7. SISTEMI RIGIDI

Un corpo $\mathcal{C}$ è rigido se la distanza fra due punti qualsiasi di $\mathcal{C}$ si mantiene inalterata durante il moto. In molte circostanze di interesse applicativo è conveniente considerare sistemi materiali schematizzabili come **corpi rigidi**.

È ben noto che in natura non esistono corpi perfettamente rigidi. Dal punto di vista microscopico, un qualunque corpo che ci appare rigido è costituito di atomi e di molecole che sono sempre in vibrazione. Se invece si prescinde dalla natura atomica dei corpi estesi e si adotta uno schema "macroscopico" **continuo** si constata facilmente che ogni corpo è soggetto a deformarsi, eventualmente di poco, quando è sottoposto all'azione di forze esterne. Si può concludere che il concetto di corpo rigido fornisce un **modello matematico** che permette di simulare il comportamento di sistemi meccanici formati da corpi solidi soggetti a deformazioni abbastanza piccole da non influenzare significativamente il moto.

Immaginiamo di eseguire un semplice esperimento che consiste nell'osservare il moto di un cancello (o di una porta) che viene spinto dopo che una persona vi si è appesa. Se si ripete l'esperimento mantenendo inalterata la spinta ma variando la distanza della persona dall'asse si vede che il moto cambia, anche se la massa totale del sistema è rimasta invariata. Gli esperimenti evidenziano il fatto che il comportamento dinamico di un sistema rigido è fortemente influenzato dalla **distribuzione** delle masse dei suoi costituenti; in particolare, la semplice conoscenza della massa totale - tipica del modello punto materiale - non basta per caratterizzare il moto.

Questa osservazione fornisce la ragione fondamentale per gli sviluppi formali affrontati nel seguito. È opportuno tenerla ben presente nel corso della lettura. Per fortuna non è necessario che sia assegnata la posizione di ogni elemento di massa del sistema; agli effetti della caratterizzazione del moto è richiesta semplicemente la conoscenza della **massa totale** e di una **matrice** quadrata, simmetrica, di ordine 3, chiamata matrice d'inerzia; la matrice è una sorta di "riassunto" delle posizioni delle masse dei punti; essa è associata ad un operatore lineare (operatore d'inerzia) ed è determinata dalla distribuzione delle masse dei costituenti del sistema.

Un sistema (corpo) rigido discreto è un sistema discreto formato da N punti materiali tali che la distanza fra ogni coppia di punti si mantiene costante nel tempo, ossia

$$|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b| = c_{ab} = \text{ costante} \qquad \text{per ogni } a, b = 1, ..., N.$$

Per fissare le idee si può immaginare che un sistema rigido discreto sia formato da N punti collegati fra loro da aste rigide di massa trascurabile.

In corrispondenza di un sistema rigido discreto si può costruire una famiglia di assi cartesiani ortogonali tali che le coordinate dei punti del sistema sono costanti nel tempo, ossia tutti i punti appaiono in quiete. Se infatti H, K, L sono una terna di punti appartenenti al sistema e non allineati, si può costruire una terna destra soddisfacente la condizione richiesta mediante il seguente procedimento. La posizione dell'origine è fissata in H; l'asse x è diretto come il vettore HK; l'asse y si trova nel piano generato da H, K, L ed è orientato in modo che il punto L abbia ordinata positiva; l'asse z è determinato di conseguenza. La condizione di invarianza delle distanze da H, K, L implica che le coordinate di tutti gli altri punti del sistema sono costanti nella terna appena introdotta. Infatti ogni altro punto Q del sistema rigido appartiene all'intersezione di tre sfere centrate in H, K, L, rispettivamente, con raggi che si mantengono costanti durante il moto. Pertanto Q è in quiete rispetto agli assi cartesiani e le sue coordinate sono conseguentemente costanti. Cambiando la scelta o anche l'ordine dei tre punti H, K, L si ottiene un diverso sistema di coordinate. La legge di trasformazione tra due sistemi di coordinate ottenuti con procedimenti di questo tipo non dipende dal tempo.

Chiamiamo terna solidale una qualunque terna di assi cartesiani ortogonali in quiete rispetto al corpo rigido.

Un sistema rigido discreto è individuato da: (1) una terna di assi $\{O, \mathbf{k}\}$; (2) una ennupla di vettori posizione $\mathbf{r}'_a$, fissi nella terna assegnata; (3) una ennupla di scalari m_a, $a = 1, \dots, N$ aventi le dimensioni di una massa.

