

Analisi della risposta dinamica

Risposta dinamica del trasduttore: descrive, in termini di un modello matematico basato su equazioni differenziali alle derivate parziali, le relazioni, basate su opportune leggi fisiche, tra il misurando $x(t)$ e l'uscita $y(t)$.

▪ Caso lineare



– La risposta del sistema si valuta attraverso lo studio della funzione di trasferimento ingresso-uscita del sistema trasduttore.

- Modello matematico lineare attraverso equazioni differenziali

▪ Trattazioni semplificate

- Modelli a parametri concentrati
- Analogie tra sistemi fisici

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= f(x_1(t)) \\ y_2(t) &= f(x_2(t)) \\ y_1(t) + y_2(t) &= f(x_1(t) + x_2(t)) \\ a \cdot y_1(t) &= f(a \cdot x_1(t)) \end{aligned} \right\} \text{ sensore lineare}$$

Risposta dinamica

- La relazione tra uscita e misurando (**modello descrittivo del sensore**) può essere espressa da un'equazione differenziale nella sola variabile tempo
 - Ipotesi: lineare a coefficienti costanti.
- Ordine dell'equazione = ordine del sensore stesso cui si riferisce;
 - Parliamo infatti di elementi sensibili del primo ordine, del secondo ordine e di ordine superiore.
- Soluzione = risposta temporale del sensore al segnale in ingresso.
 - Complessa per ordini superiori al secondo

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Equazione differenziale
lineare del 2° ordine

Calcolo Risposta dinamica

▪ Metodo della **trasformata di Laplace**

- Sostituzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con equazioni algebriche (la cui soluzione è più agevole)

▪ Determinazione della risposta temporale del sensore

- Implementazione del modello descrittivo in termini di equazioni differenziali a coefficienti costanti che legano il misurando all'uscita e che contengono i parametri del sensore stesso
- Effettuare la trasformazione di Laplace sulle equazioni differenziali temporali ottenendo delle equazioni algebriche nella variabile s
- Risolvere le equazioni algebriche in s
- Effettuare la trasformazione inversa di Laplace per ottenere la risposta temporale del sensore

- La **Funzione di Trasferimento $F(s)$** di un sistema lineare è definita come il rapporto fra la trasformata di Laplace della variabile di uscita e quella della variabile in ingresso

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow s Y(s) \qquad \begin{array}{l} x(t) \rightarrow X(s) \\ y(t) \rightarrow Y(s) \end{array} \qquad F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Trasformate e anti-trasformate di Laplace

TRASFORMATA $f(t)$	ANTITRASFORMATA $f(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{(n+1)}} \text{ for } n < -1 \\ \frac{n!}{s^{(n+1)}} \text{ for } n \text{ positivo intero} \end{cases}$
e^{-kt}	$\frac{1}{s+k}$
$t e^{-kt}$	$\frac{1}{(s+k)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-kt} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+k)^2 + \omega^2}$
$e^{-kt} \cos(\omega t)$	$\frac{(s+k)}{(s+k)^2 + \omega^2}$
Onda quadra, periodo 2T $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < t < T \\ -1 & \text{per } T < t < 2T \end{cases}$	$\frac{1}{s} \frac{1 - e^{-st}}{1 + e^{-st}} = \frac{1}{s} \tanh sT/2$
Onda triangolare, periodo 2T $f(t) = \begin{cases} t/T & \text{per } 0 < t < T \\ -(t-2T)/T & \text{per } T < t < 2T \end{cases}$	$\frac{1}{Ts^2} \frac{1 - e^{-st}}{1 + e^{-st}} = \frac{1}{Ts^2} \tanh sT/2$
Onda a dente di sega, periodo T $f(t) = t/T \text{ per } 0 < t < T$	$\frac{1}{Ts^2} - \frac{e^{-st}}{s(1 - e^{-st})}$
Onda rettificata $f(t) = \sin \omega t $	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}$
Frequenza angolare ω $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{per } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{per } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}$

