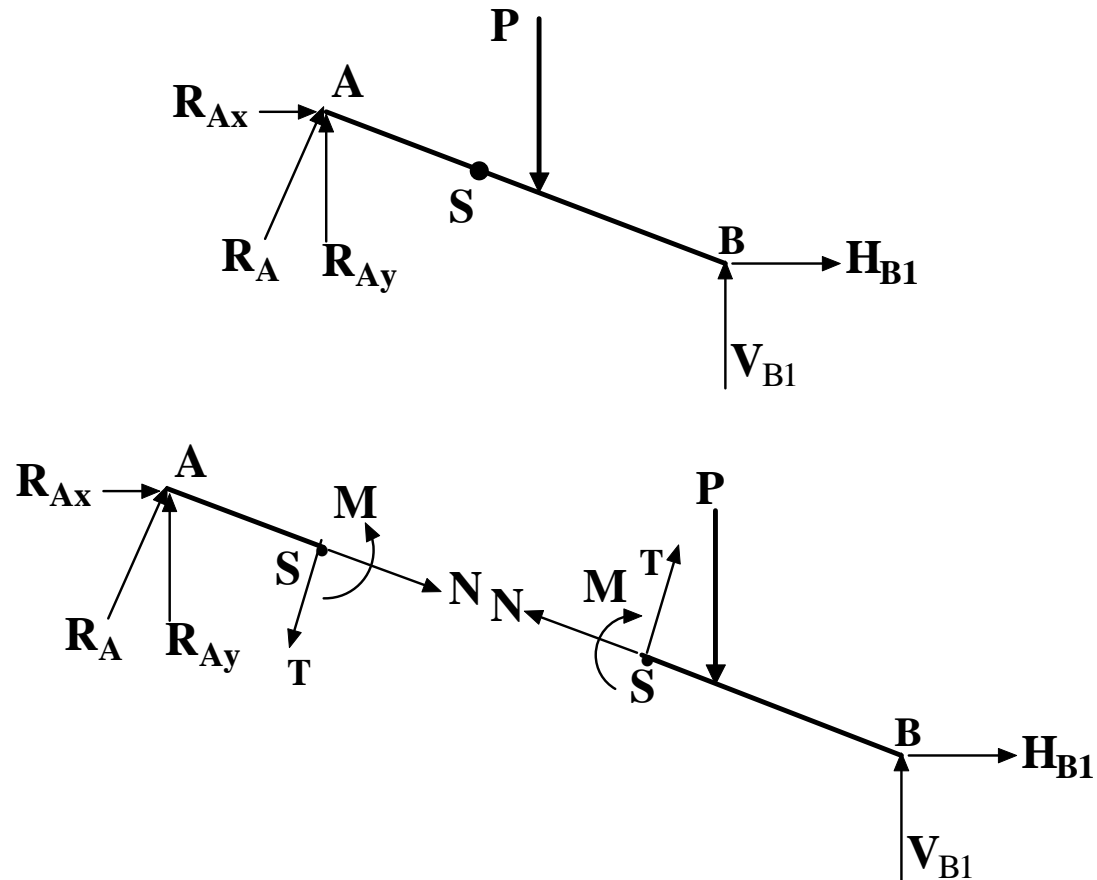


Azioni interne

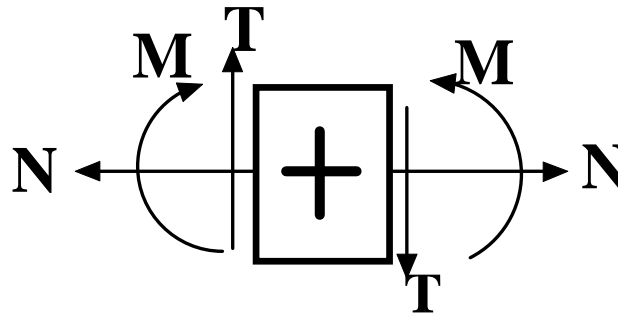
Definizione

- Se interrompiamo la continuità di un'asta, della quale sono note le azioni e le reazioni, per l'equilibrio, nella sezione effettuata, dobbiamo introdurre 3 "azioni interne" N , T , M , uguali e contrarie sui due spezzoni di asta
- N.B. La sezione S deve essere normale all'asse dell'asta



Definizione

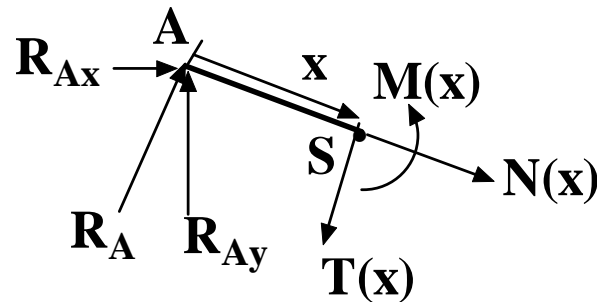
- Le azioni interne N e T sono definite nella direzione dell'asse e perpendicolarmente. Le convenzioni di segno che noi adottiamo sono le seguenti:



- N (Azione normale) positiva se uscente
- T (Azione di taglio) positiva se tende a far ruotare il concio in senso orario
- M (Momento flettente) positivo se tende le fibre inferiori

Considerazioni generali

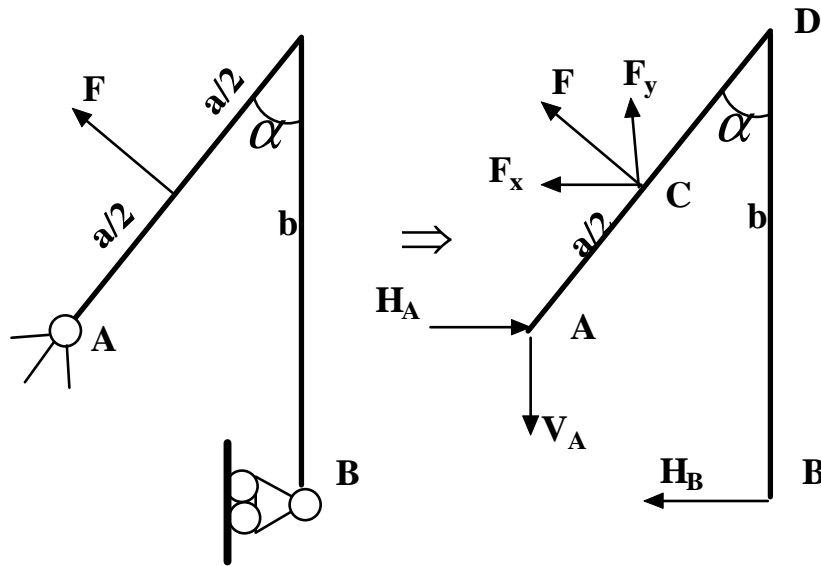
- Le azioni interne sono misurate in:
 - (N) Azione normale
 - (N) Azione di taglio
 - (Nmm) Momento flettente
- Sono dipendenti dalla posizione della sezione in cui si determinano. Dipendono quindi dalla coordinata x .
- Si possono determinare, ottenendo gli stessi valori assoluti, sullo spezzone di sinistra o su quello di destra



Determinazione

- Le AI si determinano con le condizioni di equilibrio dello spezzone di asta.
- Nell'esempio di prima:
 - $N(x)=0$
 - $T(x)=R_A$
 - $M(x)= R_A x$

Esempio 1 - Reazioni



dati:

$$F = 1 \text{ kN} \quad a = 1000 \text{ mm} \quad b = 1400 \text{ mm}$$

$$\alpha = 33^\circ$$

$$F_x = F \cos \alpha = 581,2 \text{ N}; \quad F_y = F \sin \alpha = 813,7 \text{ N}$$

