

Note sulla  
Progettazione di Compressori Assiali

Tiziano Ghisu

April 13, 2018

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Analisi Dimensionale</b>	<b>3</b>
2.1	Flussi Incompressibili . . . . .	3
2.2	Flussi Compressibili . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Scelta del Tipo di Turbomacchina</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Caratteristiche Geometriche</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Caratteristiche Aerodinamiche dei Profili</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Analisi delle Forze Aerodinamiche in una Schiera</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Legame tra Perdite e Efficienza</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Grado di Reazione</b>	<b>16</b>
<b>9</b>	<b>Fattore di Carico</b>	<b>17</b>
<b>10</b>	<b>Effetto dell'Incidenza e Perdite</b>	<b>19</b>
<b>11</b>	<b>Incidenza di Riferimento e Deviazione</b>	<b>20</b>
<b>12</b>	<b>Come Limitare Separazione e Perdite?</b>	<b>22</b>
<b>13</b>	<b>Effetto del Numero di Reynolds</b>	<b>25</b>
<b>14</b>	<b>Effetto del Numero di Mach</b>	<b>25</b>
<b>15</b>	<b>Equilibrio Radiale</b>	<b>27</b>
15.1	Considerazioni: Lavoro e Grado di Reazione . . . . .	28
15.2	Circuitazione . . . . .	29

# 1 Introduzione

Le **turbomacchine** sono macchine operatrici (che cedono energia al fluido, i.e.  $W < 0$ ) o motrici (che ricevono energia dal fluido, i.e.  $W > 0$ ) nelle quali il trasferimento di energia avviene per mezzo di pale rotanti.

## 2 Analisi Dimensionale

### 2.1 Flussi Incomprimibili

Supponiamo di avere a che fare con una macchina che evolve un fluido incompressibile (come ad esempio una pompa). La prevalenza fornita ( $gH$ ) sarà funzione di portata volumetrica  $Q$ , velocità di rotazione  $\Omega$ , dimensione della macchina  $D$ , densità del fluido  $\rho$  e viscosità  $\mu$ . Queste grandezze hanno le seguenti unità di misura:

$$\begin{aligned}[gH] &= \text{m}^2\text{s}^{-2} \\ [Q] &= \text{m}^3\text{s}^{-1} \\ [\Omega] &= \text{s}^{-1} \\ [D] &= \text{m} \\ [\rho] &= \text{kg m}^{-3} \\ [\mu] &= \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

In presenza di 6 grandezze fisiche e 3 unità di misura, secondo il teorema di Buckingham, posso esprimere il problema mediante (6-3) gruppi adimensionali, che posso ricavare dividendo per una grandezza alla volta:

1. dividendo per  $\mu$ , ottengo  $\rho/\mu$ , la cui unità di misura è  $\text{s m}^{-2}$ ;
2. dividendo o moltiplicando per una combinazione di  $D$  e  $\Omega$  posso ottenere i 3 gruppi adimensionali:

- $\frac{gH}{\Omega^2 D^2}$
- $\frac{Q}{\Omega D^3}$
- $\frac{\rho \Omega D^2}{\mu}$

Pertanto posso scrivere che:

$$\frac{gH}{\Omega^2 D^2} = F_1 \left( \frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu} \right) \quad (1)$$

o, analogamente, ragionando su efficienza e potenza:

$$\eta = F_2 \left( \frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu} \right) \quad (2)$$

$$\frac{P}{\rho \Omega^3 D^5} = F_3 \left( \frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu} \right) \quad (3)$$

Nelle espressioni precedenti  $\frac{Q}{\Omega D^3}$  è un coefficiente di flusso, mentre  $\frac{\rho \Omega D^2}{\mu}$  è il numero di Reynolds, rapporto tra forze inerziali e forze viscoso.

Infatti:

$$\frac{Q}{\Omega D^3} = \frac{C_z \frac{\pi D^2}{4}}{\Omega D^3} = \frac{\pi}{4} \frac{C_z}{\Omega D} = \frac{\pi}{8} \frac{C_z}{U} = \frac{\pi}{8} \Phi \quad (4)$$

dove  $\Phi = \frac{C_z}{U}$  è il tradizionale coefficiente di flusso.

È interessante notare come le funzioni  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  non siano indipendenti. Infatti, nel caso di una macchina operatrice, indicando con  $P$  la potenza all'albero e con  $P_N$  quella trasferita al fluido:

$$P = \frac{P_N}{\eta} = \frac{\rho Q g H}{\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{Q}{\Omega D^3} \frac{g H}{\Omega D^2} \rho \Omega^3 D^5 \quad (5)$$

o, in altra forma:

$$\frac{P}{\rho \Omega^3 D^5} = \frac{1}{\eta} \frac{Q}{\Omega D^3} \frac{g H}{\Omega D^2} \quad (6)$$

e quindi:

$$F_3 = \frac{F_1}{F_2} \frac{Q}{\Omega D^3} \quad (7)$$

Nel caso di una macchina motrice invece  $P = \eta P_N$  e si giungerebbe a una diversa conclusione.

L'effetto del numero di Reynolds può essere solitamente trascurato per valori alti ( $Re > 10^5$ ).

## 2.2 Flussi Comprimibili

Nel caso di macchine che funzionano con fluidi comprimibili, anzichè parlare di prevalenza si parla di differenza di entalpia totale  $\Delta h_0$ . Questa sarà funzione di:

$$\begin{aligned} [\dot{m}] &= \text{kg s}^{-1} \\ [\Omega] &= \text{s}^{-1} \\ [D] &= \text{m} \\ [\rho_0] &= \text{kg m}^{-3} \\ [a_0] &= \text{m s}^{-1} \\ [\gamma] &= - \\ [\mu] &= \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

dove la portata volumetrica  $Q$  è stata sostituita dalla portata massica  $\dot{m}$ , e abbiamo aggiunto velocità del suono  $a_0$  e rapporto dei calori specifici  $\gamma$ .

Da considerazioni simili a quelle fatte precedentemente, posso dedurre che il problema

possa essere espresso mediante (8-3) gruppi adimensionali:

$$\frac{\Delta h_0}{\Omega^2 D^2} = G_1 \left( \frac{\dot{m}}{\rho \Omega D^3}, \frac{\rho_0 \Omega D}{\mu}, \frac{\Omega D}{a_0}, \gamma \right) \quad (8)$$

Nella precedente equazione,  $\frac{\dot{m}}{\rho \Omega D^3}$  rappresenta un coefficiente di flusso,  $\frac{\rho_0 \Omega D}{\mu}$  un numero di Reynolds,  $\frac{\Omega D}{a_0}$  un numero di Mach.

Analogamente:

$$\eta = G_2 \left( \frac{\dot{m}}{\rho \Omega D^3}, \frac{\rho_0 \Omega D}{\mu}, \frac{\Omega D}{a_0}, \gamma \right) \quad (9)$$

$$\frac{P}{\rho \Omega D^5} = G_3 \left( \frac{\dot{m}}{\rho \Omega D^3}, \frac{\rho_0 \Omega D}{\mu}, \frac{\Omega D}{a_0}, \gamma \right) \quad (10)$$

### 3 Scelta del Tipo di Turbomacchina

Riepiloghiamo:

$$\Phi = \frac{Q}{\Omega D^3} \text{ coefficiente di flusso} \quad (11)$$

$$\Psi = \frac{gH}{\Omega^2 D^2} \text{ coefficiente di carico} \quad (12)$$

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho \Omega^3 D^5} \text{ coefficiente di potenza} \quad (13)$$

I parametri adimensionali sono fondamentali, oltre che per l'analisi delle macchine in similitudine, per la scelta della macchina più adatta a un certo tipo di utilizzo. Per questo scopo sono molto utilizzati la velocità specifica (*specific speed* o *shape factor*), che si ottiene eliminando il diametro per mezzo delle relazioni di  $\Phi$  e  $\Psi$ :

$$\frac{Q}{\Omega D^3} \left( \frac{\Omega^2 D^2}{gH} \right)^{3/2} = \frac{Q}{gH^{3/2}} \Omega^2 = \frac{\Phi}{\Psi^{3/2}} \quad (14)$$

La velocità specifica si ottiene facendo la radice quadrata del parametro scritto in precedenza:

$$\Omega_S = \frac{P h^{1/2}}{\Psi^{3/2}} = \frac{Q^{1/2}}{gH^{3/4}} \Omega \quad (15)$$