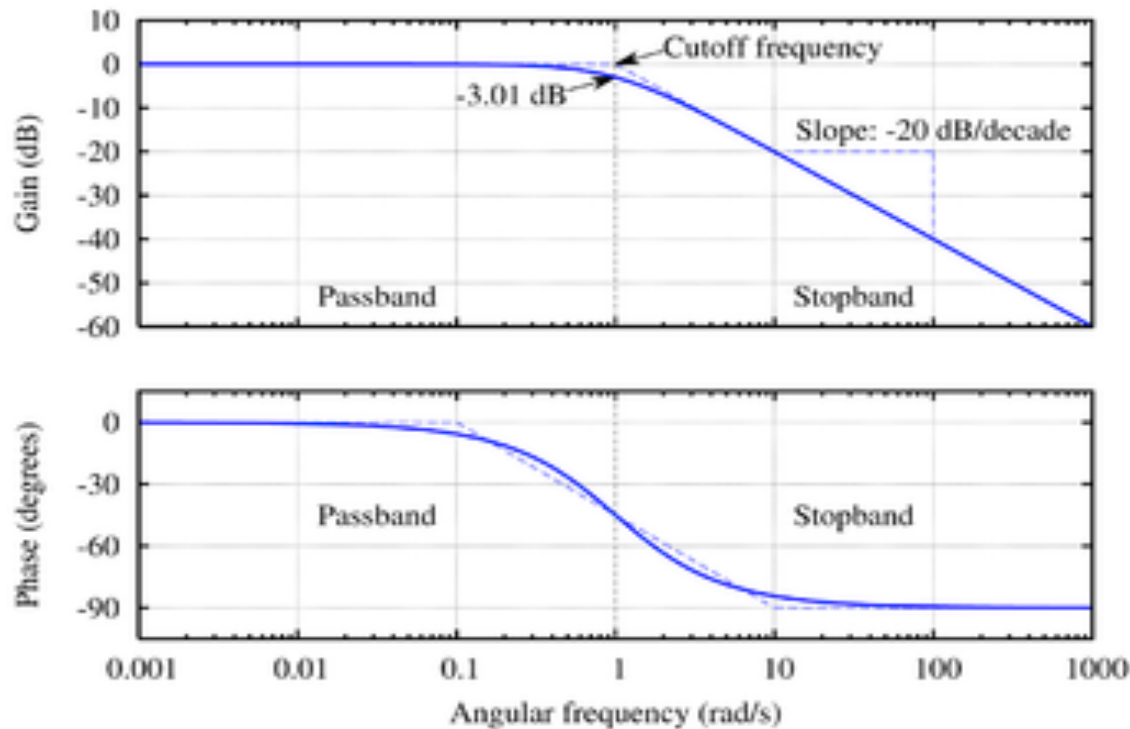
TRASFORMATA $f(t)$	ANTITRASFORMATA $f(s)$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{\omega^4} (1 - \cos \omega t - \frac{\omega t}{2} \sin \omega t)$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{a^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos at)$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{a\omega(a^2 - \omega^2)} (a \sin \omega t - \omega \sin at)$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{a^2 \omega^2} \left[1 - \frac{1}{a^2 - \omega^2} (a^2 \cos \omega t - \omega^2 \cos at) \right]$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)(s^2 + \omega^2)}$
Nelle seguenti formule:	
$\omega^2 = \omega_0^2 - k^2 > 0$, cosicchè $s^2 + 2ks + \omega_0^2 = (s+k)^2 + \omega^2$	
$A = (a-k)^2 + \omega^2$	
$B = (a-2k)/\omega_0^2$	
$e^{-kt} (\cos \omega t - \frac{k}{\omega} \sin \omega t)$	$\frac{s}{s^2 + 2ks + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\omega} e^{-kt} \sin \omega t$	$\frac{1}{(s^2 + 2ks + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-kt} (\cos \omega t + \frac{k}{\omega} \sin \omega t) \right]$	$\frac{1}{s(s^2 + 2ks + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{\omega_0^4} \left[\omega_0^2 t - 2k + e^{-kt} (2k \cos \omega t + \frac{k^2 - \omega^2}{\omega} \sin \omega t) \right]$	$\frac{1}{s^2(s^2 + 2ks + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{A} \left[-a e^{-at} + e^{-kt} (a \cos \omega t + \frac{\omega_0^2 - ak}{\omega} \sin \omega t) \right]$	$\frac{s}{(s+a)(s^2 + 2ks + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{A} \left[e^{-at} - e^{-kt} (\cos \omega t + \frac{k-a}{\omega} \sin \omega t) \right]$	$\frac{1}{(s+a)(s^2 + 2ks + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{a\omega_0^2} \frac{1}{A} \left[-\frac{e^{-at}}{a} - e^{-kt} (B \cos \omega t + \frac{kB+1}{\omega} \sin \omega t) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s^2 + 2ks + \omega_0^2)}$

