dove $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.

Sostituiamo:

$$\begin{cases} u_j^n = e^{ij\Delta x\xi} \\ u_j^{n+1} = e^{ij\Delta x\xi} g(\xi) \end{cases} \quad (150)$$

e otteniamo:

$$g(\xi)e^{ij\Delta x\xi} = e^{ij\Delta x\xi} - \frac{\alpha}{2}(e^{i(j+1)\Delta x\xi} - e^{i(j-1)\Delta x\xi}) \quad (151)$$

Dividendo per $e^{ij\Delta x\xi}$:

$$g(\xi) = 1 - \frac{\alpha}{2}(e^{i\Delta x\xi} - e^{-i\Delta x\xi}) = 1 - \frac{\alpha}{2}(2i\sin(\Delta x\xi)) = 1 - \alpha i\sin(\Delta x\xi) \quad (152)$$

Quindi:

$$|g(\xi)|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(\Delta x\xi) \quad (153)$$

che è sempre maggiore o uguale a 1, pertanto il metodo è sempre instabile.

Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (154)$$

dove $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$

Sostituiamo le equazioni (150):

$$g(\xi)e^{ij\Delta x\xi} = \frac{e^{i(j+1)\Delta x\xi} + e^{i(j-1)\Delta x\xi}}{2} - \frac{\alpha}{2}(e^{i(j+1)\Delta x\xi} - e^{i(j-1)\Delta x\xi}) \quad (155)$$

Dividendo per $e^{ij\Delta x\xi}$:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{e^{i\Delta x\xi} + e^{-i\Delta x\xi}}{2} - \frac{\alpha}{2}(e^{i\Delta x\xi} - e^{-i\Delta x\xi}) = \\ &= \cos(\Delta x\xi) - \alpha i \sin(\Delta x\xi) \end{aligned} \quad (156)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} |g(\xi)|^2 &= \cos^2(\Delta x\xi) + \alpha^2 \sin^2(\Delta x\xi) = \\ &= 1 + (\alpha^2 - 1) \sin^2(\Delta x\xi) \end{aligned} \quad (157)$$

Essendo il termine $\sin^2(\Delta x\xi)$ sempre minore o uguale a 1, il metodo è stabile per

$$\alpha^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (158)$$

Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (159)$$

dove $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.

Sostituiamo le equazioni (150):

$$\begin{aligned} g(\xi)e^{ij\Delta x\xi} &= e^{ij\Delta x\xi} - \frac{\alpha}{2}(e^{i(j+1)\Delta x\xi} - e^{i(j-1)\Delta x\xi}) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2}(e^{i(j+1)\Delta x\xi} - 2e^{ij\Delta x\xi} + e^{i(j-1)\Delta x\xi}) \end{aligned} \quad (160)$$

Dividendo per $e^{ij\Delta x\xi}$:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= 1 - \frac{\alpha}{2}(e^{i\Delta x\xi} - e^{-i\Delta x\xi}) + \frac{\alpha^2}{2}(e^{i\Delta x\xi} - 2 + e^{-i\Delta x\xi}) \\ &= 1 - \alpha i \sin(\Delta x\xi) + \alpha^2 (\cos(\Delta x\xi) - 1) \end{aligned} \quad (161)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
|g(\xi)|^2 &= 1 + \alpha^4 (\cos(\Delta x\xi) - 1)^2 + 2\alpha^2 (\cos(\Delta x\xi) - 1) + \alpha^2 \sin^2(\Delta x\xi) = \\
&= 1 + \alpha^4 (\cos(\Delta x\xi) - 1)^2 + \alpha^2 (2\cos(\Delta x\xi) - 2 + 1 - \cos^2(\Delta x\xi)) = \\
&= 1 + \alpha^4 (\cos(\Delta x\xi) - 1)^2 - \alpha^2 (\cos(\Delta x\xi) - 1)^2 = \\
&= 1 + \alpha^2(\alpha^2 - 1) (\cos(\Delta x\xi) - 1)^2
\end{aligned} \tag{162}$$

Affinchè il metodo sia stabile deve essere:

$$\alpha^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{163}$$

Metodo Upwind

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n) \tag{164}$$

dove $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.

Sostituiamo le equazioni (150):

$$g(\xi)e^{ij\Delta x\xi} = e^{ij\Delta x\xi} - \alpha(e^{ij\Delta x\xi} - e^{i(j-1)\Delta x\xi}) \tag{165}$$

Dividendo per $e^{ij\Delta x\xi}$:

$$g(\xi) = 1 - \alpha(1 - e^{-i\Delta x\xi}) = 1 - \alpha(1 - \cos(\Delta x\xi) + i\sin(\Delta x\xi)) \tag{166}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
|g(\xi)|^2 &= 1 + \alpha^2(1 - \cos(\Delta x\xi))^2 - 2\alpha(1 - \cos(\Delta x\xi)) + \alpha^2 \sin^2(\Delta x\xi) = \\
&= 1 + \alpha^2(1 - \cos(\Delta x\xi))^2 - 2\alpha(1 - \cos(\Delta x\xi)) + \alpha^2(1 - \cos^2(\Delta x\xi)) = \\
&= 1 + \alpha^2(2 - 2\cos(\Delta x\xi)) - 2\alpha(1 - \cos(\Delta x\xi)) = \\
&= 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(\Delta x\xi))
\end{aligned} \tag{167}$$