Gli assi determinano una terna solidale; i vettori $\mathbf{r}'_a$ individuano i punti P_a nei quali sono concentrate le masse m_a.

La definizione di sistema rigido discreto può essere generalizzata facilmente in modo da permettere la descrizione di un sistema rigido continuo. Si ottiene così il modello matematico che permette di simulare il comportamento meccanico dei solidi che incontriamo nella vita di ogni giorno.

Un sistema rigido continuo è individuato da: (1) una terna di assi $\{O, \mathbf{k}\}$, che viene considerata come una terna solidale col sistema; (2) una regione chiusa e limitata $\mathcal{C}$ (in quiete rispetto a $\{O, \mathbf{k}\}$), da interpretare come volume spaziale occupato dal continuo; (3) una funzione scalare positiva $\rho : \mathcal{C} \mapsto I\!R$ avente il significato di densità di massa.
Per ogni regione $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ chiusa e limitata, l'integrale

$$M(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \rho(\mathbf{r}')\, dv$$

definisce la massa (costante) della porzione di continuo contenuta in $\mathcal{U}$.
Se $\mathcal{U}$ coincide con $\mathcal{C}$ la quantità $M(\mathcal{C}) =: M$ è la massa del sistema.
Un sistema rigido continuo è omogeneo se la densità ρ è costante.

8. LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ

Un sistema rigido ammette terne di assi solidali. Il moto del sistema è dato dal moto di una terna solidale. Per descrivere tale moto si richiede la conoscenza della posizione dell'origine e dell'orientamento degli assi solidali in funzione del tempo. Pertanto **la soluzione del problema del moto di un corpo rigido libero richiede la determinazione di 6 incognite identificabili, ad esempio, con le coordinate dell'origine degli assi solidali e con gli angoli di Eulero**. Le leggi di bilancio della quantità di moto e del momento angolare forniscono il sistema di equazioni differenziali che permette di calcolare le 6 incognite.

Per fissare le idee consideriamo il caso discreto. Per poter scrivere esplicitamente le equazioni differenziali del moto occorre preventivamente determinare la dipendenza di

$$\mathbf{P} = \sum_{i=a}^{N} m_a \, \mathbf{v}_a \qquad \text{e di} \qquad \mathbf{L}_O = \sum_{i=a}^{N} m_a \, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O) \wedge \mathbf{v}_a$$

dai parametri che descrivono il moto. Studieremo prima la rappresentazione della velocità $\mathbf{v}_a$ nel moto rigido, per passare successivamente alle rappresentazioni di $\mathbf{P}$ e di $\mathbf{L}_O$; nella rappresentazione di $\mathbf{L}_O$ interviene la matrice d'inerzia, già menzionata nell'introduzione.

Se $(O, \mathbf{k})$ è una terna di assi solidali, la velocità angolare del corpo rigido è la velocità angolare della base $\mathbf{k}$.
Il moto del corpo rigido è traslatorio se l'orientamento degli assi solidali non varia nel tempo.
Il moto è rotatorio assiale se esiste una retta solidale i cui punti restano fissi. Tale retta è chiamata asse di rotazione.
Il moto è elicoidale se esiste una retta solidale r che scorre su una retta fissa.

La velocità angolare non dipende dalla scelta della base solidale. Le velocità angolare è nulla nel caso di moto traslatorio, parallela all'asse di rotazione nel caso di moto rotatorio assiale, parallela alla retta r nel moto elicoidale.

Un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso r realizza un moto rotatorio assiale; realizza un moto elicoidale se contemporaneamente scivola lungo l'asse r. I punti del corpo a contatto con l'asse r traslano con velocità parallela ad r, e quindi parallela ad $\boldsymbol{\omega}$. Nel caso generale il moto di un corpo rigido non rientra in nessuna delle classi precedenti.

Fatte queste premesse sul moto, passiamo all'esame del comportamento delle velocità. Sia P un generico punto del sistema; si indichi con $\mathbf{r}_P$ il vettore posizione di P nella terna fissa e con $\mathbf{r}'_P$ il vettore posizione nella terna solidale. L'indice P sarà spesso omesso, specialmente se ciò non crea ambiguità.

- **Teorema.** *Il moto rigido è caratterizzato dalla legge di distribuzione delle velocità*

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O) = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_P,$$

essendo $\boldsymbol{\omega}(t)$ la velocità angolare ed O un punto solidale qualsiasi.