Possiamo anche definire un diametro specifico, o *specific diameter*:

$$\frac{Q}{\Omega D^3} \left( \frac{\Omega^2 D^2}{gH} \right)^{1/2} = \frac{Q}{gH^{1/2}} \frac{1}{D^2} = \frac{\Phi}{\Psi^{1/2}} \quad (16)$$

$$D_S = \frac{gH^{1/4}}{Q^{1/2}} D = \frac{\Psi^{1/4}}{\Phi^{1/2}} \quad (17)$$

Soprattutto nelle turbine idrauliche viene spesso utilizzato un altro parametro adimensionale (*power specific speed*):

$$\frac{P}{\rho\Omega^3 D^5} \left(\frac{\Omega^2 D^2}{gH}\right)^{5/2} = \frac{P}{gH^{5/2}} \Omega^2 \quad (18)$$

Pertanto:

$$\Omega_{SP} = \frac{P^{1/2}}{gH^{5/4}} \Omega = \frac{\hat{P}^{1/2}}{\Psi^{5/4}} \quad (19)$$

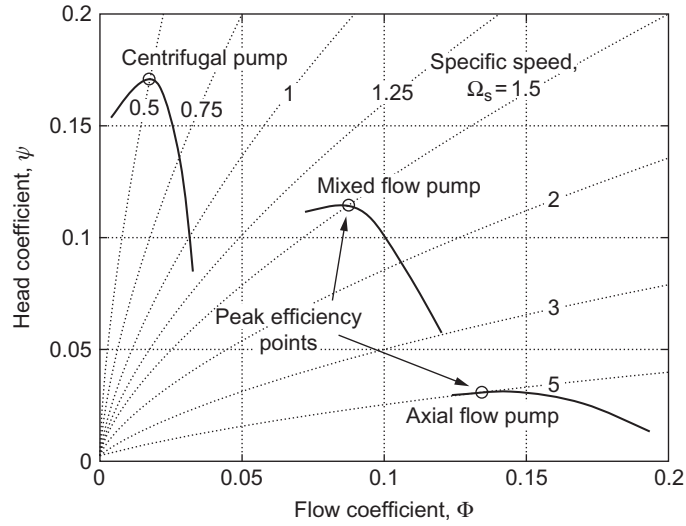


Figure 1: Contours of specific spee for various pumps

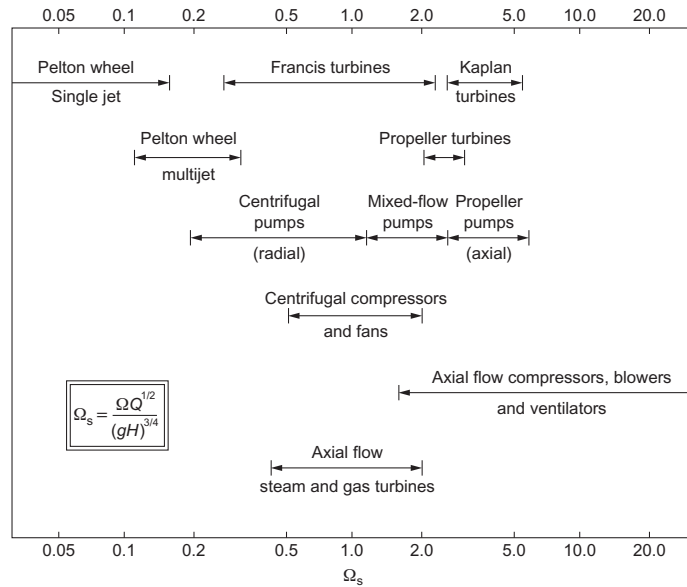


Figure 2: Range of specific speeds for various types of turbomachines (Dixon)

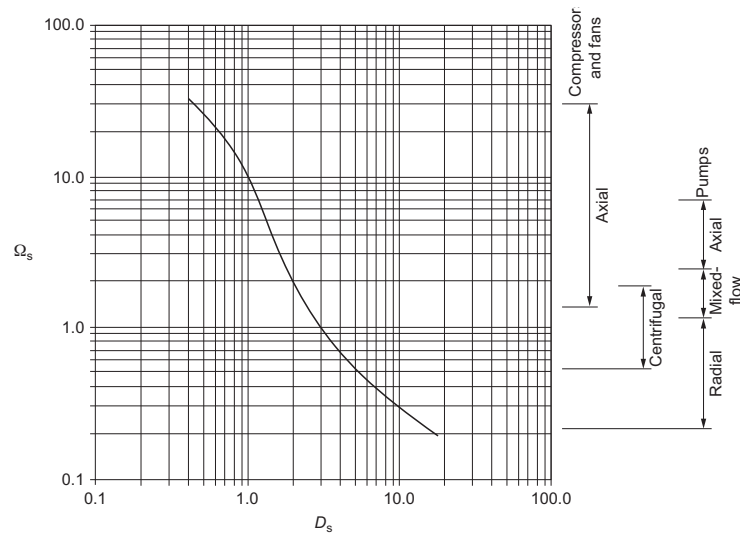


Figure 3: Cordier diagram for machine selection

## 4 Caratteristiche Geometriche

Le turbomacchine utilizzano pale in movimento per fornire o estrarre energia da un fluido. In una turbomacchina operatrice (per esempio un compressore) la parte rotorica precede quella statorica, in una turbomacchina motrice (una turbina) avviene il contrario.

Vediamo un po' di nomenclatura:

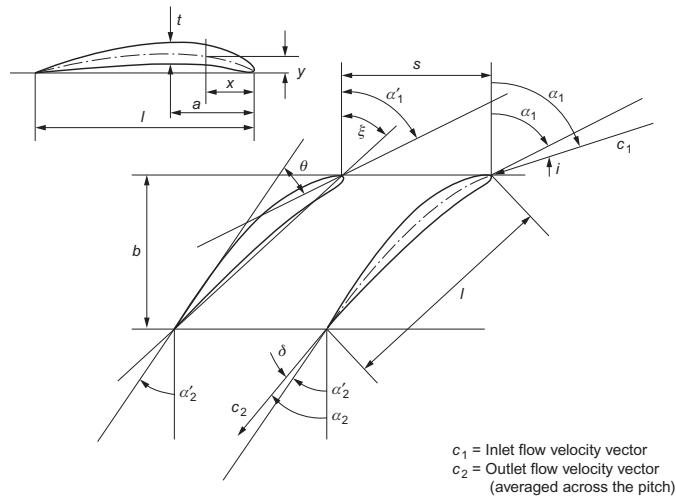


Figure 4: Caratteristiche geometriche di una schiera

- $c_1$ : velocità del flusso in ingresso (inlet flow velocity)
- $c_2$ : velocità del flusso in uscita (exit flow velocity)
- $\alpha_2$ : angolo del flusso (relativo) in uscita (flow exit angle)
- $\alpha_1$ : angolo del flusso (relativo) in ingresso (flow inlet angle)
- $\alpha_2$ : angolo del flusso (relativo) in uscita (flow exit angle)
- $\alpha'_1$ : angolo costruttivo in ingresso (blade inlet angle)
- $\alpha'_2$ : angolo costruttivo in uscita (blade exit angle)
- $l$ : corda (chord)
- $s$ : passo (pitch or spacing)
- $\sigma = l/s$ : solidità (solidity) o il suo reciproco  $s/l$  rapporto passo-corda o pitch-to-chord-ratio
- $t$ : spessore (thickness); spesso si usa il rapporto  $t/l$  (rapporto spessore-corda o thickness-to-chord ratio)
- $y$ : massima curvatura; spesso si usa il rapporto  $y/l$
- $x$ : punto di massima curvatura; spesso si usa il rapporto  $x/l$



- $a$ : punto di massimo spessore; spesso si usa il rapporto  $a/l$
- $\xi = (\alpha_1 + \alpha'_2)/2$ : angolo di calettamento (stagger)
- $\theta = (\alpha_1 - \alpha'_2)$ : angolo di curvatura (camber)
- $i = (\alpha_1 - \alpha_1)$ : angolo di incidenza (incidence)
- $\delta = (\alpha_2 - \alpha'_2)$ : angolo di deviazione (deviation)

In passato, le palettature di una turbomacchina venivano progettate utilizzando famiglie di profili standard, come le NACA serie 65 in America (NACA è l'acronimo di National Advisory Committee for Aeronautics), le serie C (C4) nel Regno Unito, o i profili biconvessi (double circular arc o DCA) per applicazioni con flussi con velocità più elevate.