Anche in questo caso affinché il metodo sia stabile deve essere

$$\alpha - 1 \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{168}$$

5.8 Stabilità (metodo delle linee)

Riprendiamo l'equazione differenziale iperbolica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{169}$$

e approssimiamo la derivata prima spaziale con il metodo centrato nel punto j :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j = u'_j = -\frac{c}{2\Delta x} (u_{j+1} - u_{j-1}) \quad (170)$$

Questo è un sistema di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} u'_1 = -\frac{c}{2\Delta x} (u_2 - u_0) \\ u'_2 = -\frac{c}{2\Delta x} (u_3 - u_1) \\ \vdots \\ u'_{N-1} = -\frac{c}{2\Delta x} (u_N - u_{N-2}) \end{cases} \quad (171)$$

In forma matriciale:

$$U' = -\frac{c}{2\Delta x} AU \quad (172)$$

dove $U = [u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]$ è il vettore contenente i valori della variabile dipendente al tempo n per i vari punti della discretizzazione spaziale, e U' la sua derivata rispetto al tempo, e A una matrice del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (173)$$

Posso scrivere:

$$AX = \Lambda X \quad (174)$$

dove Λ è una matrice diagonale contenente gli autovalori di A e X la matrice degli autovettori. L'equazione matriciale 172 può perciò essere scritta nella seguente forma:

$$U' = -\frac{c}{2\Delta x} X^{-1} \Lambda XU \quad (175)$$

$$XU' = -\frac{c}{2\Delta x} \Lambda XU \quad (176)$$

Sostituendo $V=XU$:

$$V' = -\frac{c}{2\Delta x}\Lambda V \quad (177)$$

Gli elementi di V sono combinazioni lineari degli elementi di U . In questo modo ho disaccoppiato le equazioni differenziali del sistema 171, che posso quindi risolvere utilizzando uno dei metodi visti per le equazioni differenziali ordinarie. Se uso Eulero Esplicito gli autovalori della matrice A moltiplicati per $\frac{-c}{2\Delta x}$ e per il Δt della discretizzazione temporale devono cadere nella regione di stabilità del metodo (figura 8).

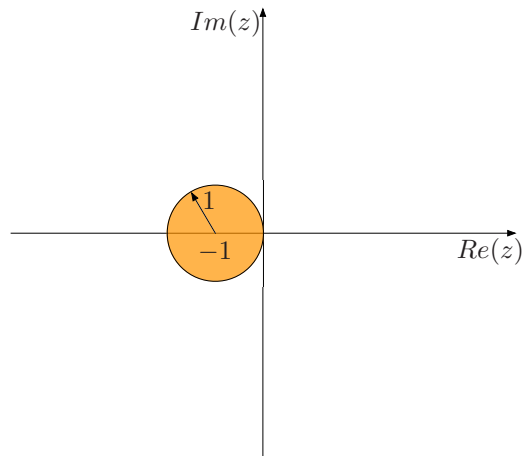


Figure 8: Regione di stabilità del metodo Eulero in avanti

Tutti gli autovalori di una matrice antisimmetrica sono immaginari, perciò il metodo è sempre instabile. Se invece aggiungo una matrice simmetrica (che ha autovalori reali) come nei metodi di Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff e Upwind, ho più possibilità che gli autovalori della matrice A cadano nella regione di stabilità.