Risultati:

$$H_B = 610,6 \text{ N}$$

$$V_A = 813,7 \text{ N}$$

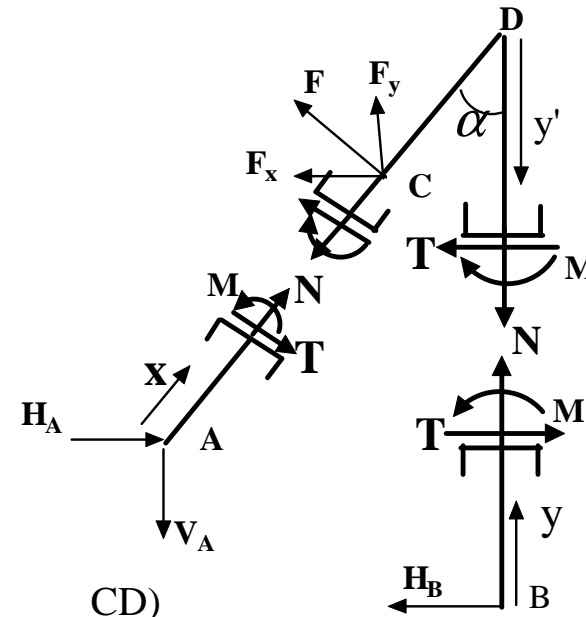
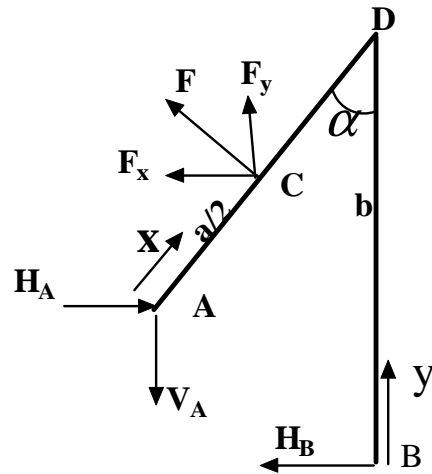
$$H_A = 1192 \text{ N}$$

$$\rightarrow) -F_x + H_A - H_B = 0$$

$$\uparrow) -V_A + F_y = 0$$

$$A \curvearrowright) F_x \frac{a}{2} \cos \alpha + F_y \frac{a}{2} \sin \alpha - H_B (b - a \cos \alpha) = 0$$

Esempio 1 – Azioni interne



AC) (fig. destra)

$$N = -H_A \sin \alpha + V_A \cos \alpha = -497,0N$$

$$T = -H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha = -1355N$$

$$M = -(H_A \cos \alpha + V_A \sin \alpha)x = -1355x$$

Nmm

CD)

$$N = -H_A \sin \alpha + V_A \cos \alpha = -497,0N$$

$$T = -H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha + F = -355N$$

$$M = -(H_A \cos \alpha + V_A \sin \alpha)x + F(x - \frac{a}{2}) = -1355x + 1000(x - 500)(Nmm)$$

BD)

$$N = 0$$

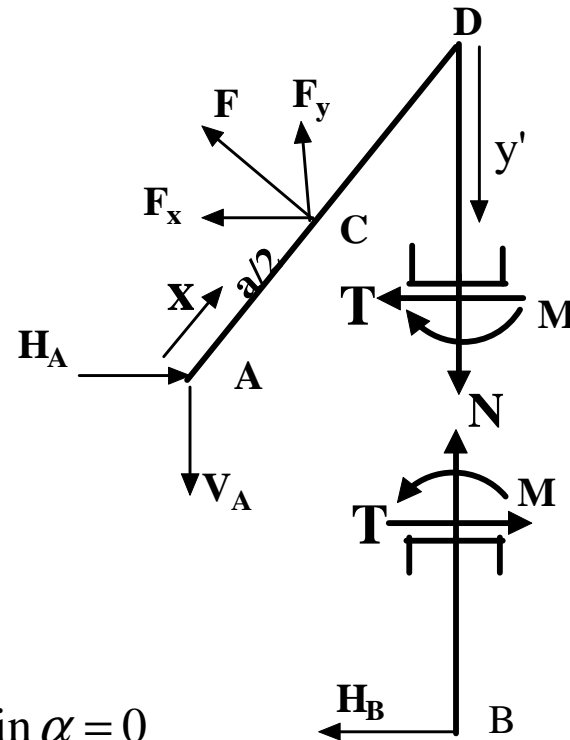
$$T = H_B = 890,8N$$

$$M = H_B y = 890,8y(Nmm)$$

Commenti

- Nei punti in cui c'è una forza concentrata, come C, ci può essere discontinuità dell'azione normale N (non però in questo caso) e del taglio T ma non del momento flettente M. In C:
 $T(500^-) = -1355\text{N}$; $T(500^+) = -355\text{N}$;
- In assenza di coppie concentrate il momento flettente risulta continuo ovunque. In B si ha:
 $M_{CD}(1000) = M_{BD}(1400) = -855.000\text{Nmm}$
- N.B. per calcolare le azioni interne in una sezione bisogna tener conto di **tutte** le forze e reazioni presenti nel tronco di sinistra (o di destra)

Esempio 1 – Azioni interne in DB partendo da D (considerando le forze in A e in C)



DB)

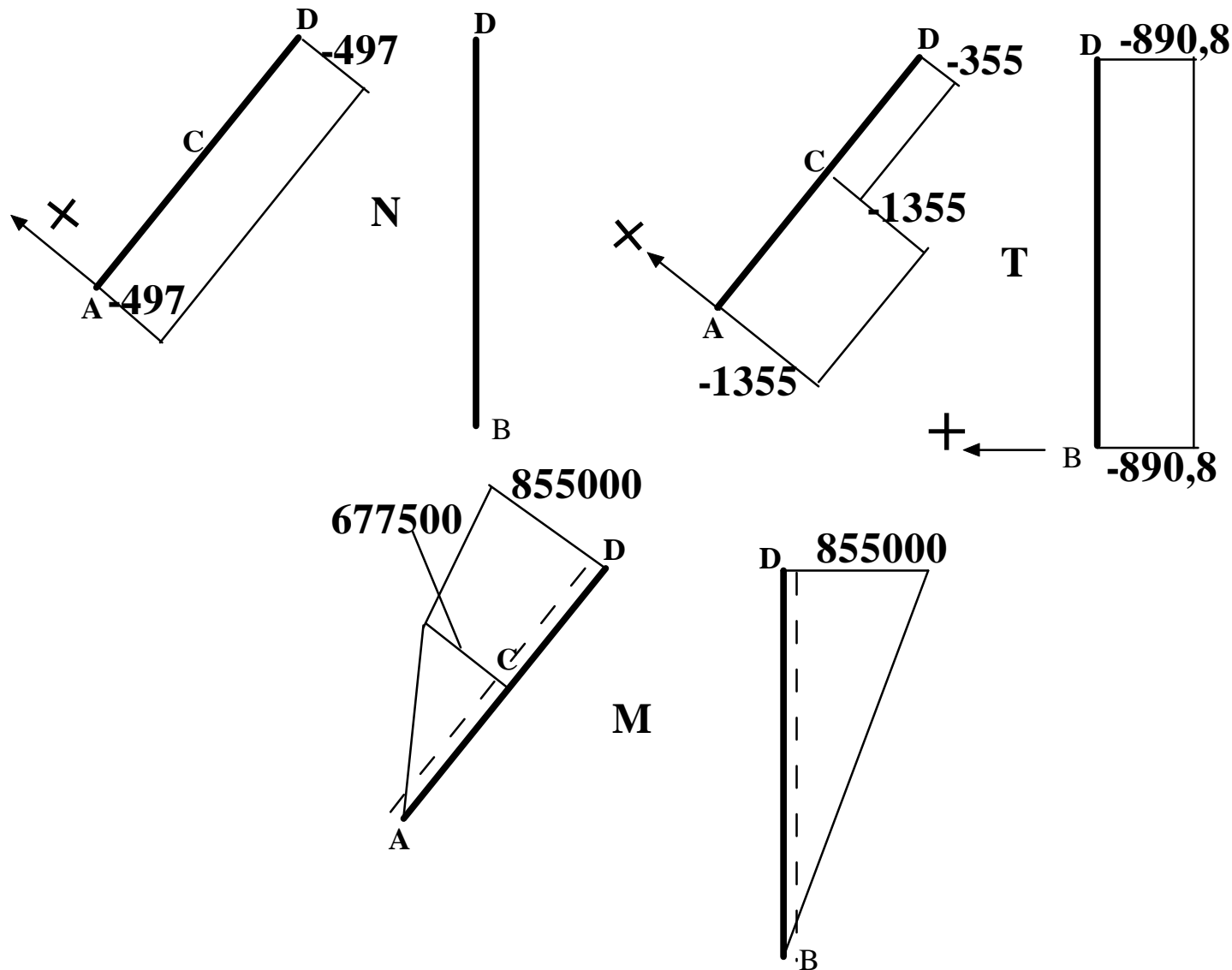
$$N = V_A - F \sin \alpha = 0$$

$$T = H_A - F \cos \alpha = 610,8N$$

$$M = -H_A (c \cos \alpha - y') - V_A c \sin \alpha + F_x (y' - \frac{c}{2} \cos \alpha) -$$