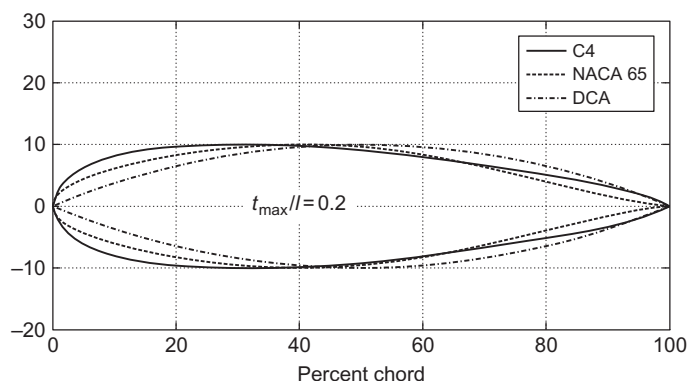


Figure 5: Confronto tra profili palari a uguale spessore (20% della corda): C4, NACA65 e DCA

Le distribuzioni di spessori definite da profili standard vengono quindi superimposte a linee medie (camber lines) costruite a partire dagli angoli costruttivi della pala ( $\alpha'_1$  e  $\alpha'_2$ ), utilizzando archi di circonferenza o leggi paraboliche. Lo spessore è tipicamente inferiore al 10% della corda, o anche meno per applicazioni ad alte velocità.

Con l'avvento dei metodi numerici, i profili standard vengono utilizzati sempre meno, soprattutto per le applicazioni in cui l'efficienza aerodinamica è fondamentale. Si usano perciò profili PVD (prescribed velocity distribution), in cui il progettista definisce il profilo di velocità desiderato, e il profilo viene calcolato numericamente, oppure profili ottenuti mediante altri metodi di ottimizzazione (bidimensionale o tridimensionale).

Nelle turbine la forma è meno importante che nei compressori (il flusso accelera in una turbina mentre decelera in un compressore, dove quindi è più facile che avvengano separazioni e quindi perdite).

## 5 Caratteristiche Aerodinamiche dei Profili

Il flusso a monte della schiera ha una velocità  $C_1$  e un angolo  $\alpha_1$ . Incontra la schiera con un'incidenza  $i = \alpha_1 - \alpha'_1$ . L'angolo del flusso in uscita sarà diverso dall'angolo costruttivo ( $\alpha_2 \neq \alpha'_2$ ) a causa della deflessione subita dal flusso  $\epsilon = \alpha_1 - \alpha_2$  e del gradiente di pressione avverso, che causano una separazione del flusso. Lo strato limite (una regione vicino alla parete in cui il flusso risente degli effetti viscosi) si forma sia sul lato in pressione che sul

lato in depressione (solitamente più pronunciato a causa del gradiente di pressione avverso. Inoltre ci possono essere perdite dovute a urti (shock) nel caso di flussi transonici, e alla loro interazione con lo strato limite.

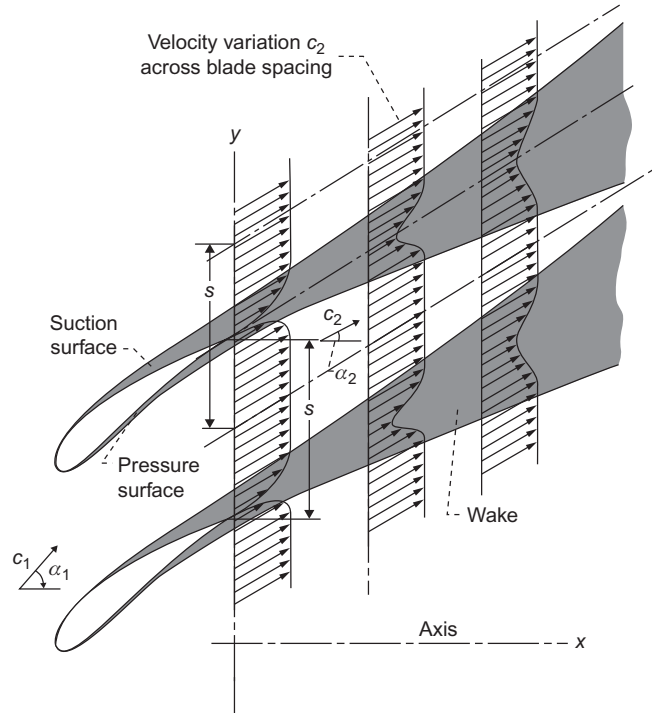


Figure 6: Strato limite e scia in una schiera

Il comportamento della schiera dipende, oltre che dalle sue caratteristiche geometriche (similitudine geometrica) anche da quelle del flusso (similitudine cinematica e dinamica) e quindi dall'angolo del flusso  $\alpha_1$  (o dall'incidenza  $i$ ) e dai numeri di Reynolds  $Re_1 = (\rho C_1 l) / \mu$  e dal numero di Mach  $M_1 = C_1 / a_1$ , dove  $a_1$  è la velocità del flusso in ingresso.

Per caratterizzare le prestazioni della schiera, ho bisogno di conoscere:

- angolo del flusso in uscita  $\alpha_2$ , o deviazione  $\delta$
- coefficiente di perdita di pressione totale (stagnation pressure loss coefficient)  $Y_P$

Entrambi saranno quindi funzione, per una data schiera, di:

$$\alpha_2, Y_P = f(i, M_1, Re_1) \quad (20)$$

Queste perdite sono dovute a:

1. perdite di profilo, dovute agli sforzi viscosi a parete (profile losses)
2. perdite dovute a separazioni o perdite di forma (shape losses)
3. perdite dovute a urti (shock losses)

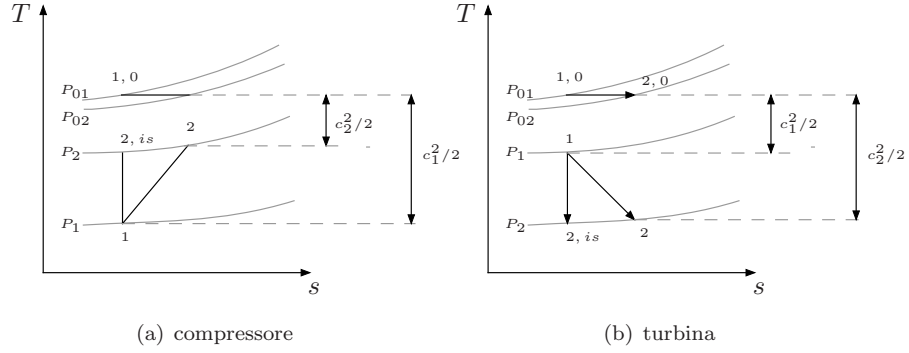


Figure 7: Diagrammi TS per compressore e turbina

In un compressore solitamente si definisce:

$$Y_P = \frac{P_{01} - P_{02}}{P_{01} - P_1} \quad (21)$$

In una turbina:

$$Y_P = \frac{P_{01} - P_{02}}{P_{01} - P_2} \quad (22)$$

Un modo alternativo di rappresentare le perdite di pressione è tramite l'energy loss coefficient  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{c_{2,is}^2 - c_2^2}{c_{2,is}^2} \quad (23)$$

dove:

$$\frac{1}{2}c_{2,is}^2 = h_{01} - h_{2,is} \quad (24)$$

Un altro parametro importante (perchè da questo dipende la capacità di realizzare effettivamente la palettatura che ci si è prefissati in fae di progetto) è il coefficiente di pressione statico (static pressure rise coefficient):

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{p_{01} - p_1} \quad (25)$$

Per un flusso incompressibile:

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho c_1^2} \quad (26)$$

Chiaramente le perdite di pressione non saranno distribuite uniformemente lungo il passo

palare (pitch) ma avranno un massimo in coincidenza con il bordo di fuga (trailing edge) della pala. Allo stesso modo, il flusso subirà una deviazione positiva (angoli maggiori) dalla parte dell'estradosso, una deviazione negativa (angoli minori) dalla parte dell'intradosso. I parametri di prestazione della schiera sono solitamente calcolati tramite una media sulla portata (mass-flow averaged).

$$Y_P = \int_0^s \frac{P_{01} - P_{02}}{P_{01} - P_1} \rho c_x dy / \int_0^s \rho c_x dy \quad (27)$$