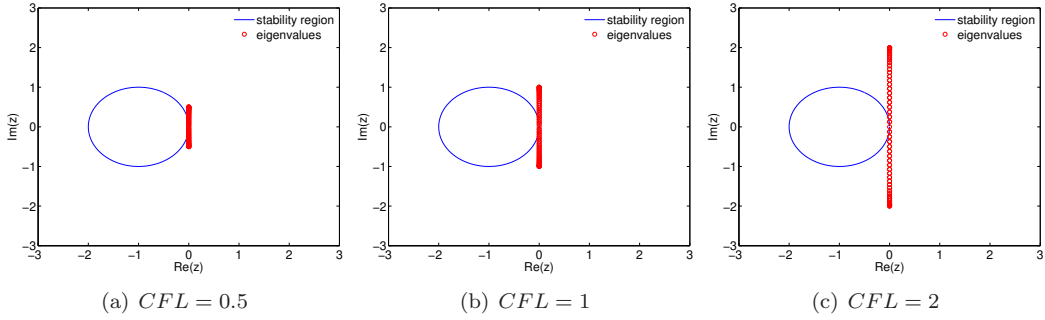


Figure 9: Autovalori per il metodo centrato

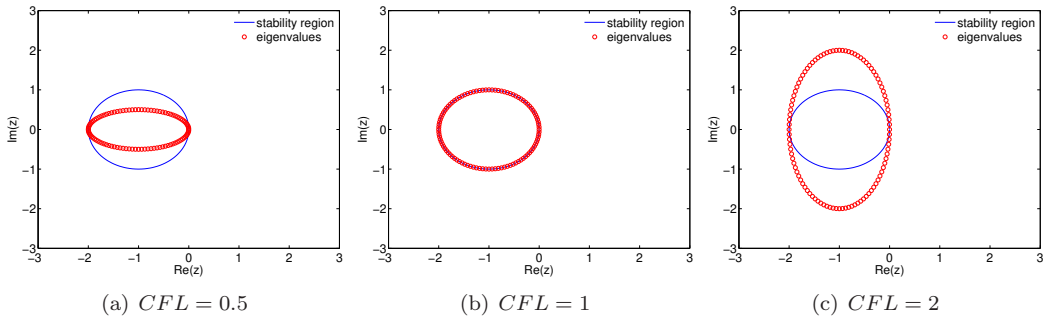


Figure 10: Autovalori per il metodo Lax-Friedrichs

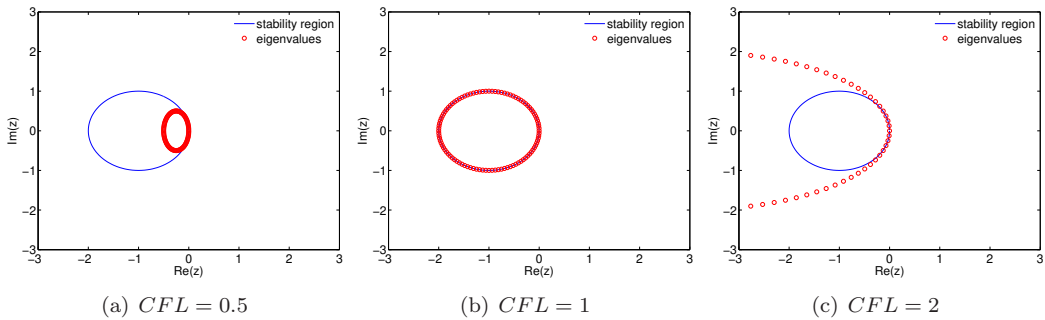


Figure 11: Autovalori per il metodo Lax-Wendroff

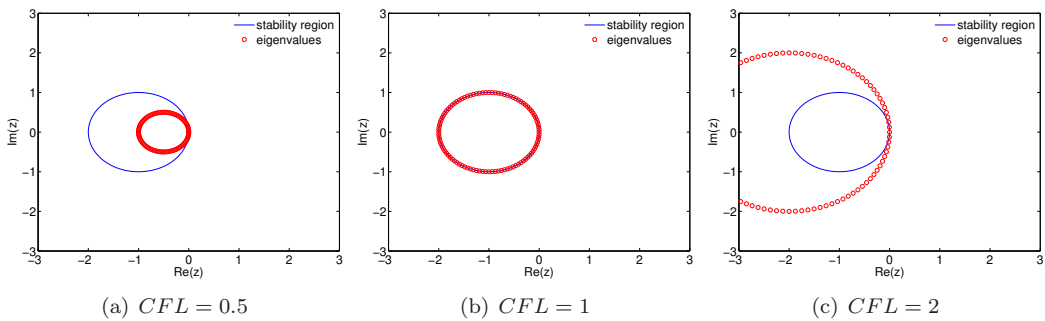


Figure 12: Autovalori per il metodo Upwind

6 Esercizi

Esercizio 1 (equazioni ellittiche)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ T(0, y) = -800y^2 + 800y + 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \\ T(1, y) = 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \\ T(x, 0) = 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \\ T(x, 1) = 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ T(0, y) = 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \\ \frac{\partial T}{\partial x}(1, y) = 100 \text{ (condizione al contorno di Neumann)} \\ T(x, 0) = 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \\ T(x, 1) = 300 \text{ (condizione al contorno di Dirichlet)} \end{cases}$$

Risolvere con metodo diretto e iterativo.

Esercizio 2 (equazioni paraboliche)

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; x \in [0, 1], t \in [0, .25], \alpha = 1 \\ T(t, x = 0) = 0 \\ T(t, x = 1) = 0 \\ T(t = 0, x) = x(1 - x) \end{cases}$$

Risolvere con:

- Metodo Esplicito
- Crank-Nicholson

Esercizio 3 (equazioni iperboliche)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}; x \in [0, 1], t \in [0, 0.2], c = 2 \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, x = 1) = 0 \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 & u(t = 0, x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(c_1 + c_2 x)) \\ \text{altrimenti} & u(t = 0, x) = 0 \end{array} \right. \\ x_1 = 0.2 \\ x_2 = 0.4 \\ c_1 = -\pi \left(1 + \frac{2x_1}{x_2 - x_1}\right) \\ c_2 = \frac{2\pi}{x_2 - x_1} \end{array} \right.$$

Risolvere con:

- Metodo centrato
- Lax-Friedrichs
- Lax-Wendroff
- Metodo upwind