Risposta in frequenza

s è un variabile complessa la cui parte immaginaria è costituita dalla frequenza angolare del segnale in ingresso (pulsazione ω)

- Risposta a segnali di ingresso sinusoidali (risposta in frequenza)
 - Risposta a sinusoidi di ampiezza unitaria con pulsazione angolare ω (frequenza $f=2\pi/\omega$)
 - Utilizzo delle s-trasformate e sostituzione di $s=j\omega$
 - Nota la risposta in frequenza è possibile conoscere la risposta a qualsiasi segnale in ingresso di natura periodico
 - Fourier: un qualsiasi segnale periodico può essere scomposto in una serie di sinusoidi di frequenze diverse
- Diagrammi di Bode
 - rappresentazione grafica della risposta in frequenza di un sistema lineare tempo invariante (LTI) e che consiste in due grafici che rappresentano rispettivamente l'ampiezza (A_o/A_i) e la fase della funzione complessa di risposta in frequenza

Diagrammi di Bode



Esempio: filtro di Butterworth primo ordine

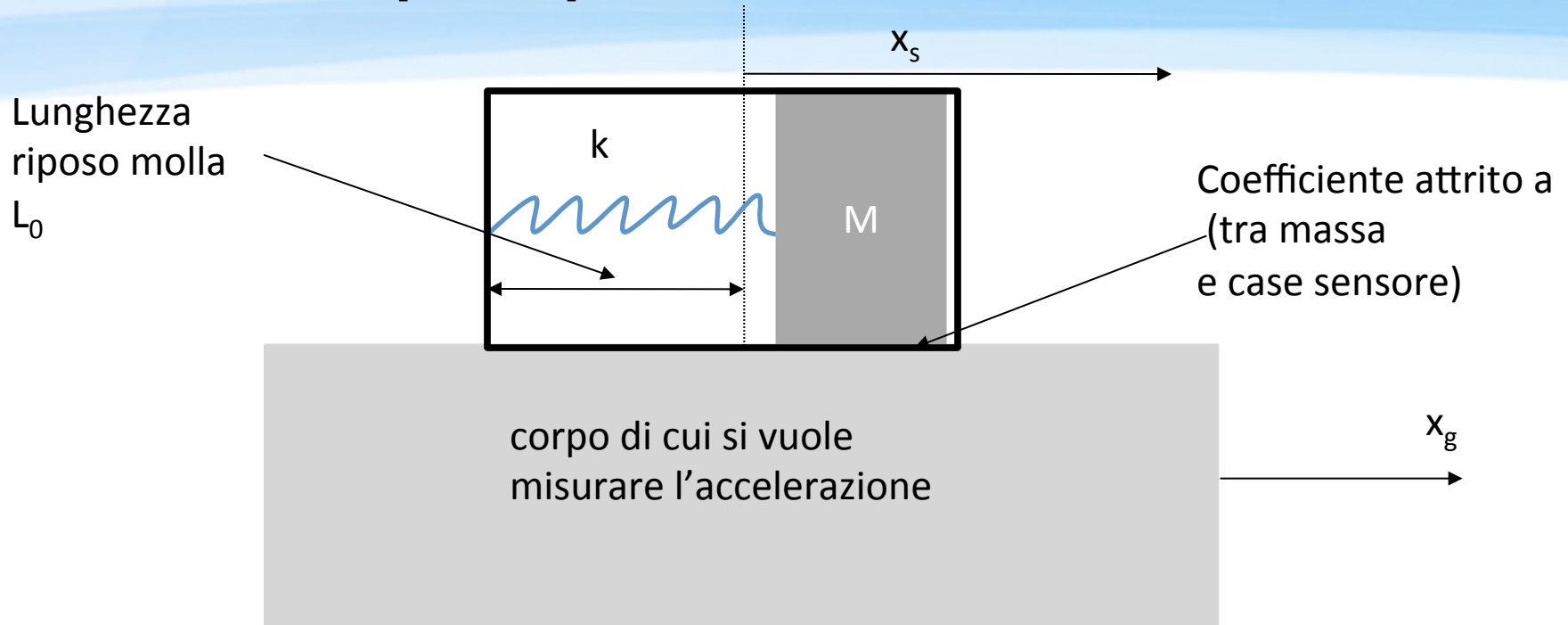
Frequenza di taglio (attenuazione 3dB): $\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Sfasamento di 90 gradi