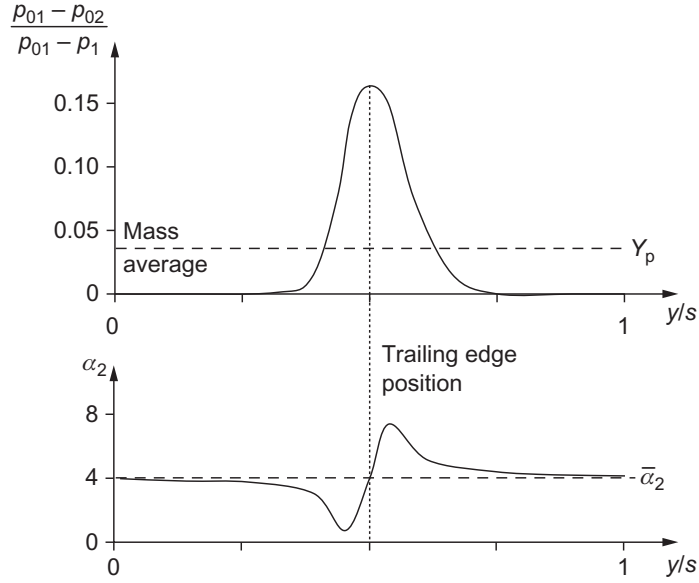


Figure 8: Distribuzione delle perdite e dell'angolo di flusso lungo il passo palare

## 6 Analisi delle Forze Aerodinamiche in una Schiera

Consideriamo la schiera in figura 9, il volume di controllo tratteggiato, e siano  $X$  e  $Y$  le forze che il profilo esercita sul flusso.

Consideriamo inoltre un flusso incomprimibile, per semplicità. In questo caso  $C_{1x} = C_{2x} = C_X$ . Scriviamo le equazioni della quantità di moto nelle direzioni  $x$  e  $y$ :

$$x : \quad (p_1 - p_2) * s + X = \rho c_{1x}^2 s - \rho c_{2x}^2 s = 0 \quad (28)$$

$$y : \quad \rho s c_x (c_{1y} - c_{2y}) = Y \quad (29)$$

$$x : \quad X = (p_2 - p_1) s \quad (30)$$

$$y : \quad Y = \rho s c_x (c_{1y} - c_{2y}) = \rho s c_x^2 (\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)) \quad (31)$$

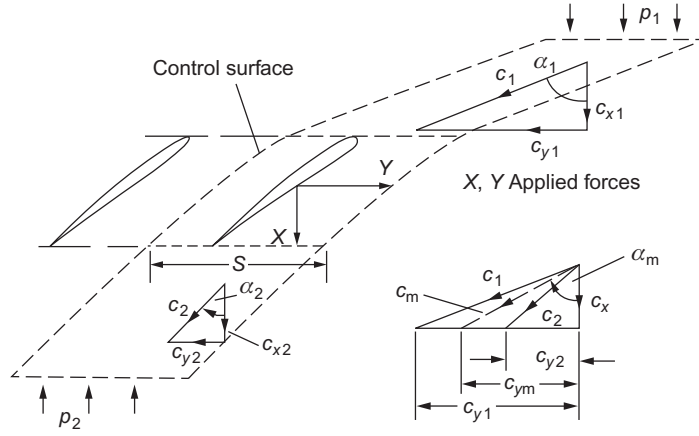


Figure 9: Forze aerodinamiche su una schiera

Scrivendo le forze  $X$  e  $Y$  in funzione di portanza e resistenza (lift e drag)  $L$  e  $D$ :

$$L = X \sin(\alpha_m) + Y \cos(\alpha_m) \quad (32)$$

$$D = -X \cos(\alpha_m) + Y \sin(\alpha_m) \quad (33)$$

dove:

$$\alpha_m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (34)$$

Pertanto, possiamo esprimere la resistenza  $D$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} D &= \cos(\alpha_m) (Y \tan(\alpha_m) - X) = \\ &= \cos(\alpha_m) (\rho s c_x^2 (\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)) (\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2)) / 2 - X) \\ &= \cos(\alpha_m) (\rho s c_x^2 (\tan^2(\alpha_1) - \tan^2(\alpha_2)) / 2 - X) = \\ &= \cos(\alpha_m) (\rho s (c_{1y}^2 - c_{2y}^2) / 2 - X) = \\ &= \cos(\alpha_m) (\rho s (c_{1y}^2 - c_{2y}^2) / 2 + (p_1 - p_2) s) = \\ &= \cos(\alpha_m) (p_{01} - p_{02}) s = \\ &= \cos(\alpha_m) \Delta p_0 s \end{aligned} \quad (35)$$

e la portanza  $L$  come:

$$\begin{aligned}
L &= X \sin(\alpha_m) + Y \cos(\alpha_m) = \\
& \sin(\alpha_m) (Y \tan(\alpha_m) - \Delta p_0 s) + Y \cos(\alpha_m) = \\
& \frac{1}{\cos(\alpha_m)} Y - s \Delta p_0 \sin(\alpha_m) = \\
& \rho c_x^2 \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{\cos(\alpha_m)} - s \Delta p_0 \sin(\alpha_m)
\end{aligned} \tag{36}$$

In termini di coefficienti adimensionali:

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho c_m^2 l} \tag{37}$$

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho c_m^2 l} \tag{38}$$

$$\zeta = \frac{\Delta p_0}{\frac{1}{2} \rho c_m^2} \tag{39}$$

Pertanto:

$$c_D = \frac{s \Delta p_0 \cos(\alpha_m)}{\frac{1}{2} \rho c_m^2 l} = \frac{s}{l} \zeta \cos(\alpha_m) = \frac{\zeta \cos(\alpha_m)}{\sigma} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
c_L &= \frac{\rho s c_x^2 \frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)}{\cos(\alpha_m)} - s \Delta p_0 \sin(\alpha_m)}{\frac{1}{2} \rho c_m^2 l} \\
&= 2 \frac{s}{l} \cos(\alpha_m) (\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)) - c_D \tan(\alpha_m)
\end{aligned} \tag{41}$$

Possiamo anche scrivere l'efficienza aerodinamica  $L/D$  come:

$$\frac{L}{D} = \frac{c_L}{c_D} = \frac{2}{\zeta} (\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)) - \tan(\alpha_m) \approx \frac{2}{\zeta} (\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)) \tag{42}$$

dove la precedente dipende dal fatto che il termine  $\tan(\alpha_m)$  è di solito trascurabile rispetto al termine che lo precede.

## 7 Legame tra Perdite e Efficienza

L'efficienza adiabatica in un compressore può essere scritta come ( $\eta_{tt}$  è l'efficienza "total to total"):

$$\eta_{tt} = \frac{W_{min}}{W} = \frac{\Delta H - T_{03} \Delta s}{\Delta H} \tag{43}$$

Nel rotore:

$$T_{01,rel}\Delta s_{rot} = -\frac{\Delta P_0}{\rho_{01,rel}} = \frac{P_{01,rel} - P_{02,rel}}{\rho_{01,rel}}$$

$$\Delta s_{rot} = R \frac{P_{01,rel} - P_{02,rel}}{P_{01,rel}} \quad (44)$$

Ricordando che:

$$Y_{P,rot} = \frac{P_{01,rel} - P_{02,rel}}{P_{01,rel} - P_{1,rel}} \quad (45)$$

$$\Delta s_{rot} = R \frac{P_{01,rel} - P_{1,rel}}{P_{01,rel}} Y_{P,rot} = R Y_{P,rot} \left(1 - \frac{P_{1,rel}}{P_{01,rel}}\right) \quad (46)$$

Analogamente per lo statore:

$$\Delta s_{st} = R Y_{P,st} \left(1 - \frac{P_2}{P_{02}}\right) \quad (47)$$

Pertanto:

$$\Delta s_{st} = 1 - \frac{RT_{03}}{c_p(T_{03} - T_{01})} \left( Y_{P,rot} \left(1 - \frac{P_{1,rel}}{P_{01,rel}}\right) + Y_{P,st} \left(1 - \frac{P_2}{P_{02}}\right) \right) =$$

$$= 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{T_{01}}{T_{03}}} \left( Y_{P,rot} \left(1 - \frac{P_{1,rel}}{P_{01,rel}}\right) + Y_{P,st} \left(1 - \frac{P_2}{P_{02}}\right) \right) \quad (48)$$

Possiamo distinguere le perdite di pressione in perdite bidimensionali (profilo, forma, urti, mescolamento in uscita) e perdite dovute a effetti tridimensionali (gioco di estremità, pareti per esempio).