$$+ F_y \frac{c}{2} \sin \alpha = -855000 + 610,8y'$$

Esempio 1 – Rappresentazione azioni interne

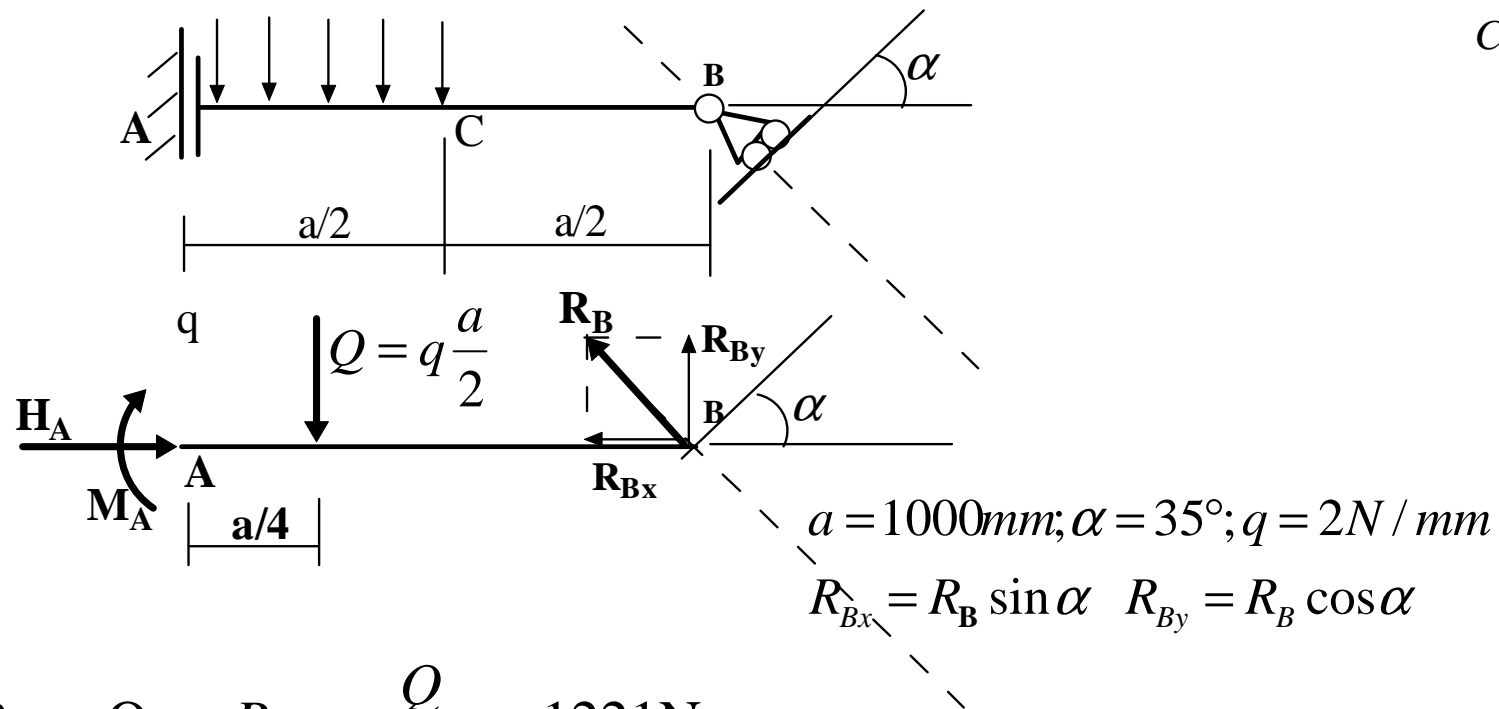


Esempio 1 – Rappresentazione azioni interne

- Le regole da seguire sono:
 - Indicare preliminarmente le convenzioni di segno dei diagrammi
 - Riportare le Azioni normali dalla parte positiva del grafico se di trazione
 - Momento flettente **dalla parte delle fibre tese**
 - All'inizio e alla fine di ogni tratto indicare il valore numerico
 - N.B. Tratti contigui **devono** avere uguali valori del momento flettente (se non ci sono coppie concentrate)

Esempio 2 – Reazioni vincolari

CB)

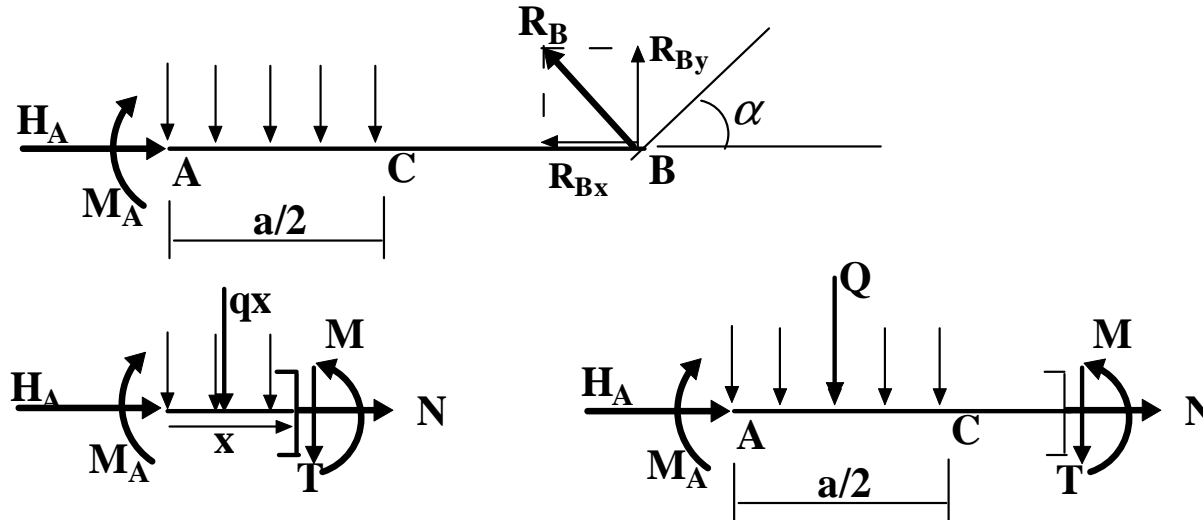


$$R_{By} = Q \rightarrow R_B = \frac{Q}{\cos \alpha} = 1221 \text{ N}$$

$$H_A = R_{Bx} = Q \tan \alpha = 700,2 \text{ N}$$

$$M_A = -Q \frac{a}{4} + R_{By} a = Q \frac{3a}{4} = 750000 \text{ Nmm}$$

Esempio 2 – Azioni interne



AC)

$$H_A + N = 0 \rightarrow N = -H_A = -700,2N$$

$$-qx - T = 0 \rightarrow T = -qx = -2x$$

$$-M_A + qx \frac{x}{2} + M = 0 \rightarrow M = M_A - q \frac{x^2}{2} = 750000 - x^2$$