Infatti, si consideri un sistema rigido; sia O un punto del sistema e sia $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare. Si introduca una terna di assi solidali di origine O. Si interpretino gli assi solidali come assi di un osservatore mobile. Se P è un punto del sistema rigido, la velocità $\mathbf{v}_P$ di P coincide con la velocità assoluta; la velocità relativa di P è nulla, essendo stata introdotta una terna solidale; si ha poi $\mathbf{r}^{(r)} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O$. Sostituendo queste condizioni nella legge di addizione delle velocità si ottiene la catena di equazioni

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}^{(a)} = \mathbf{v}^{(r)} + \mathbf{v}^{(s)} = \mathbf{v}^{(s)} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^{(r)} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O).$$

Si dimostra anche che vale il reciproco della precedente affermazione: se $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O)$ allora il moto è rigido. A tale scopo si porta il vettore $\mathbf{v}_O$ al primo membro, poi si moltiplica scalarmente per $(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O)$ l'equazione ottenuta. Si trova

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O) \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O) = 0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O)^2 = \frac{d}{dt}|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O|^2.$$

Ne segue che $|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O|$ è costante per ogni punto P del sistema. Ricordando che O è arbitrario, la condizione di rigidità è subito verificata.

Si può comprendere l'utilità di questo risultato osservando che la semplice conoscenza della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e della velocità di **un solo** punto del sistema permette di ricostruire la velocità di **tutti** gli altri punti del sistema.

Nella terna solidale si ha $\mathbf{r}' = r'_h \, \mathbf{k}_h$, dove le componenti r'_h sono costanti. I versori $\mathbf{k}$ sono funzioni del tempo rispetto alla terna fissa.

Esempio. Determiniamo la legge di distribuzione delle velocità per alcuni moti particolari. Ricordiamo che, in assenza di ulteriori indicazioni, i vettori $\mathbf{v}_O$ ed $\boldsymbol{\omega}$ sono funzioni del tempo.

Se il corpo rigido è in **quiete** si ha ovviamente $\mathbf{v}_O = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ e quindi

$$\mathbf{v}_P = 0$$

per ogni punto P.

Se il corpo rigido è in **moto traslatorio** si ha $\boldsymbol{\omega} = 0$; in ogni istante vale l'equazione

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O,$$

per ogni scelta di P.

Se il corpo rigido è in **moto rotatorio** conviene scegliere come polo O un punto dell'asse di rotazione; in questo caso è $\mathbf{v}_O = 0$, e quindi

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O).$$

Se il corpo rigido è in **moto elicoidale**, scegliendo come polo O un punto della retta privilegiata r risulta

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O),$$

essendo $\mathbf{v}_O$ ed $\boldsymbol{\omega}$ paralleli ad r e quindi paralleli fra loro.

9. ESPRESSIONE DELLE QUANTITÀ MECCANICHE DEL CORPO RIGIDO

Riportiamo per comodità le definizioni delle quantità meccaniche fondamentali nel caso discreto. Si ha

$$M = \sum_{i=a}^{N} m_a, \qquad \mathbf{r}_G = \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{r}_a / M,$$

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{v}_a, \qquad \mathbf{L}_O = \sum_{a=1}^{N} m_a\, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O) \wedge \mathbf{v}_a, \qquad T = \tfrac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} m_a v_a^2.$$

Sostituendo la legge di distribuzione delle velocità $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O)$ si determina l'espressione di $\mathbf{P}$, di $\mathbf{L}_O$ e di T nel caso di sistema rigido discreto. L'idea guida è la seguente: trovare una espressione per le quantità meccaniche fondamentali che eviti il calcolo (lungo e sgradevole) delle sommatorie; in particolare si esplicita la dipendenza da $\mathbf{v}_O$ e da $\boldsymbol{\omega}$, e quindi dai parametri che descrivono il moto della terna solidale.

Ricordiamo inoltre che in generale, per un sistema discreto,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=a}^{N} m_i {v'_a}^2$$

$$\mathbf{L}_O = M \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v}_G + \sum_{a=1}^{N} m_i\, \mathbf{r}'_a \wedge \mathbf{v}'_a = M \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v}_G + \mathbf{L}_G,$$

dove $\mathbf{r}_G$ e $\mathbf{v}_G$ sono la posizione e la velocità del baricentro rispetto al sistema di riferimento con origine in O, e

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_G, \qquad \mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_G.$$