Banda passante

Esempio

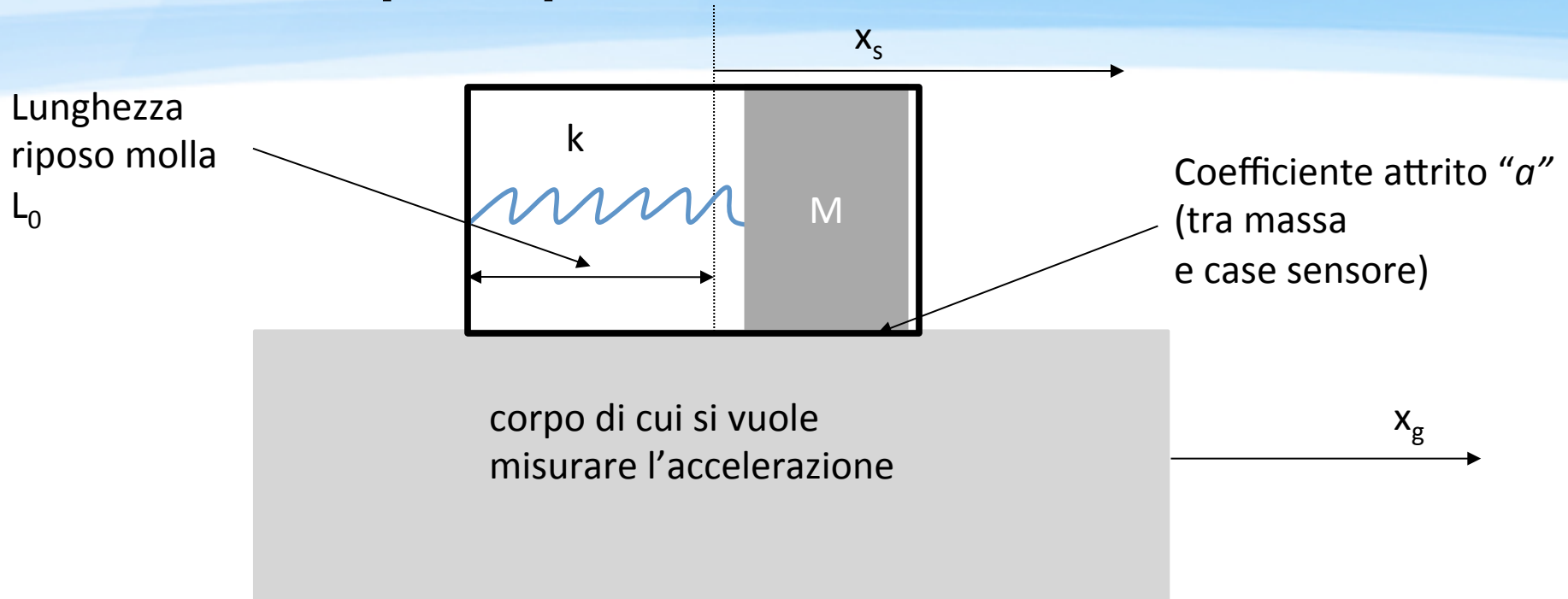
Determinare il modello dinamico di un accelerometro mono-assiale e ricavarne le caratteristiche metrologiche dinamiche