## 8 Grado di Reazione

Consideriamo uno stadio di compressore assiale (formato da schiera rotorica e schiera statorica). I triangoli di velocità sono rappresentati in figura 10.

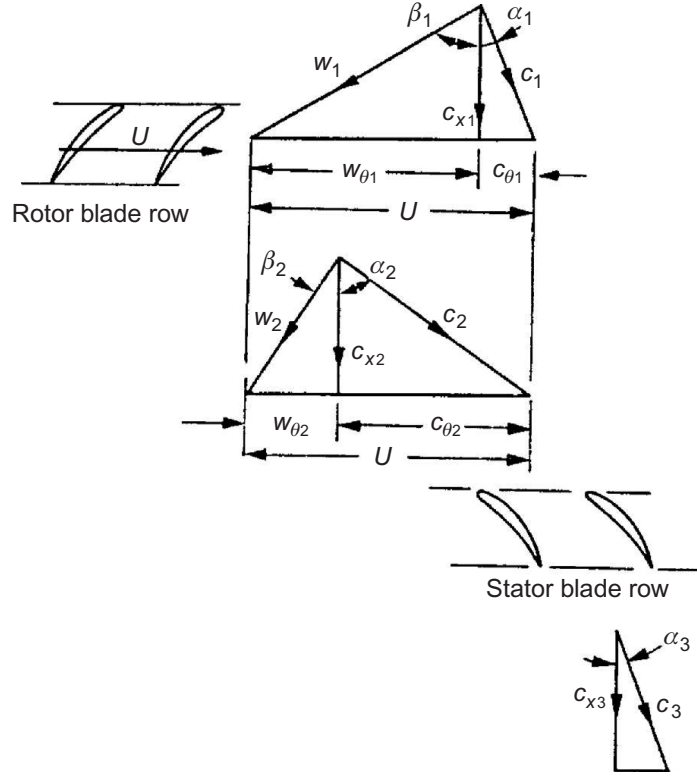


Figure 10: Triangoli di velocità in uno stadio di compressore assiale

Il grado di reazione è definito come il rapporto tra il salto entalpico che avviene nel rotore e il salto entalpico dello stadio:

$$R = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} \quad (49)$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= \overline{h_{02,rel} - h_{01,rel}} + \frac{1}{2}(w_{\theta 1}^2 - w_{\theta 2}^2) = \frac{1}{2}(w_{\theta 1}^2 - w_{\theta 2}^2) \\ h_3 - h_1 &= h_{03} - h_{01} + \frac{1}{2}(c_1^2 - c_3^2) \end{aligned} \quad (50)$$

Nell'ipotesi di stadio ripetitivo ( $c_3 = c_1$ ):

$$h_3 - h_1 = h_{03} - h_{01} = U(c_{\theta 2} - c_{\theta 1}) \quad (51)$$



Ritornando all'espressione del grado di reazione:

$$R = \frac{(w_{\theta 1}^2 - w_{\theta 2}^2)}{2U(c_{\theta 2} - c_{\theta 1})} = \frac{(w_{\theta 1} + w_{\theta 2})(\cancel{w_{\theta 1}} - \cancel{w_{\theta 2}})}{2U(\cancel{w_{\theta 1}} - \cancel{w_{\theta 2}})} = \frac{c_x}{2U}(\tan(\beta_1) + \tan(\beta_2)) = \frac{\Phi}{2}(\tan(\beta_1) + \tan(\beta_2)) \quad (52)$$

essendo  $\Phi = \frac{c_x}{U}$  il coefficiente di flusso.

Il grado di reazione può anche essere scritto in funzione degli angoli di flusso assoluti.

$$R = \frac{(w_{\theta 1} + w_{\theta 2})}{2U} = R = \frac{2U - c_{\theta 1} - c_{\theta 2}}{2U} = 1 - \frac{\Phi}{2}(\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2)) \quad (53)$$

oppure anche in una forma che ci aiuta a fare alcune considerazioni geometriche:

$$R = \frac{(w_{\theta 1} + w_{\theta 2})}{2U} = R = \frac{U - c_{\theta 1} + w_{\theta 2}}{2U} = \frac{1}{2} - \frac{\Phi}{2}(\tan(\alpha_1) - \tan(\beta_2)) \quad (54)$$

Vediamo 4 casi:

1.  $R = 0$ : significa che  $\beta_1 = -\beta_2$ . Non c'è aumento di entalpia statica nel rotore, che quindi ha solo la funzione di accelerare il flusso (assoluto), mentre quello relativo non decelera nè accelera. Ovviamente questo causa un aumento notevole del carico sullo statore, che dovrà trasformare questa entalpia totale in entalpia statica (o pressione cinetica in pressione statica).
2.  $R = 0.5$ :  $\alpha_1 = \beta_2$ . I triangoli di velocità in ingresso e in uscita dal rotore sono simmetrici.
3.  $R < 0.5$ :  $\alpha_1 > \beta_2$ . I triangoli di velocità sono spostati verso sinistra (vedi figura 11).
4.  $R > 0.5$ :  $\alpha_1 < \beta_2$ . I triangoli di velocità sono spostati verso destra (vedi figura 11).

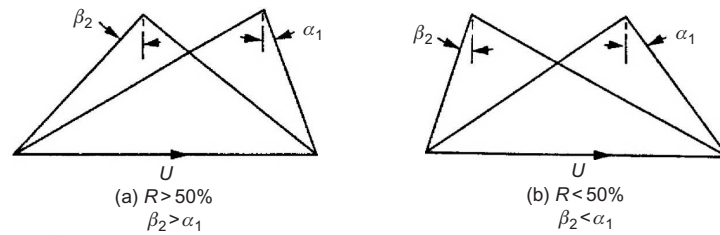


Figure 11: Triangoli di velocità e grado di reazione

## 9 Fattore di Carico

Il fattore di carico  $\Psi$  viene definito come:

$$\Psi = \frac{\Delta H}{U^2} \quad (55)$$

Ipotizzando flusso incomprimibile e componente assiale della velocità costante:

$$\Psi = \frac{C_{\theta 2} - C_{\theta 1}}{U} = \Phi(\tan(\alpha_2) - \tan(\alpha_1)) \quad (56)$$

ovvero, in funzione degli angoli del flusso relativo:

$$\Psi = \frac{w_{\theta 1} - w_{\theta 2}}{U} = \Phi(\tan(\beta_1) - \tan(\beta_2)) \quad (57)$$

Ricordando che

$$R = \frac{\Phi}{2}(\tan(\beta_1) + \tan(\beta_2)) \quad (58)$$

$$2R - \Phi \tan(\beta_1) = -\Psi + \Phi \tan(\beta_1) \quad (59)$$

ovvero:

$$2R + \Psi = 2\Phi \tan(\beta_1) = 2 \frac{w_{\theta 1}}{U} = 2 \frac{U - c_{\theta 1}}{U} = 2 - \frac{c_{\theta 1}}{U} = 2(1 - \Phi \tan(\alpha_1)) \quad (60)$$

Pertanto:

$$\Psi = 2(1 - R - \Phi \tan(\alpha_1)) \quad (61)$$

Quindi per diminuire il fattore di carico  $\Psi$  posso:

1. aumentare il grado di reazione  $R$  (quindi per esempio  $\beta_2$ , cosa che ovviamente incide sul  $\Delta H$ , e quindi sul rapporto di pressione)
2. aumentare il coefficiente di flusso  $\Phi$  (ottengo lo stesso  $\Delta H$ , ma con angoli di camber inferiori)
3. aumentare l'angolo di ingresso assoluto  $\alpha_1$  (anche in questo caso, a parità di grado di reazione  $R$ , diminuisce il  $\Delta H$ )

Tipicamente in un compressore assiale si trovano i seguenti valori:

1.  $0.5 < R < 0.8$
2.  $\Phi < 0.5$ : valori più alti permettono di avere compressori più compatti, a discapito di perdite maggiori
3.  $\Psi < 0.4$ : dopo questi valori le perdite aumentano bruscamente

4.  $1 < AR < 2$ : rapporto tra altezza di pala e corda
5.  $0.8 < \sigma < 1.2$  (solidità)
6. gap assiale 25% della corda assiale

## 10 Effetto dell'Incidenza e Perdite

In figura 13 è mostrato uno schema del flusso in una schiera in condizioni di progetto (a), con i corrispondenti valori del numero di Mach isentropico a parete (numero di Mach appena fuori dallo strato limite). La curvatura della pala genera una maggiore velocità sull'estradosso che sull'intradosso. Ciò corrisponde a una pressione maggiore sull'intradosso rispetto all'estradosso, ed è proprio questa differenza di pressione che consente la deviazione del flusso. Sul lato in depressione si genera un picco di velocità (o di depressione), e la fase di decelerazione successiva (gradiente di pressione positivo o avverso) e particolarmente critica in quanto (se eccessiva) può portare alla separazione del flusso con conseguente notevole aumento delle perdite.