Per la quantità di moto si ha semplicemente

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{v}_a = M\, \mathbf{v}_G.$$

Calcoliamo ora il momento angolare del solido rispetto al un sistema di riferimento avente l'origine nel **baricentro** G. In questo caso $\mathbf{v}_G = 0$, e la legge di distribuzione delle velocità si riduce a

$$\mathbf{v}'_a = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a.$$

Sostituendo nella definizione,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_G &= \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{r}'_a \wedge \mathbf{v}'_a \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{r}'_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \\
&= \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}),
\end{aligned}$$

avendo definito l'**operatore d'inerzia** rispetto al baricentro G mediante l'equazione

$$\mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{r}'_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) = \sum_{a=1}^{N} m_a\, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_G) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_G)].$$

In generale dunque, rispetto a un polo generico O,

$$\mathbf{L}_O = M\mathbf{x}_G \wedge \mathbf{v}_G + \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}).$$

Passiamo ora al calcolo dell'espressione dell'energia cinetica rispetto al baricentro. Dalla definizione segue

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_a \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} m_a\, (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} m_a\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{a=1}^{N} m_a\, \mathbf{r}'_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}$$

Nel passaggio dalla riga 2 alla riga 3 è stata applicata la proprietà ciclica del prodotto misto, secondo la quale

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a) \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a).$$

L'energia cinetica totale è data quindi da

$$T = \tfrac{1}{2} M\mathbf{v}_G^2 + \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega})$$

Per comodità i risultati ottenuti sono riassunti nell'enunciato del seguente teorema.

- **Teorema.** *Nel caso di sistema rigido discreto le quantità meccaniche fondamentali assumono la seguente espressione:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= M\mathbf{v}_G; \\
\mathbf{L}_O &= M\mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v}_G + \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}); \\
T &= \tfrac{1}{2} M\mathbf{v}_G^2 + \tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega})
\end{aligned}$$

avendo definito l'operatore d'inerzia rispetto al baricentro G mediante l'equazione

$$\mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{a=1}^{N} m_a\, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_G) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_G)].$$

In accordo con le affermazioni fatte all'inizio del paragrafo, risulta che le quantità meccaniche fondamentali sono funzioni ragionevolmente semplici dei parametri che descrivono il moto della terna solidale e delle loro derivate, attraverso la dipendenza di $\mathbf{v}_G$ e di $\boldsymbol{\omega}$ da questi parametri.

Notiamo anche che l'operatore d'inerzia può essere definito rispetto a un qualunque polo solidale O come

$$\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{a=1}^{N} m_a \, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O)].$$

Identiche espressioni caratterizzano le quantità meccaniche anche nel caso di sistema rigido continuo, purchè venga opportunamente adattata la definizione dell'operatore d'inerzia. in particolare, per un sistema continuo l'operatore d'inerzia rispetto al baricentro G è definito come

$$\mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathcal{C}} \rho(\mathbf{r}') \, \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') \, dv.$$

Abbiamo evitato per il momento di studiare le proprietà dell'operatore d'inerzia, che interviene nella scrittura del momento angolare e in quella dell'energia cinetica. Avendo presente l'importanza di questo operatore dedicheremo alla sua analisi un intero paragrafo.

10. OPERATORE D'INERZIA

Consideriamo la definizione dell'operatore d'inerzia rispetto a un generico polo O, che assume la forma

$$\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{a=1}^{N} m_a \, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O)] = \sum_{a=1}^{N} m_i \, \mathbf{r}'_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'_a),$$

nel caso di sistema discreto e

$$\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathcal{C}} \rho(\mathbf{r}') \, \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') \, dv$$

nel caso continuo. Per fissare le idee consideriamo il caso discreto. È evidente che le operazioni richieste per il calcolo di $\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})$ sono lunghe e laboriose: occorre prima esplicitare un doppio prodotto vettoriale, poi moltiplicare per lo scalare m_a, e infine sommare su tutti i punti del sistema. D'altra parte, ognuno dei vettori $\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O$ è costante nel riferimento solidale; in tale riferimento la dipendenza dal tempo è interamente contenuta nel vettore $\boldsymbol{\omega}$. Si vuole sfruttare questo fatto "separando" il "contributo dipendente dal tempo" - cioè $\boldsymbol{\omega}$ - dal "contributo costante nel tempo" - che dipende soltanto dalla distribuzione delle masse dei punti che costituiscono il corpo rigido; si vedrà che il contributo costante nel tempo è caratteristico del corpo rigido e può essere descritto mediante una matrice.