•Schema di principio: sistema massa molla



- Caso monodimensionale
- Esplicitiamo le equazioni del moto
- x_s spostamento della massa rispetto al sistema di riferimento solidale all'accelerometro
- x_g spostamento del corpo sotto esame lungo l'asse di sensibilità dell'accelerometro e rispetto ad un sistema di riferimento fisso

•Schema di principio: sistema massa molla



Per ricavare l'equazione del moto si utilizza la seconda legge di Newton, dove tutte le forze reali che agiscono sulla massa sono eguagliate alla forza di inerzia che agisce sulla massa. Il problema dinamico può essere trattato come un problema di equilibrio statico e l'equazione del moto può essere ottenuta formulando le equazioni di equilibrio. Questo sistema rappresenta il classico sistema massa molla smorzato.

•Equazione del moto

Dal punto di vista dell'osservatore stazionario, la somma di tutte le forze nella direzione x è:

$$F_{applicata} - F_{smorzamento} - F_{molla} = M \ddot{x}_s$$

$$M \ddot{x}_s + a\dot{x}_s + kx_s = F_{applicata} = M \ddot{x}_g = M a$$

Ho trovato un modello matematico che lega l'accelerazione del sistema (misurando) all'allungamento della molla che suppongo di poter misurare con un sensore di deformazione

$$\ddot{x}_g = \text{Misurando} \rightarrow \mathbf{x}$$

$$x_s = \text{Uscita rilevata tramite sensore di deformazione} \rightarrow \mathbf{y}$$

• Risolvo l'equazione differenziale con Laplace

$$x(t) = \ddot{y}(t) + \frac{A}{M} \dot{y}(t) + \frac{K}{M} y(t)$$

$$X(s) = + s^2 Y(s) + \frac{A}{M} s Y(s) + \frac{K}{M} Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + \frac{A}{M} s + \frac{K}{M}}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{K}{M}}{\frac{M}{K} s^2 + \frac{A}{K} s + 1} = \frac{\frac{K}{M}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1}$$

← Sistema secondo ordine in forma canonica

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{A}{2\sqrt{km}}$$

Frequenza di risonanza

Coefficiente di smorzamento

Parametri
fisici del
sistema

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1 = 0 \rightarrow -\omega_0(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad \text{Poli del sistema}$$

$\zeta > 1$ 1) Sistema sovra-smorzato (poli reali e distinti)

$\zeta = 1$ 2) Smorzamento critico (poli reali e coincidenti)

$\zeta < 1$ 3) Sistema sotto-smorzato (poli complessi e coniugati)

Risposta al gradino (1/s)

caso 1)

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - p_1} + \frac{A_3}{s - p_2}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) s$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow p_1} Y(s) (s - p_1)$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = y_0 = 0$$

Anti-trasformata

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{p_1 t} + A_3 e^{p_2 t}$$

Teorema valore iniziale

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = y_0$$

caso 2)

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - p_1} + \frac{A_3}{(s - p_1)^2}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} V_u(s) s$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow p_1} V_u(s) (s - p_1)^2$$

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$Y(t) = A_1 + A_2 e^{p_1 t} + A_3 t e^{p_1 t} \quad \text{Anti-trasformata}$$

caso 3)