Nel caso di incidenze positive (b), la curvatura imposta al flusso è maggiore, aumentano pertanto le differenze di pressione tra intradosso ed estradosso, e quindi anche il picco di velocità (o di depressione) e il gradiente di pressione avverso. Aumentando l'incidenza, aumentano i fattori appena menzionati e di conseguenza anche la possibilità di separazione.

Nel caso di incidenze negative, la curvatura diminuisce, e diminuiscono conseguentemente le differenze di pressione tra intradosso ed estradosso, picco di velocità (o depressione) e gradiente di pressione avverso. Diminuisce lo spessore di strato limite e quindi anche la possibilità di avere flussi separati. Chiaramente diminuendo progressivamente l'incidenza si può passare a situazioni in cui il gradiente negativo si trasferisce sull'intradosso della pala (con quindi anche possibilità di flussi separati sull'intradosso).

Tipicamente, una schiera ha un intervallo di incidenze nel quale le perdite sono accettabili. Per incidenze al di fuori di questo range, le perdite aumentano notevolmente tanto da rendere inefficiente il compressore. In figura 12 viene mostrato il tipico andamento delle perdite in funzione dell'angolo di incidenza. Tipicamente l'angolo di incidenza a cui le perdite sono minime (indicato con  $i_{ref}$  assume un valore negativo. Esiste una porzione del grafico per la quale le perdite si mantengono basse (quasi piatta), e al di fuori di questa le perdite aumentano bruscamente (convenzionalmente lo stallo avviene per valori del coefficiente di perdita pari a 2 volte quello minimo).

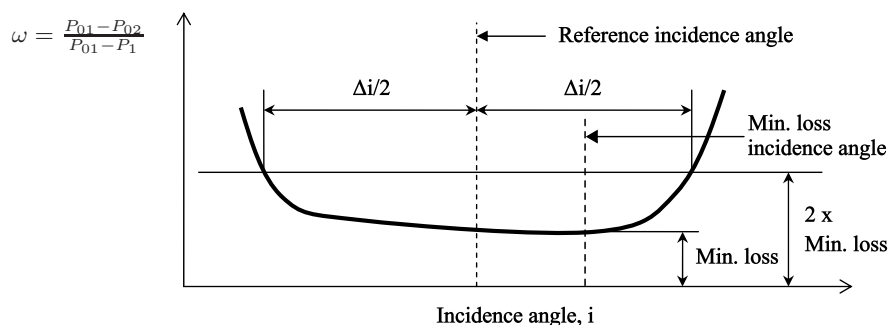


Figure 12: Effetto dell'incidenza sulle perdite

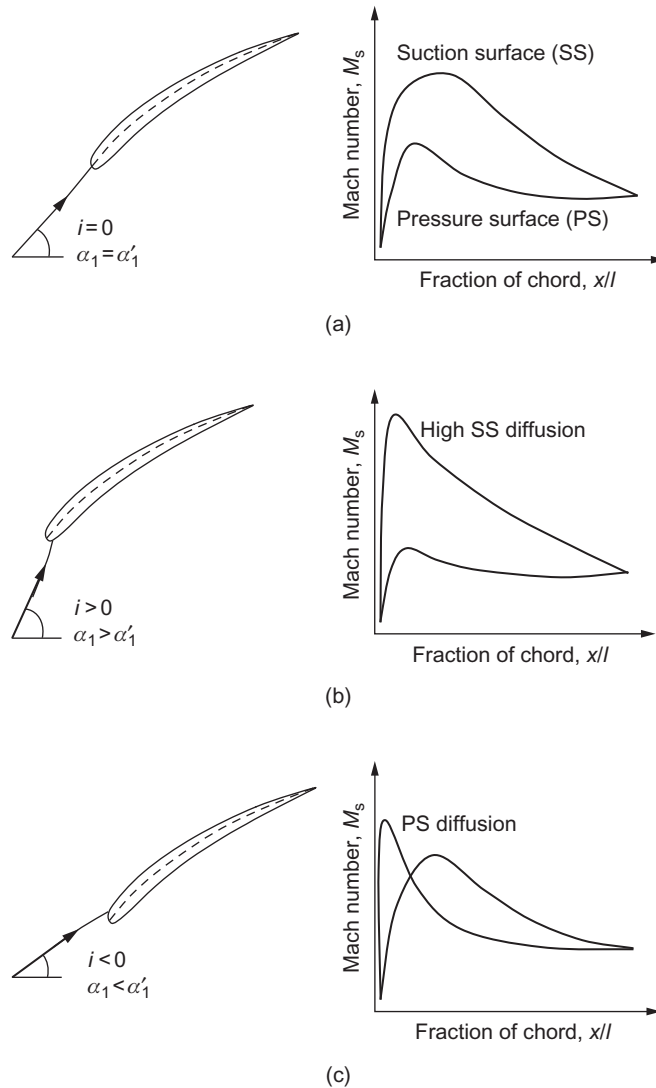


Figure 13: Effetto dell'incidenza su una schiera: (a) incidenza di progetto (b) incidenza positiva (c) incidenza negativa

## 11 Incidenza di Riferimento e Deviazione

Uno dei risultati principali dei lavori di Leiblein è stato la definizione di correlazioni per l'incidenza di riferimento  $i_{ref}$  (quella a cui le perdite sono minime) e per la deviazione di riferimento  $\delta_{ref}$  (quella che si verifica all'incidenza di riferimento). Queste correlazioni sono nella forma;

$$i_{ref} = i_0 + n\theta \quad (62)$$

dove  $i_0$  è l'incidenza di riferimento per una schiera con curvatura nulla ( $\theta = 0$ ),  $n$  è un coefficiente che rappresenta la pendenza della curva, e  $\theta$  è l'angolo di camber. L'incidenza di riferimento per schiere con curvatura nulla può essere ricavata tramite la seguente formula:

$$i_0 = (K_i)_{sh}(K_i)_{th}(i_0)_{10} \quad (63)$$

dove  $(i_0)_{10}$  è l'incidenza di riferimento per una schiera costruita con profili NACA65 a curvatura nulla ( $\theta = 0$ ) e di spessore pari al 10% della corda ( $t/c=0.1$ ), e  $(K_i)_{sh}$  e  $(K_i)_{th}$  sono due parametri correttivi per forma del profilo e spessore.

Analogamente, la deviazione  $\delta_{ref}$  può essere calcolata nel modo seguente:

$$\delta_{ref} = \delta_0 + m_2\theta = \delta_0 + m\theta\left(\frac{s}{l}\right)^b \quad (64)$$

- $\delta_{ref}$  è l'angolo di deviazione all'incidenza di riferimento
- $\delta_0$  è l'angolo di deviazione per una schiera costruita con profili NACA65 a curvatura nulla ( $\theta = 0$ )
- $\theta$  è l'angolo di curvatura (camber)
- $m$  e  $b$  sono fattori che dipendono dalla geometria (riportati dalle analisi di Leiblein)

L'angolo di deviazione per schiera costruita con profili NACA65 a curvatura nulla ( $\theta = 0$ ) può essere ricavato nel modo seguente

$$\delta_0 = (k_{sh})(k_{th})(\delta_0)_{10} \quad (65)$$

- $(\delta_0)_{10}$  è la deviazione per una pala di spessore pari al 10% della corda
- $(k_{sh})$  e  $(k_{th})$  sono fattori correttivi dovuti a forma (le relazioni sono ricavate per NACA65) e spessore

Il calcolo corretto dell'angolo di deviazione  $\delta$  è importante sia perchè un valore troppo elevato è indice di cattivo funzionamento (e quindi di perdite), ma anche perchè rappresenta la differenza tra angolo di flusso e angolo costruttivo (conoscere l'angolo di deviazione permette di imporre l'angolo costruttivo che produce l'angolo di flusso desiderato).