CB)

$$H_A + N = 0 \rightarrow N = -H_A = -700,2N$$

$$-Q - T = 0 \rightarrow T = -Q = -1000N$$

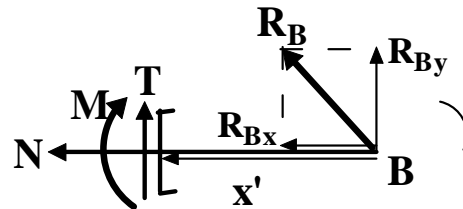
$$-M_A + Q(x - \frac{a}{4}) + M = 0 \rightarrow M = M_A - Q(x - \frac{a}{4}) = 1.000.0000 - 1000x$$

oppure: BC)

$$N = -R_{Bx}$$

$$T = -R_{By}$$

$$M = R_{By} \cdot x'$$



Esempio 2 – Diagrammi azioni interne

- Calcolo preliminarmente i valori significativi:

AC)

$$T(500) = -1000N;$$

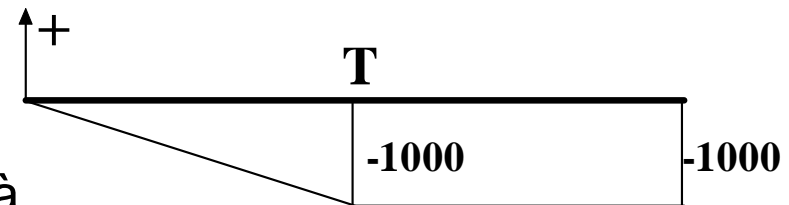
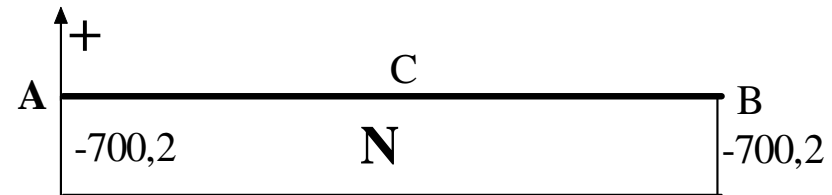
$$M(250) = 687500Nmm;$$

$$M(500) = 500000Nmm$$

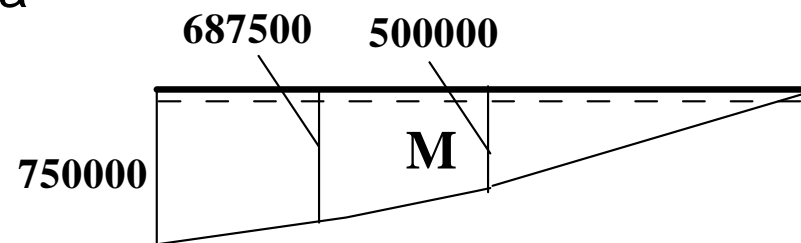
CB)

$$M(500) = 500000Nmm$$

$$M(1000) = 0$$

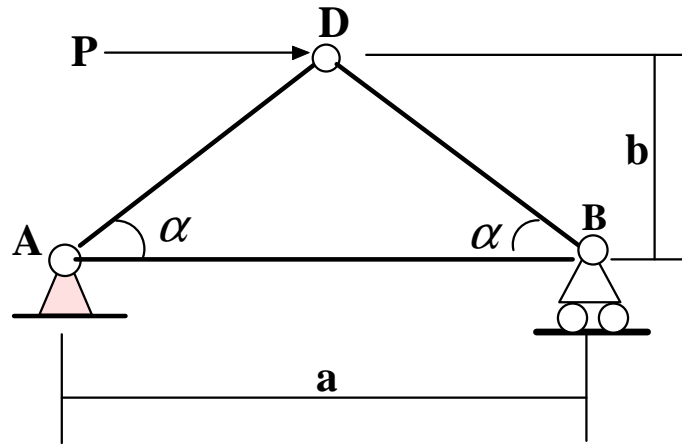


- Essendo $T = \frac{dM}{dx}$ dove c'è continuità di T c'è anche continuità della derivata di M (es. in C)



Esempio 3 – Struttura reticolare

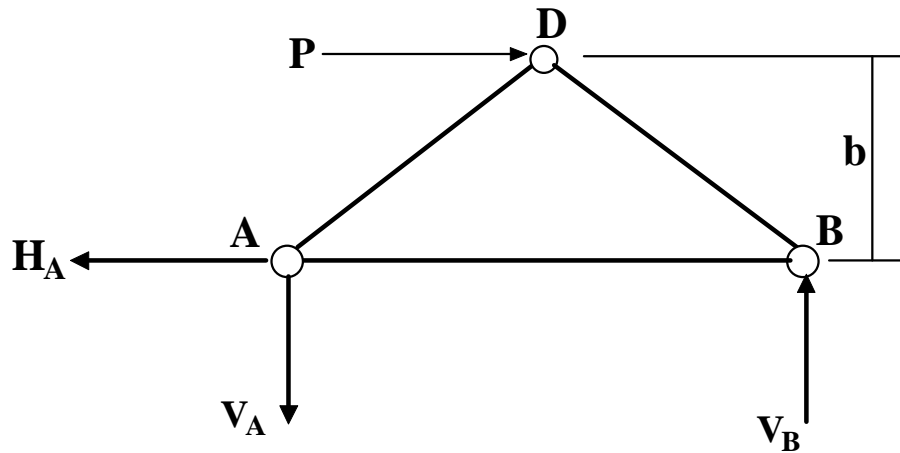
Reazioni vincolari a terra



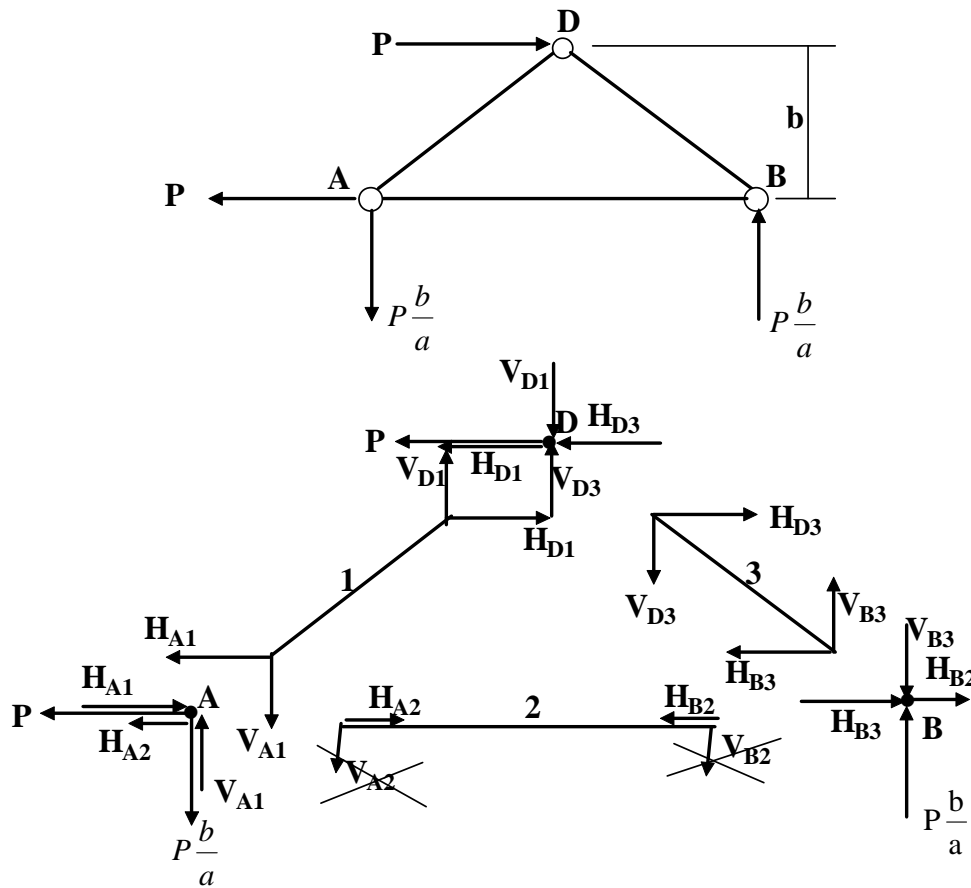
$$\rightarrow) H_A = P$$

$$\uparrow) V_A = V_B$$

$$B \quad V_A a = P b \rightarrow V_A = P \frac{b}{a}$$



Esempio 3 – Reazioni interne



Equilibrio asta 1:

$$H_{A1} = H_{D1}$$

$$V_{A1} = V_{D1}$$

$$\frac{V_{A1}}{H_{A1}} = \frac{2b}{a}$$

Eq. nodo A:

$$H_{A1} - H_{A2} = P$$

$$V_{A1} = P \frac{b}{a}$$

si ottiene:

$$H_{A1} = \frac{P}{2} = H_{D1} = H_{D3} = H_{B3}; V_{A1} = P \frac{b}{a} = V_{D1} = V_{D3} = V_{B3};$$

$$V_{A2} = 0; H_{A2} = H_{B2} = -\frac{P}{2};$$

Eq. asta 2:

$$H_{A2} = H_{B2}$$

$$V_{A2} = 0$$

Nodo B

$$H_{B3} + H_{B2} = 0$$

$$V_{B3} = P \frac{b}{a}$$

Eq. asta 3

$$H_{B3} = H_{D3}$$

$$V_{B3} = V_{D3}$$

$$\frac{V_{B3}}{H_{B3}} = \frac{2b}{a}$$

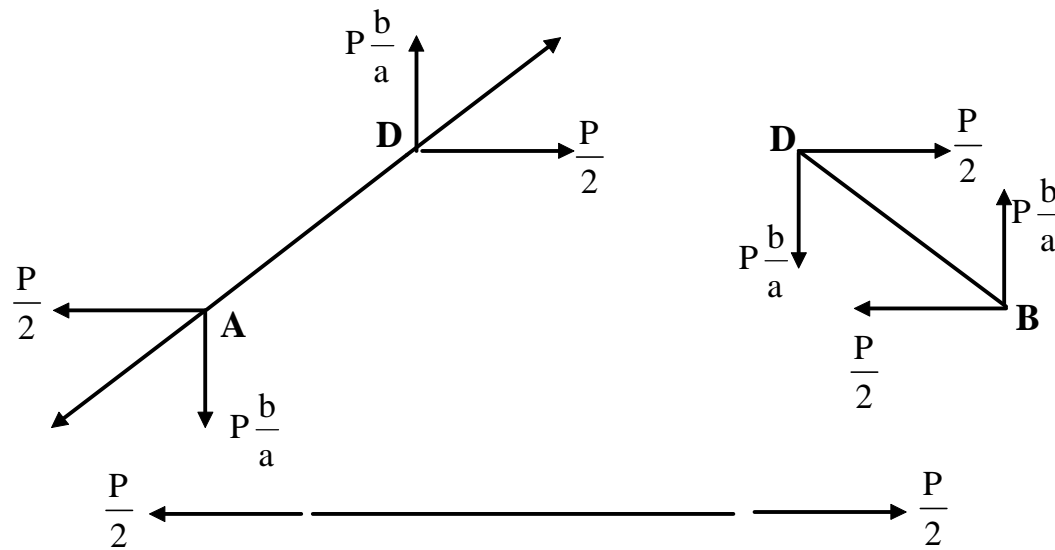
Nodo D

$$H_{D1} + H_{D3} = -P$$

$$V_{D1} = V_{D3}$$

Esempio 3 – Azioni interne

$a = 1200 \text{ mm}$ $b = 500 \text{ mm}$



AD)

$$N = \sqrt{\left(P \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2}\right)^2} = 0,651P$$

DB)

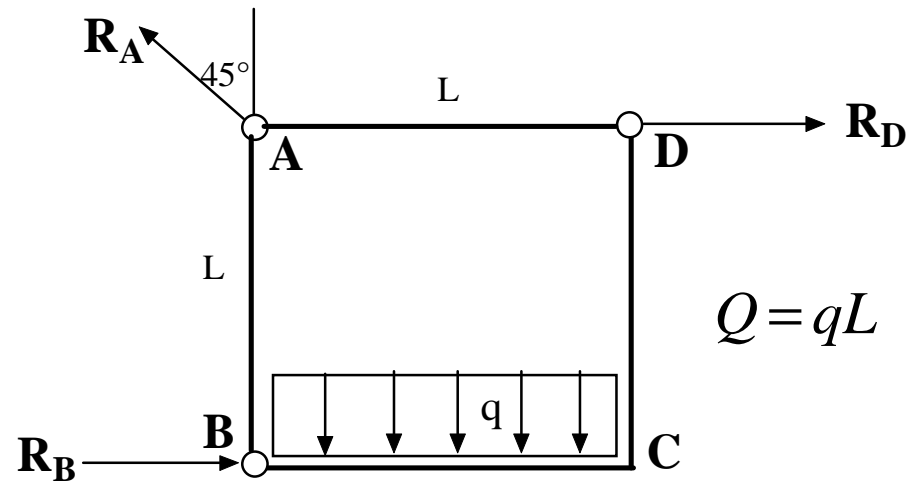
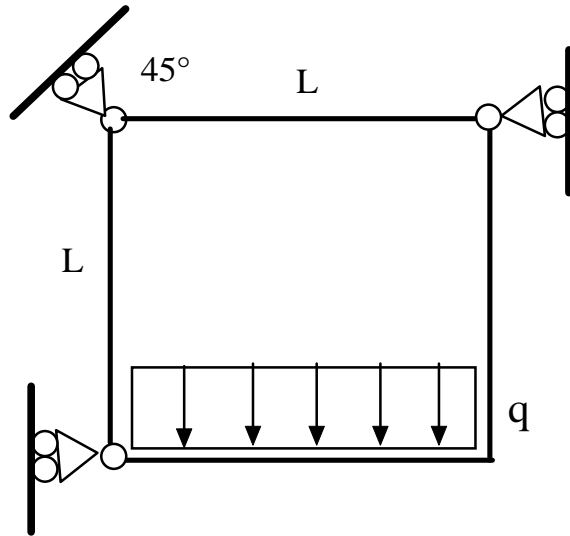
$$N = -0,651P$$

AB)