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2}$$

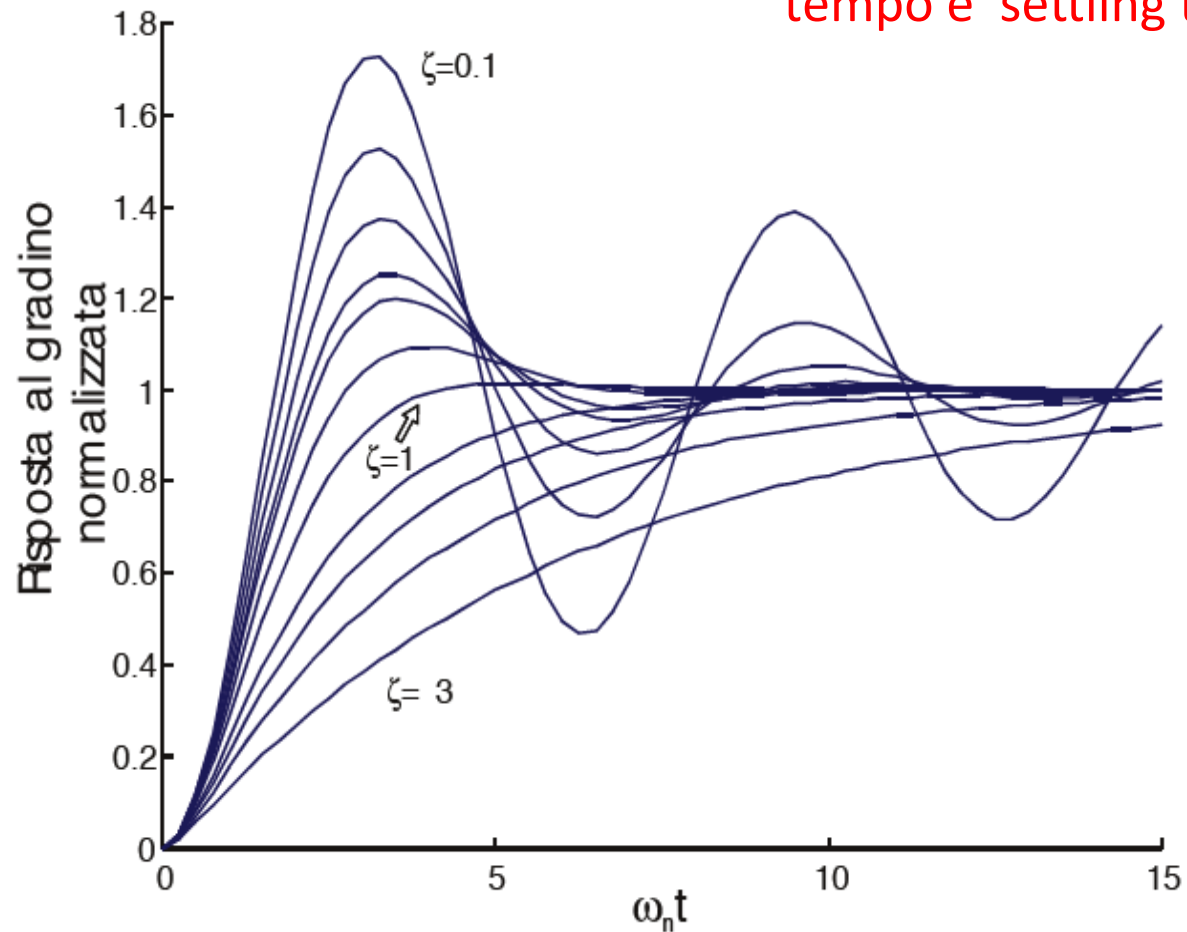
$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) s$$

A_2, A_3 identità dei polinomi

$$L^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s \cdot (s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \varphi) \quad \text{con : } \varphi = \arccos \xi$$

• Risposta al gradino

Come ottengo costante di tempo e settling time?



• Risposta in frequenza

- Numero complesso ottenuto sostituendo in $F(s) \rightarrow s=j\omega$
- Rappresentato in modulo e fase al variare di ω
-

come ottengo la banda passante?