In termini più formali si vuol provare che, in corrispondenza di un assegnato sistema rigido (discreto o continuo), l'operatore di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che associa ad ogni vettore $\boldsymbol{\omega}$ il vettore $\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})$ è **lineare** in $\boldsymbol{\omega}$. Fissata una **base solidale**, la trasformazione lineare è completamente determinata dalla conoscenza di una matrice quadrata **costante** di ordine 3. Gli elementi della matrice dipendono dalla distribuzione delle masse del sistema e costituiscono il contributo costante (nella base solidale) al quale si alludeva precedentemente; il vettore $\boldsymbol{\omega}$ descrive invece il contributo dipendente dal tempo. D'ora in avanti considereremo soltanto il caso discreto.

Dal punto di vista formale $\mathbf{I}_O$ è semplicemente un operatore lineare. Algoritmi standard permettono di studiarne le principali caratteristiche. Questi aspetti algebrici sono ben noti. Nel presente contesto siamo interessati a studiare la dipendenza di $\mathbf{I}_O$ dalla distribuzione delle masse del corpo rigido, perchè

$\mathbf{I}_O$ determina il comportamento "rotatorio" del solido durante il moto. In effetti, ogni sistema rigido è caratterizzato dalla distribuzione delle masse dei suoi costituenti, ma queste intervengono nelle equazioni del moto soltanto attraverso la massa totale e la matrice d'inerzia (comunque "complicato" sia il sistema).

Dimostriamo ora le proprietà fondamentali di $\mathbf{I}_O$:

Si consideri l'operatore d'inerzia $\mathbf{I}_O : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$ *definito dall'equazione*

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \sum_{a=1}^{N} m_a \, \mathbf{r}_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_a).$$

- $\mathbf{I}_O$ *è lineare.*

Per verificare la linearità si usano le proprietà del prodotto vettoriale. Dalla definizione segue infatti che

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_O(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{w}) &= \sum_{a=1}^{N} m_a \, \mathbf{r}_a \wedge [(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{w}) \wedge \mathbf{r}_a] \\
&= \alpha \sum_{a=1}^{N} m_a \, \mathbf{r}_a \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}_a) + \beta \sum_{a=1}^{N} m_a \, \mathbf{r}_a \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_a) \\
&= \alpha\, \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) + \beta\, \mathbf{I}_O(\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

- *Vale la rappresentazione*

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \sum_{j,h=1}^{3} u_j \, I_{O,jh} \, \mathbf{k}_h \, , \qquad \textit{dove} \qquad I_{O,jh} = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{k}_h) = \sum_{a=1}^{N} m_a \, [\mathbf{r}_a^2 \, \delta_{jh} - r_{a,j} \, r_{a,h}]$$

è la matrice d'inerzia. La matrice d'inerzia è costante, è simmetrica, è una quantità additiva, dipende dall'orientamento degli assi solidali (ad origine fissata), ha dimensioni $[M \, L^2]$.

Determiniamo la matrice associata all'operatore. Operando nella base solidale $\{O, \mathbf{k}\}$, come abbiamo fatto sinora, risulta che gli elementi di matrice sono costanti determinate dalla distribuzione della massa del corpo rigido. Usando le proprietà degli operatori lineari, si ha

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_O(u_h \, \mathbf{k}_h) = \mathbf{I}_O(\mathbf{k}_h) \, u_h = \mathbf{k}_j \, [\, \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{k}_h) \,] \, u_h = \mathbf{k}_j \, I_{O,jh} \, u_h,$$

avendo posto

$$\begin{aligned}
I_{O,jh} = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{k}_h) &= \mathbf{k}_j \cdot \sum_{a=1}^{N} m_a \, \mathbf{r}_a \wedge (\mathbf{k}_h \wedge \mathbf{r}_a) \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a [\, \mathbf{r}_a^2 \; \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}_h - (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{k}_j) \, (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{k}_h) \,] \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a [\, \mathbf{r}_a^2 \; \delta_{jh} - \mathbf{r}_{a,j} \mathbf{r}_{a,h} \,].
\end{aligned}$$

Dall'ultima espressione è evidente che la matrice $I_{O,jh}$ è simmetrica,

$$I_{O,jh} = I_{O,hj}.$$

Gli elementi della matrice d'inerzia hanno dimensioni $[M\, L^2]$. Indicando con $(x_a,\, y_a,\, z_a)$ le componenti del vettore $\mathbf{r}_a$, l'espressione della matrice risulta

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \sum_a m_a({y_a}^2 + {z_a}^2) & -\sum_a m_a x_a y_a & -\sum_a m_a x_a z_a \\ -\sum_a m_a y_a x_a & \sum_a m_a({y_a}^2 + {x_a}^2) & -\sum_a m_a y_a z_a \\ -\sum_a m_a z_a x_a & -\sum_a m_a z_a y_a & \sum_a m_a({x_a}^2 + {y_a}^2) \end{pmatrix}$$

Come le quantità meccaniche fondamentali, anche **la matrice d'inerzia è una quantità additiva**: se il sistema è esprimibile come unione disgiunta di più parti, allora la matrice d'inerzia è somma della matrici d'inerzia delle singole parti.