$$N = 0,5P$$

Esempio 4

Reazioni vincolari



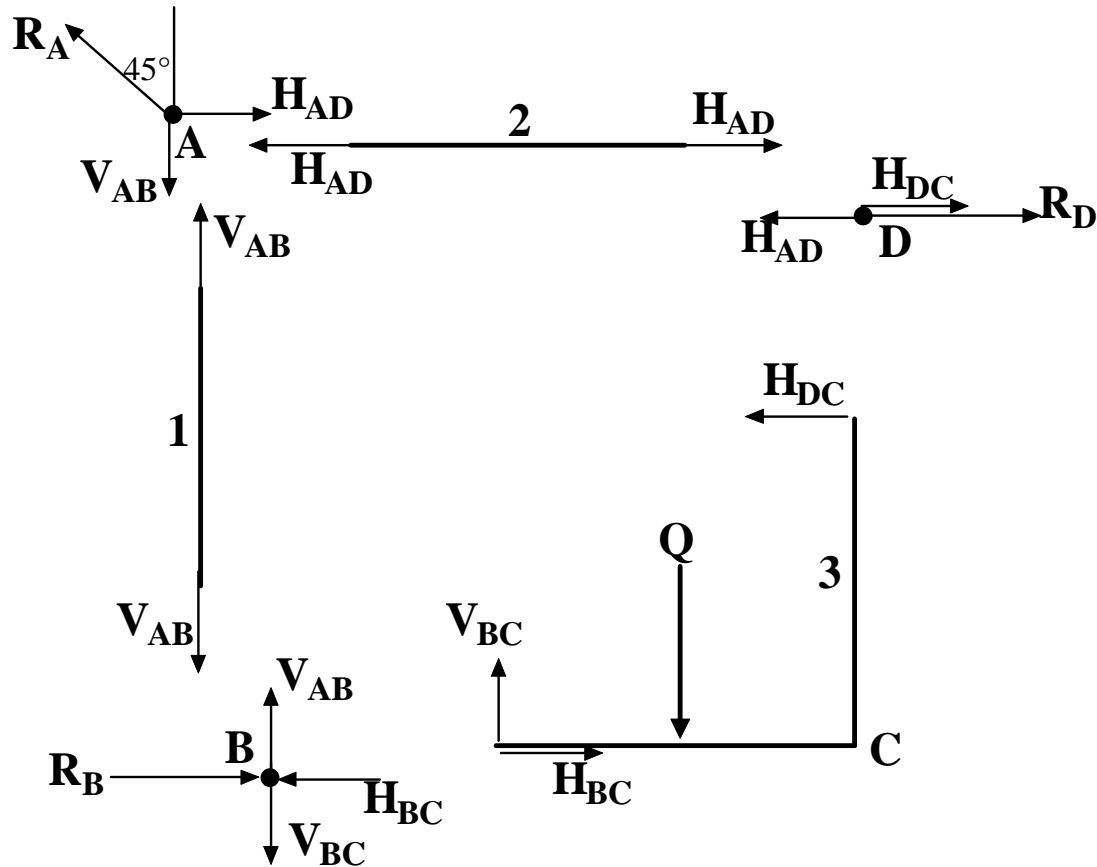
$$R_A = \sqrt{2}Q$$

$$R_B = \frac{Q}{2}$$

$$R_D = \frac{Q}{2}$$

Esempio 4

Reazioni interne



$$H_{AD} = \frac{R_A}{\sqrt{2}} = Q$$

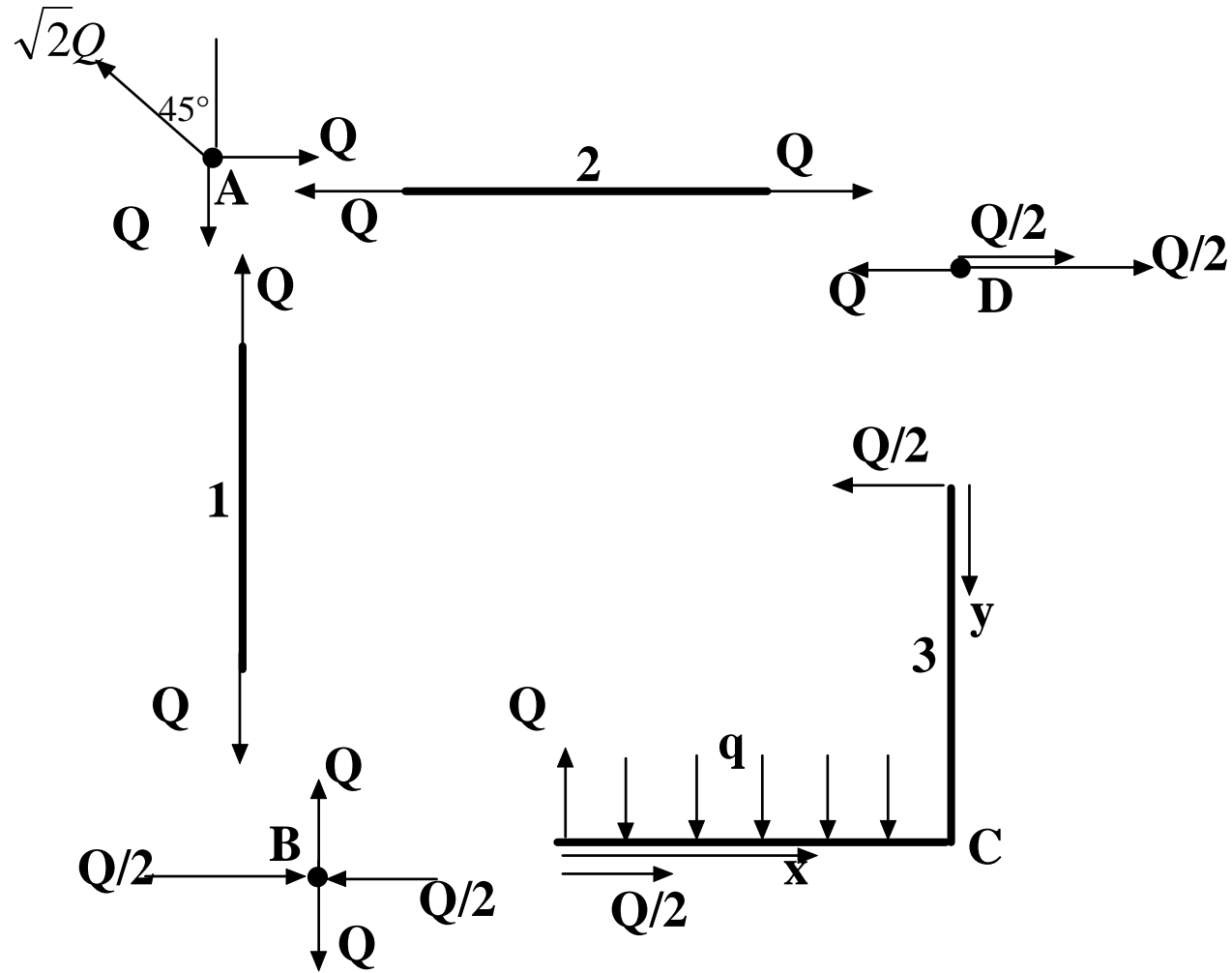
$$H_{DC} = -R_D + H_{AD} = \frac{Q}{2}$$

$$H_{BC} = R_B = \frac{Q}{2}$$

$$V_{AB} = V_{BC} = Q$$

Esempio 4

Reazioni interne



Esempio 4

Azioni interne

AB)

$$N = Q$$

$$T = M = 0$$

BC)

$$N = -\frac{Q}{2}$$

$$T = Q - qx$$

$$M = Qx - q\frac{x^2}{2}$$

DC)

$$N = 0$$

$$T = -\frac{Q}{2}$$

$$M = \frac{Q}{2}y$$

AD)

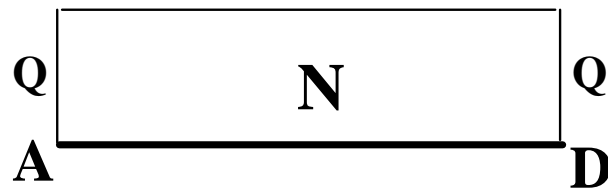
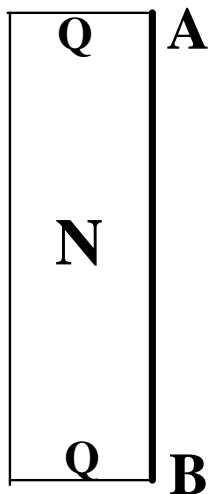
$$N = Q$$

$$T = M = 0$$

N.B. $M_{BC}(L) = M_{DC}(L) = Q\frac{L}{2}$

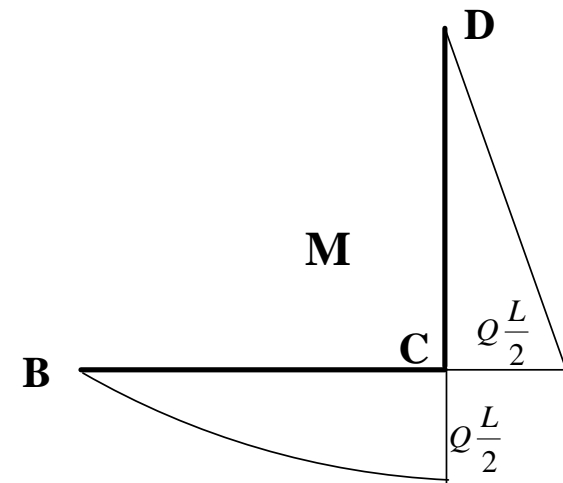
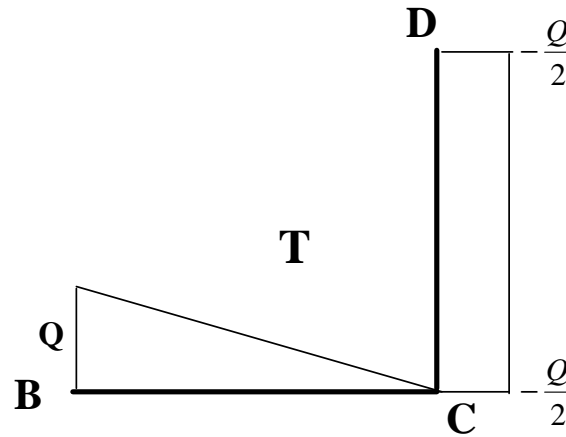
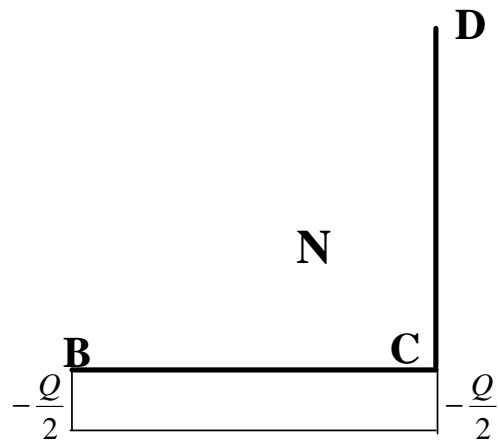
Esempio 4