Un'altra relazione famosa è quella dovuta a Howell e Carter (1950), secondo cui la deviazione in condizioni nominali  $\delta^*$  è:

$$\delta^* = m\theta\left(\frac{s}{l}\right)^n \quad (66)$$

dove:

- $n$  è un fattore pari a 0.5 nei compressori, 1 per gli IGV (inlet guide vanes)
- $m = 0.25\left(\frac{2a}{l}\right)^2 + \frac{\alpha_2^*}{500}$  dipende dalle caratteristiche della pala
- $\frac{a}{l}$  è la distanza (come frazione della corda) del punto di massima curvatura della pala
- $\alpha_2^*$  è l'angolo di uscita del flusso in condizioni nominali

## 12 Come Limitare Separazione e Perdite?

Tipicamente le perdite sono quindi dovute alla separazione del flusso. La separazione a sua volta avviene a causa dell'eccessivo gradiente di pressione avverso. Di questo si accorse per la prima volta **LEIBLEIN, NASA** intorno al 1960. Le correlazioni di Leiblein sono basate su test per schiere a basso numero di Mach, principalmente con profili NACA65, poi estesi ad altri profili. Per limitare il gradiente di pressione avverso, Leiblein suggerì di limitare la decelerazione del flusso sul lato in deressione della pala. Definì perciò un fattore (il DIFFUSION FACTOR<sub>i</sub> DF) nel seguente modo:

$$DF = \frac{V_{max} - V_2}{V_{max}} \quad (67)$$

dove  $V_{max}$  è la velocità massima del flusso vicino al profilo (nel punto di massima depressione) e  $V_2$  è la velocità relativa all'uscita della schiera (vedi figura 14).

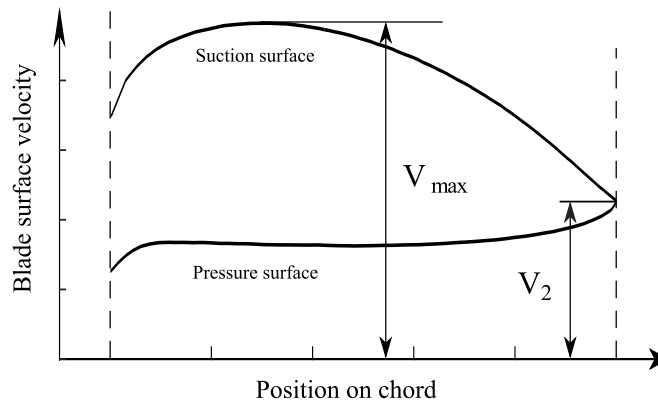


Figure 14: Andamento delle velocità sul profilo

Vista la difficoltà nel calcolare (o stimare) la velocità massima nella schiera, Leiblein sviluppò una correlazione basata sulle velocità misurate nelle schiere di NACA65 e (in misura minore) nelle C4 usate nel Regno Unito.

$$DF = \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + \frac{w_{\theta 2} - w_{\theta 1}}{2w_1} \frac{s}{l} \quad (68)$$

Nella precedente formula compaiono i seguenti termini:

- $\left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right)$  rappresenta la decelerazione del flusso
- $\frac{w_{\theta 2} - w_{\theta 1}}{2w_1}$  rappresenta la deflezione (turning) del flusso
- $\frac{s}{l}$  rappresenta l'inverso della solidità (il pitch-to-chord ratio)

Quindi il DF (che è una misura del carico palare) diminuisce se: (1) diminuisce la decelerazione, (2) diminuisce il turning, (3) aumenta la solidità. Significa che è più facile applicare lo stesso flow turning se la schiera ha una solidità maggiore, quindi un numero maggiore di pale ( $s$  minore) o una corda  $l$  maggiore.

Tipicamente, un flusso in una schiera separa per  $DF > 0.6$ . Una schiera in condizione di progetto ha tipicamente  $DF \approx 0.45$ . Nelle figure 15 e 16 sono riportati gli andamenti dello spessore di quantità di moto, adimensionalizzato con la corda (momentum thickness  $\theta^*$  on chord  $c$ ) per diversi profili.

Lo spessore di quantità di moto è definito come:

$$\theta^* = \int_0^\infty \frac{v}{v_e} \left(1 - \frac{v}{v_e}\right) dy \quad (69)$$

dove  $v_e$  è la velocità indisturbata, al di fuori dello strato limite.

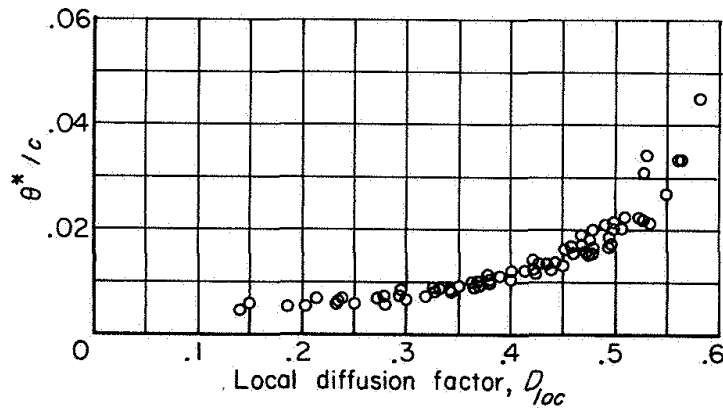


Figure 15: Relazione tra DF e spessore di quantità di moto  $\theta^*$  (per NACA65)

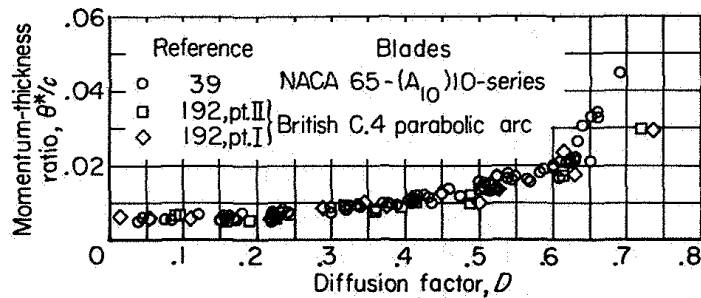


Figure 16: Relazione tra DF e spessore di quantità di moto  $\theta^*$  (vari profili)

Il legame tra  $\theta^*$  e le perdite può essere valutato nel seguente modo (ricordando che  $D = s\Delta P_0 \cos(\alpha_m)$ ), e scrivendo l'equazione di quantità di moto nella direzione del flusso:

$$s\Delta P_0 \cos(\alpha_m) = D = \rho v_2^2 \theta^* \quad (70)$$

Il coefficiente di perdita  $\omega$ , indicato in precedenza anche con  $Y_P$ :

$$\omega = \frac{\Delta P_0}{\frac{1}{2}\rho c_1^2} = \frac{\rho c_2^2 \theta^*}{s \cos(\alpha_m)} \frac{1}{\frac{1}{2}\rho c_1^2} = 2 \frac{\theta^* l}{l} \frac{1}{s \cos(\alpha_m)} \frac{c_2^2}{c_1^2} = 2 \frac{\theta^* l}{l} \frac{1}{s \cos(\alpha_m)} \left( \frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} \right)^2 \quad (71)$$

Un'altra misura del carico su una schiera E il numero di De Haller (dovuto a De Haller, intorno al 1953).

$$DH = \frac{c_2}{c_1} \geq 0.72 \quad (72)$$

Questa rappresenta una regola più semplice e meno efficace, in quanto per esempio non tiene conto della solidità, ma viene ancora spesso utilizzata nella progettazione preliminare.



## 13 Effetto del Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds è definito come:

$$Re = \frac{\rho V c}{\mu} \quad (73)$$

dove  $\rho$  è la densità,  $V$  la velocità del flusso,  $c$  la dimensione caratteristica del problema (per esempio la corda) e  $\mu$  la viscosità dinamica. Il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra forze inerziali e viscosi.

Non entreremo nel dettaglio sugli effetti del numero di Reynolds sulle prestazioni di profili (in schiera o non). Diremo però che all'aumentare relativa delle forze viscosi aumenta lo spessore (sempre in senso relativo) dello strato limite e quindi le perdite. A bassi numeri di Reynolds inoltre il flusso non è turbolento ma laminare, e ha una maggiore difficoltà a resistere a gradienti di pressione positivi (avversi) e tende quindi a separare per angoli di incidenza molto minori rispetto a quelli per cui separa ad alti numeri di Reynolds.

In figura la relazione tra perdite di pressione e numero di Reynolds per vari tipi di profilo.