Gli elementi di matrice appartenenti alla diagonale principale sono i **momenti d'inerzia** rispetto agli assi uscenti da O di versori $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_3$, rispettivamente. Ad esempio, $I_{O,11}$ è l'integrale del prodotto fra la massa del punto P_a e il quadrato della sua distanza dall'asse $\mathbf{k}_1$ - cioè $(y_a^2 + z_a^2)$. L'elemento $I_{O,11}$ è sempre positivo; può annullarsi soltanto se tutti i punti del sistema sono disposti lungo l'asse $\mathbf{k}_1$. Analoghe considerazioni valgono per $I_{O,22}$ e $I_{O,33}$. Gli elementi di matrice non diagonali sono chiamati **prodotti d'inerzia**.

Per risolvere i problemi di dinamica del corpo rigido è necessario conoscere la matrice d'inerzia. Tuttavia **non si richiede quasi mai di calcolare la matrice d'inerzia applicando la definizione**: in quasi tutti i libri di esercizi si trovano le informazioni essenziali per costruire le matrici d'inerzia delle figure continue ed omogenee più comuni, senza ricorrere al calcolo di integrali multipli. Le osservazioni che seguiranno permettono di risolvere il problema di ricostruire una matrice d'inerzia a partire dai dati forniti dai manuali.

- *Se $\mathbf{n} = n_h\, \mathbf{k}_h$ è un versore, lo scalare*

$$I_{O,\mathbf{n}} = \sum_{j,h=1}^{3} I_{O,jh}\, n_j\, n_h$$

è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e parallelo ad $\mathbf{n}$. Essendo $I_{O,\mathbf{n}}$ positivo, la matrice d'inerzia è definita positiva. Esiste una base solidale di origine O nella quale la matrice associata all'operatore $\mathbf{I}_O$ diventa diagonale; gli assi corrispondenti sono chiamati assi principali d'inerzia e sono paralleli agli autovettori di $I_{O,jh}$; gli elementi della matrice diagonale sono chiamati momenti principali d'inerzia e coincidono con gli autovalori (positivi) di $I_{O,jh}$.

Sia $\mathbf{n}$ il versore di un asse uscente da O e sia $I_{O,\mathbf{n}}$ il corrispondente momento d'inerzia. Il momento d'inerzia è definito dall'equazione

$$I_{O,\mathbf{n}} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, [\delta(\mathbf{r}_a, \mathbf{n})]^2$$

essendo $\delta(\mathbf{r}_a, \mathbf{n})$ la distanza del punto $\mathbf{r}_a$ dall'asse di versore $\mathbf{n}$. Si noti che il momento d'inerzia è positivo o nullo, ed è nullo se e solo se tutti i punti del sistema appartengono alla retta di versore $\mathbf{n}$ uscente da O; supponiamo per ora che non si verifichi questo caso degenere.

Si consideri l'espressione di $\mathbf{w} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u})$ e si sostituisca $\mathbf{n}$ al posto di $\mathbf{w}$ e di $\mathbf{u}$. Si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{n}) &= \sum_{a=1}^{N} m_a \left[{\mathbf{r}_a}^2\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{n})\, (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{n})\right] \\ &= \sum_{a=1}^{N} m_a \left[{\mathbf{r}_a}^2 - (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{n})^2\right] \\ &= \sum_{a=1}^{N} m_a\, [\delta(\mathbf{r}_a, \mathbf{n})]^2 \\ &= I_{O,\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Nel passaggio dalla riga 2 alla riga 3 è stato applicato il teorema di Pitagora (si richiede di considerare il piano determinato da $\mathbf{n}$ e da $\mathbf{r}'_a$, e di disegnare in questo piano il vettore $\mathbf{r}'_a$ e la retta di versore $\mathbf{n}$ uscente da O). Facendo riferimento alla rappresentazione dell'operatore d'inerzia si ha anche

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{n}) = \sum_{j,h=1}^{3} I_{O,jh}\, n_j\, n_h.$$

