

8 Esercizi

Esercizio 1

Calcolare $y'(x)$ di $y(x) = \sin(x)$ usando i seguenti metodi

1. Forward Euler
2. Backward Euler
3. Leapfrog (Punto Medio)
4. Schema Centrato del quarto ordine

Calcolare gli errori di troncamento e l'ordine di convergenza (ordine di discretizzazione) dei vari schemi.

Esercizio 2

Risolvere:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \lambda = 3, t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione esatta è $y(t) = e^{\lambda t}$

Risolvere con i seguenti approcci:

1. Forward Euler

$$u_{j+1} = u_j + \Delta t(\lambda u_j)$$

2. RK2

$$\begin{aligned} u_{j+1/2} &= u_j + \frac{\Delta t}{2}(\lambda u_j) \\ u_{j+1} &= u_j + \Delta t(\lambda u_{j+1/2}) \end{aligned}$$

3. AB2

$$u_{j+1} = u_j + \Delta t \lambda \left(\frac{3}{2} u_j - \frac{1}{2} u_{j-1} \right)$$

Calcolare l'errore e l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizio 3

$$\begin{cases} y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = q(t) \\ f(t) = 0.5, g(t) = 1, q(t) = 1, t \in [0, 30] \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione esatta è:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4g}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}}{2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{15}{16}}i = \alpha \pm \beta i$$
$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) + q$$

$$\begin{cases} c_1 + q = y(0) \\ \alpha c_1 + \beta c_2 = y'(0) \end{cases}$$

L'equazione che risolvo è

$$\begin{cases} v' = q - fv - gy \\ y' = v \end{cases}$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} y''(x) - y = x, x \in [0, 1] \\ y(0) = \alpha, y(1) = \beta \end{cases}$$

La soluzione esatta è ($\lambda = \pm 1$):

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - 1 = \beta \end{cases}$$

Esercizio 5

$$\begin{cases} y''(x) - y = x, & x \in [0, 1] \\ y'(0) = \sigma, & y(1) = \beta \end{cases}$$

La soluzione esatta è ($\lambda = \pm 1$):

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = \sigma + 1 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - 1 = \beta \end{cases}$$