Diagrammi azioni interne



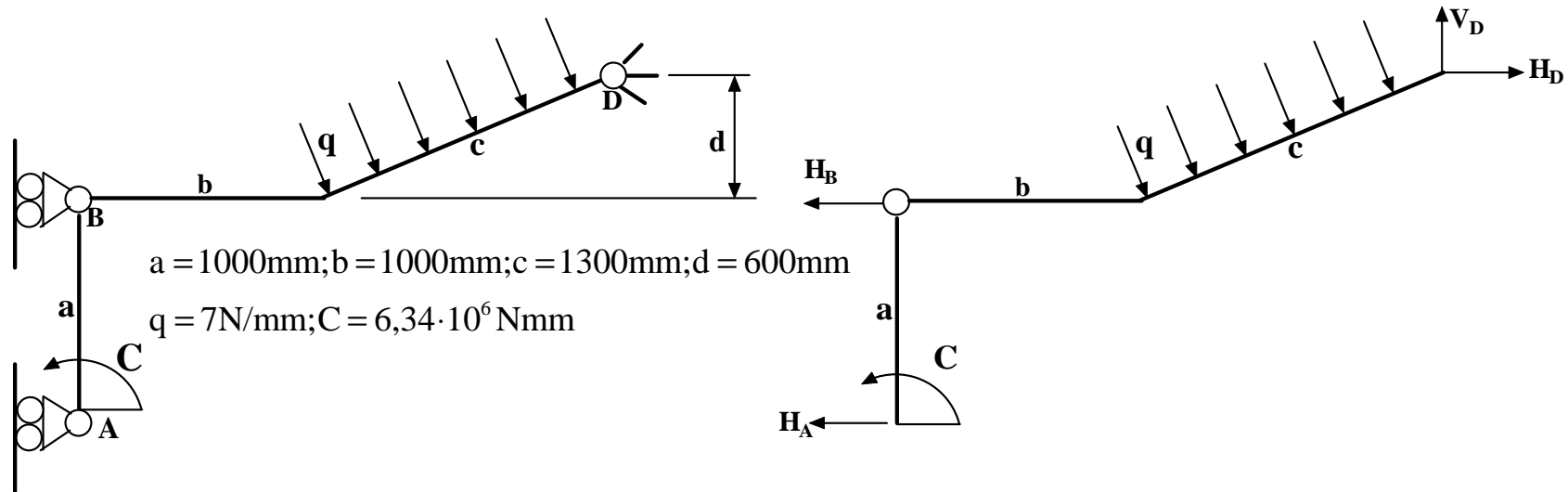
Esempio 4

Diagrammi azioni interne



Esempio 5

Reazioni vincolari

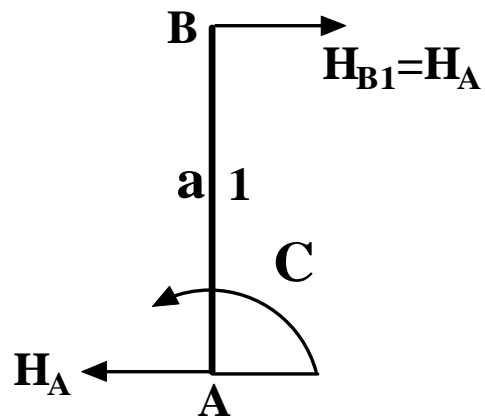
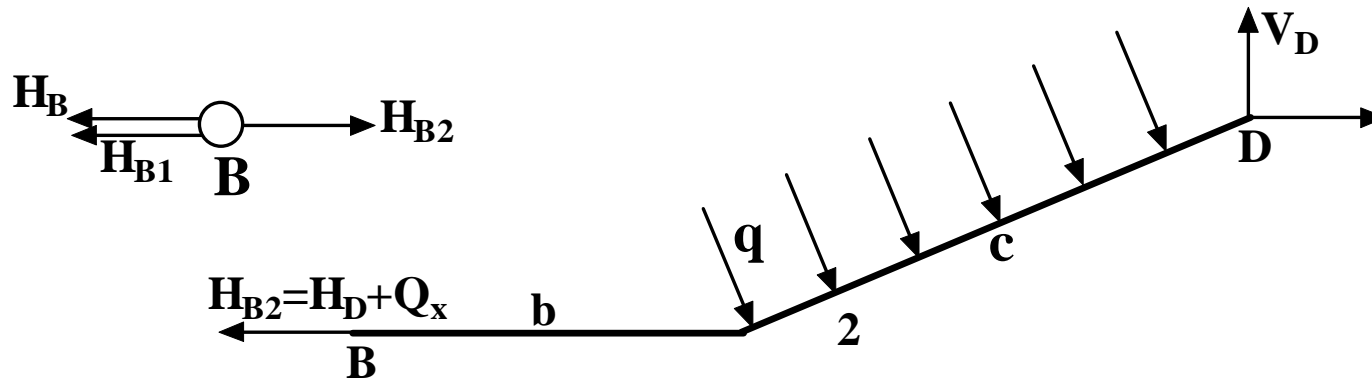


$$Q = 9100\text{N}; Q_x = 4200\text{N}; Q_y = 9072\text{N}$$

$$H_A = 6340\text{N}; H_B = 3519\text{N}; H_D = 5659\text{N}; V_D = 8073\text{N}$$

Esempio 5

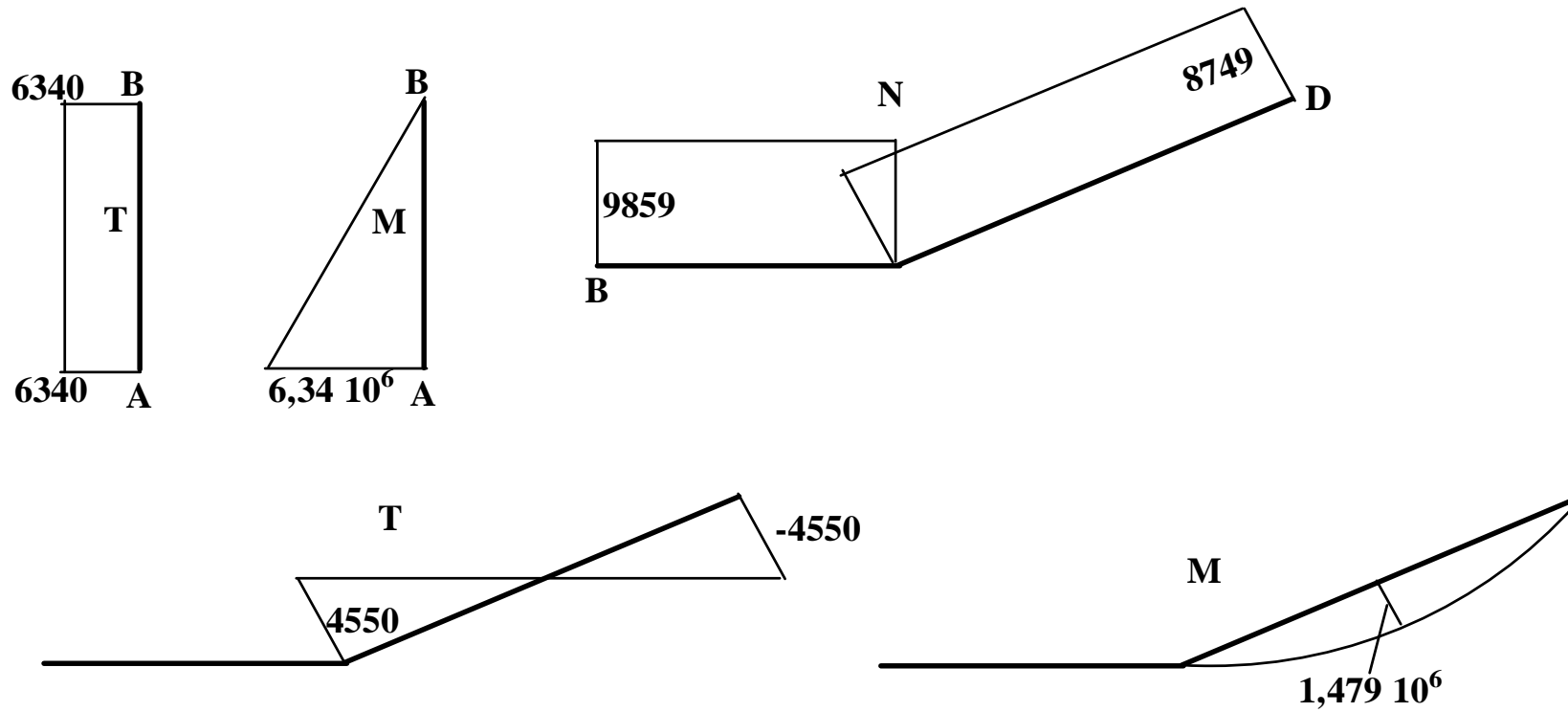
Reazioni interne ed equilibrio del nodo B