Segue per confronto che

$$I_{O,\mathbf{n}} = \sum_{j,h=1}^{3} I_{O,jh}\, n_j\, n_h.$$

Discende ancora dalle ultime osservazioni che **la forma quadratica associata alla matrice d'inerzia è definita positiva**. Per un vettore arbitrario $\mathbf{u}$ di versore $\mathbf{n}$ si ha infatti

$$\sum_{j,h=1}^{3} I_{O,jh}\, u_j\, u_h = u^2 \sum_{j,h=1}^{3} I_{O,jh}\, n_j\, n_k = u^2 I_{O,\mathbf{n}} > 0 \quad (= 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0),$$

essendo il momento d'inerzia una quantità positiva. Ricordando che la matrice d'inerzia è anche simmetrica si conclude che esiste una base nella quale la matrice d'inerzia assume la forma diagonale. I versori della base sono individuati dagli autospazi dell'operatore d'inerzia, mentre gli elementi della matrice diagonalizzata coincidono con i corrispondenti autovalori. Per determinare gli autovettori e gli autovalori si risolve l'equazione

$$\mathbf{I}_O \mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{u}, \quad \text{ossia} \quad (\mathbf{I}_O - \lambda\, \mathbf{I})\, \mathbf{u} = 0,$$

essendo $\mathbf{I}$ l'identità.

Gli assi principali d'inerzia sono determinati dalle direzioni degli autovettori della matrice d'inerzia. I momenti principali d'inerzia sono i corrispondenti autovalori.

Nel caso si considerino assi principali valgono le rappresentazioni

$$\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = I_{O,11}\, \omega_1\, \mathbf{k}_1 + I_{O,22}\, \omega_2\, \mathbf{k}_2 + I_{O,33}\, \omega_3\, \mathbf{k}_3,$$

$$\frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\, (I_{O,11}\, \omega_1^2 + I_{O,22}\, \omega_2^2 + I_{O,33}\, \omega_3^2).$$

Di conseguenza si semplificano anche le espressioni di $\mathbf{L}_O$ e di T.

Si dice che un corpo ha **struttura giroscopica** rispetto al polo O se esiste un autovalore di molteplicità due. In tal caso chiamiamo **asse giroscopico** l'asse normale al piano determinato dall'autovalore doppio.

- *Se π è un piano di simmetria, la normale a π definisce un asse principale d'inerzia in ogni punto O di π. Un asse di simmetria è anche principale d'inerzia.*

Dunque il problema della determinazione degli assi principali si semplifica notevolmente in presenza di **simmetrie**.

Per dimostrare questo risultato si ricorda che π è un piano di simmetria per un sistema continuo se π è un piano di simmetria in senso geometrico e se ogni coppia di punti $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}'_a$ legati dalla relazione di simmetria ha uguale massa. Si identifica π con il piano generato da $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. La tesi è che $\mathbf{I}_O(\mathbf{k}_3) = \lambda\, \mathbf{k}_3$. Poichè in generale si ha

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{k}_3) = I_{O,31}\, \mathbf{k}_1 + I_{O,32}\, \mathbf{k}_2 + I_{O,33}\, \mathbf{k}_3$$

è sufficiente dimostrare che $I_{O,31} = I_{O,32} = 0$. A tale scopo si osserva che

$$I_{O,31} = -\sum_{a=1}^{N} m_a z_a x_a = 0,$$

perchè per ogni coppia di particelle legate dalla condizione di simmetria m_a è identica, mentre il fattore $z_a x_a$ cambia segno. In modo analogo si prova che $I_{O,32} = 0$.

Proseguendo essenzialmente allo stesso modo si dimostra che un asse di simmetria è anche principale d'inerzia. Se infatti si considera un polo O giacente sull'asse di simmetria e si identifica $\mathbf{k}_3$ con il versore dell'asse di simmetria, si deve dimostrare che $I_{O,31} = I_{O,32} = 0$. La condizione segue dal fatto che si elidono i contributi di ogni coppia di punti posti in relazione di simmetria.

• *La matrice d'inerzia dipende dalla scelta del polo. Scegliendo due terne di assi solidali paralleli aventi origine in O e in G, rispettivamente, si ha*

$$I_{O,jh} = I_{G,jh} + M\,(d^2\,\delta_{jh} - d_j\,d_h),$$

essendo $\mathbf{d} = \mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O = d_h\,\mathbf{k}_h$ (teorema di Huygens-Steiner).

La matrice d'inerzia dipende dalla scelta del polo e dall'orientamento degli assi. **Determiniamo la legge di trasformazione degli elementi di matrice al variare del polo, quando rimane inalterata l'orientamento degli assi**. Per comodità consideriamo gli operatori d'inerzia riferiti al polo O e al polo G.