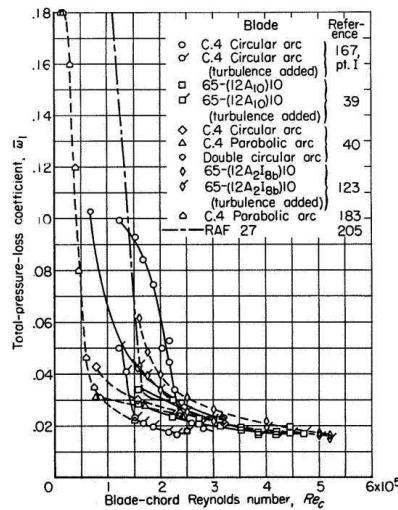


Figure 17: Influenza del Numero di Reynolds sul coefficiente di perdita di pressione

## 14 Effetto del Numero di Mach

Il numero di Mach è il rapporto tra la velocità del fluido e quella del suono:

$$M = \frac{V}{a} \quad (74)$$

dove

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)} = (\text{per un gas perfetto}) = \sqrt{\gamma RT} \quad (75)$$

Il numero di Mach è una misura della compressibilità di un gas. Agli alti numeri di Mach nelle zone ad alta velocità (e quindi bassa pressione) si verifica una diminuzione della densità, perciò la velocità deve essere maggiore rispetto al caso incompressibile (o a basso numero di Mach) in modo da compensare la perdita (relativa) di portata. L'aumento della velocità provoca un aumento delle perdite, che crescono prima gradualmente, poi in modo brusco quando ci si avvicina a un regime transonico ( $M \approx 1$ ) a causa della presenza di onde d'urto.

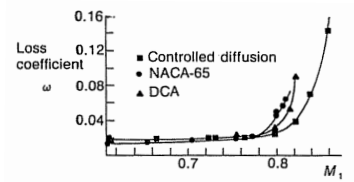


Figure 18: Influenza del numero di Mach sul coefficiente di perdita di pressione

Per gli stessi motivi, ad alti numeri di Mach il campo utile di incidenza si riduce (ad alte incidenze il picco di depressione sull'estradosso aumenta). Questi effetti sono mostrati in figura 19.

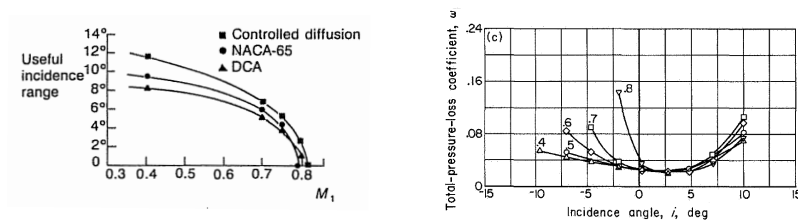


Figure 19: Influenza del numero di Mach sul campo utile di incidenze

## 15 Equilibrio Radiale

Consideriamo un elemento di fluido di profondità unitaria come in figura 21 (nella direzione assiale della macchina) e scriviamo l'equilibrio radiale (risultante delle forze di pressione uguale alla forza centrifuga).

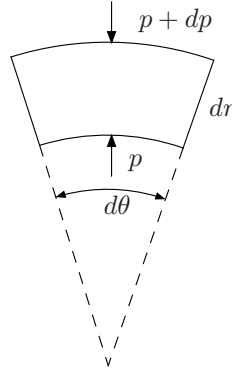


Figure 20: Equilibrio radiale

$$(p + dp)(r + dr)d\theta - prd\theta - (p + \frac{1}{2}dp)drd\theta = \rho r dr d\theta \frac{c_\theta^2}{r} \quad (76)$$

Sviluppando e trascurando i termini di ordine superiore:

$$p r d\theta + p dr d\theta + r dp d\theta - p r d\theta - p dr d\theta = \rho r dr d\theta \frac{c_\theta^2}{r} \quad (77)$$

$$r dp d\theta = \rho r dr d\theta \frac{c_\theta^2}{r} \quad (78)$$

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{c_\theta^2}{r} \quad (79)$$

Scriviamo l'entalpia come (equazione di Gibbs):

$$T \frac{ds}{dr} = \frac{dh}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (80)$$

Essendo:

$$h_0 = h + \frac{1}{2}(c_x^2 + c_\theta^2 + c_r^2) \quad (81)$$

dove è stata trascurata la componente radiale, ne consegue:

$$\frac{dh_0}{dr} - T \frac{ds}{dr} = \frac{c_\theta^2}{r} + c_x \frac{dc_x}{dr} + c_\theta \frac{dc_\theta}{dr} = c_x \frac{dc_x}{dr} + \frac{c_\theta}{r} \frac{d(c_\theta r)}{dr} \quad (82)$$

Se ipotizziamo che  $h_0$  e  $s$  siano costanti lungo il raggio:

$$c_x \frac{dc_x}{dr} + \frac{c_\theta}{r} \frac{d(c_\theta r)}{dr} = 0 \quad (83)$$

Se inoltre  $c_x = \text{cost}$ :

$$\frac{d(c_\theta r)}{dr} = 0 \rightarrow c_\theta r = \text{cost} = k \quad (84)$$

Questo tipo di progettazione radiale si chiama **vortice libero**.

### 15.1 Considerazioni: Lavoro e Grado di Reazione

Il lavoro per unità di massa è pari a:

$$W = U(c_{\theta 2} - c_{\theta 1}) = \Omega r \left( \frac{k_2}{r} - \frac{k_1}{r} \right) = \Omega (k_2 - k_1) = \text{cost}. \quad (85)$$

Quindi il lavoro è costante lungo il raggio nel caso di vortice libero.

$$\tan(\beta_1) = \frac{w_{\theta 1}}{c_x} = \frac{U - c_{\theta 1}}{c_x} = \frac{U - k_1/r}{c_x} = \frac{\Omega r - k_1/r}{c_x} \quad (86)$$

e analogamente:

$$\tan(\beta_2) = \frac{\Omega r - k_2/r}{c_x} \quad (87)$$

Per quanto riguarda il grado di Reazione:

$$\begin{aligned} R &= \frac{c_x}{2U} (\tan(\beta_1) + \tan(\beta_2)) = \frac{1}{2U} (\Omega r - k_1/r + \Omega r - k_2/r) = \\ &= 1 - \frac{1}{2Ur} (k_1 + k_2) = 1 - \frac{k_1 + k_2}{2\Omega r^2} = 1 - \frac{K}{r^2} \end{aligned} \quad (88)$$

Quindi il grado di Reazione cresce con il raggio (dalla radice verso l'apice).

Il coefficiente di carico  $\Psi$  è invece proporzionale all'inverso di  $r^2$ .

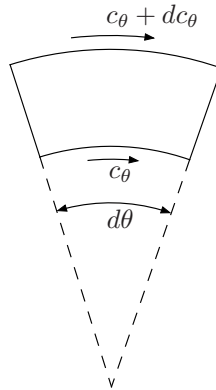


Figure 21: Circuitazione

## 15.2 Circuitazione

Calcoliamo la circuitazione  $d\Gamma$  per il volumetto in figura:

$$d\Gamma = -c_\theta r d\theta + (c_\theta + dc_\theta)(r + dr)d\theta = rdc_\theta d\theta + c_\theta dr d\theta = d(rc_\theta)d\theta \quad (89)$$

La vorticit   $\omega$    definita nel seguente modo:

$$\omega = \frac{d\Gamma}{dA} = \frac{d(rc_\theta)d\theta}{rdrd\theta} = \frac{d(rc_\theta)}{dr} \quad (90)$$

Quindi la progettazione a vortice libero   una progettazione a vorticit  nulla.

## References

- [1] S. Lieblein. Experimental Flows in Two-dimensional Cascades. Technical Report NASA SP-36, National Aeronautics and Space Administration (NASA), 1956.
- [2] S. Lieblein. Loss and Stall Analysis of Compressor Cascades. *ASME Journal of Basic Engineering*, 81:387–397, 1959.
- [3] S. Lieblein, F. C. Schwenk, and R. L. Broderick. Diffusion Factor for Estimating Losses and Limiting Blade Loadings in Axial-flow-compressor Blade Elements. Technical Report NACA RM E53D01, National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.
- [4] A. R. Howell and A. D. S. Carter. Fluid Flow Through Cascades of Airfoils. Technical Report R.6, National Gas Turbine Establishment, 1946.