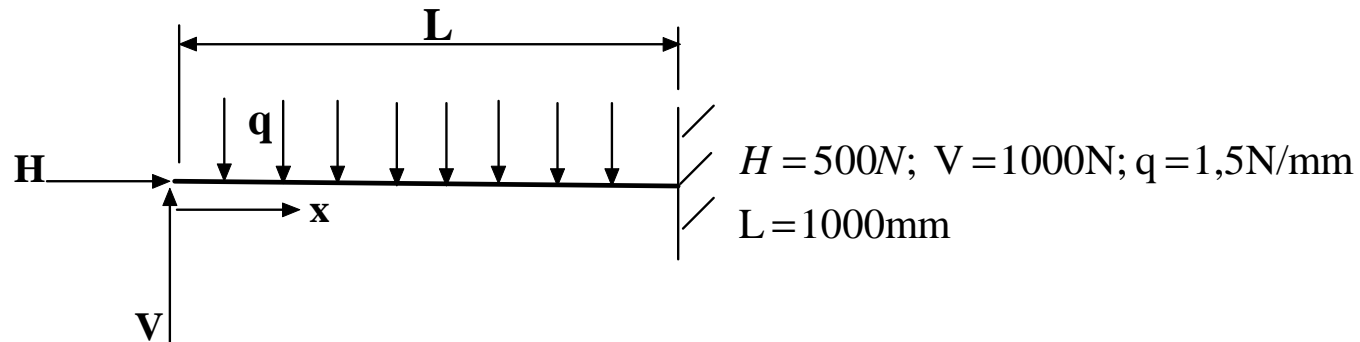
$$H_{B1} = 6340\text{N}; H_{B2} = 9859\text{N};$$

Esempio 5

Diagrammi azioni interne



Relazione fra taglio e momento flettente

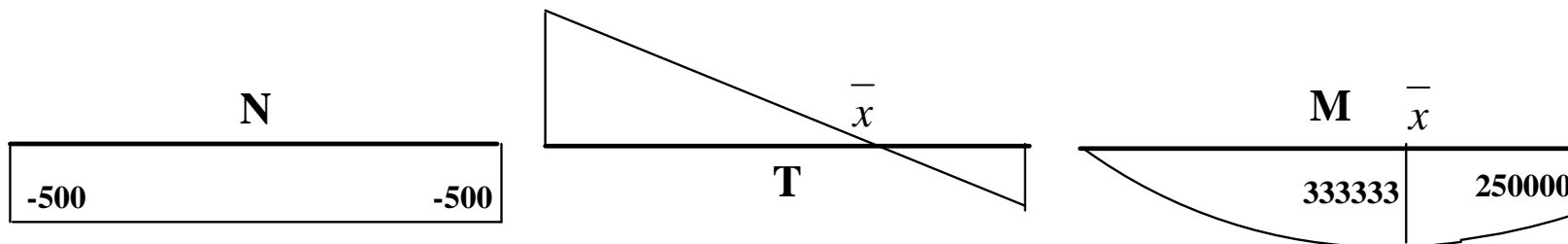


$$N = -H_A = -500N$$

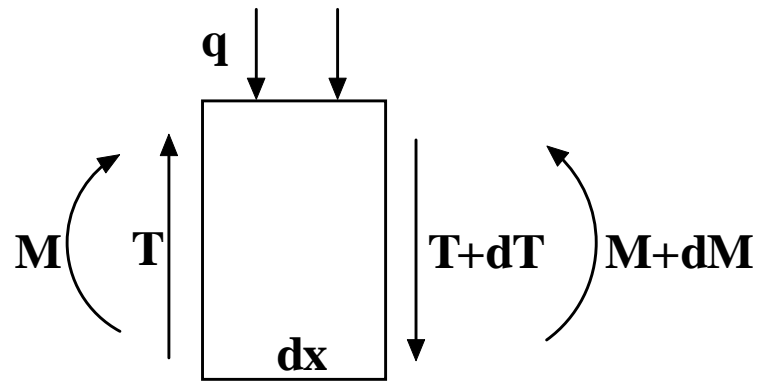
$$T = V - qx = 1000 - 1,5x \quad T = 0 \quad \bar{x} = 667mm$$

$$M = Vx - \frac{qx^2}{2} = 1000x - 0,75x^2 \quad M(0) = 0 \quad M(667) = 333333Nmm$$

$$M(1000) = 250000Nmm$$



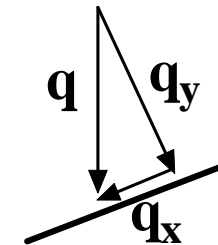
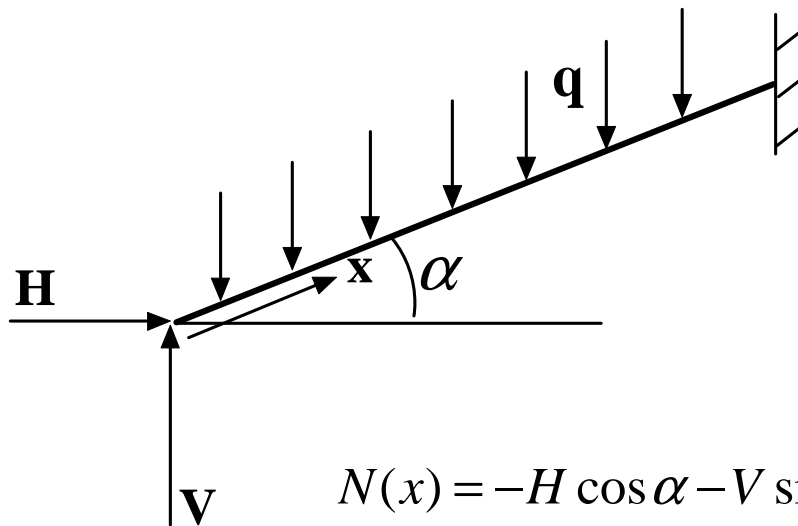
Relazione fra taglio e momento flettente



$$\frac{dT}{dx} = -q$$

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Carico distribuito non normale all'asta



$$q_x = q \sin \alpha$$

$$q_y = q \cos \alpha$$

$$N(x) = -H \cos \alpha - V \sin \alpha + q_x x$$

$$T(x) = -H \sin \alpha + V \cos \alpha - q_y x$$

$$M(x) = (-H \sin \alpha + V \cos \alpha)x - q_y \frac{x^2}{2}$$