Indichiamo con $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ il vettore posizione rispetto agli assi di origine O e G, rispettivamente. Si ha per definizione

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{r}_a \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}_a), \qquad \mathbf{I}_G(\mathbf{u}) = \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{r}'_a \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}'_a),$$

Per confrontare $\mathbf{I}_O(\mathbf{u})$ e $\mathbf{I}_G(\mathbf{u})$ conviene porre $\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_O = \mathbf{d}$ ed osservare che $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_O = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_G) + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O)$; quest'ultima relazione si traduce in $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{d}$. Ricordando che per definizione di baricentro $\sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{r}'_a = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_O(\mathbf{u}) &= \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{r}_a \wedge (\,\mathbf{u} \wedge (\mathbf{r}_a) \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a\,(\mathbf{r}'_a + \mathbf{d}) \wedge [\,\mathbf{u} \wedge (\mathbf{r}'_a + \mathbf{d})] \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a\,(\mathbf{r}'_a + \mathbf{d}) \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}'_a + \mathbf{u} \wedge \mathbf{d}) \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{r}'_a \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}'_a + \mathbf{u} \wedge \mathbf{d}) + \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{d} \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}'_a + \mathbf{u} \wedge \mathbf{d}) \\
&= \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{r}'_a \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}'_a) + \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{d} \wedge (\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{d}) \\
&= \mathbf{I}_G(\mathbf{u}) + M\,\mathbf{d} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{d}) \\
&= \mathbf{I}_G(\mathbf{u}) + M\,[(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d})\,\mathbf{u} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{d}\,].
\end{aligned}$$

Il risultato vale indipendentemente dall'orientamento degli assi di origine O e G. Si suppone ora di scegliere terne di origine O e G aventi assi paralleli fra loro e di indicare con $\mathbf{k}$ i relativi versori. Ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{k}_h$ e proiettando su $\mathbf{k}_j$, oppure applicando la proprietà (C) si trova il legame fra le matrici d'inerzia nella forma seguente

$$\begin{aligned}
I_{O,jh} &= \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{k}_h) \\
&= \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{I}_G(\mathbf{k}_h) + M\,(d^2\,\delta_{jh} - d_j\,d_h) \\
&= I_{G,jh} + M\,(d^2\,\delta_{jh} - d_j\,d_h).
\end{aligned}$$

Questa formula generalizza il teorema di Huyghens-Steiner.

In ogni punto solidale con il corpo rigido è definita una matrice d'inerzia e quindi una terna di assi principali. La legge di trasformazione

$$I_{O,jh} = I_{G,jh} + M(d^2\delta_{jh} - d_j d_h)$$

implica che **la direzione degli assi principali varia da punto a punto**. Se infatti $\mathbf{I}_G$ è diagonale, in generale questo non è più vero per $\mathbf{I}_O$.

Le tavole proposte nei testi di uso più comune forniscono i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi principali baricentrali, nel caso di corpi rigidi omogenei di forma geometrica elementare (cilindri, ...,lamine quadrate, ...). Le formule dedotte precedentemente consentono di ricostruire la matrice d'inerzia rispetto ad assi con origine in un punto qualsiasi e paralleli agli assi principali baricentrali, facendo ricorso a semplici **operazioni algebriche**.

- *Nel caso di sistema rigido piano si ha*

$$I_{O,11} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, y_a^2, \qquad I_{O,22} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, x_a^2,$$

$$I_{O,13} = I_{O,23} = 0, \qquad I_{O,33} = \sum_{a=1}^{N} m_a\,(x_a^2 + y_a^2) = I_{O,11} + I_{O,22}$$

avendo identificato il piano del sistema con il piano generato dai versori $\mathbf{k}_1$ *e* $\mathbf{k}_2$.

Nelle più semplici applicazioni si studia la dinamica di **sistemi rigidi piani** (lamine). Vogliamo dedurre alcune proprietà della matrice d'inerzia valide in queste ipotesi.

Identifichiamo il piano π contenente il sistema con il piano generato dai versori $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. Supponiamo che il polo O sia un punto di π. Con riferimento alle definizioni si ha

$$I_{O,31} = -\sum_{a=1}^{N} m_a\, z_a x_a = 0, \qquad I_{O,32} = -\sum_{a=1}^{N} m_a\, z_a y_a = 0,$$

essendo $z_a = 0$ per ogni punto del sistema. Di conseguenza l'asse uscente da O e normale a π è principale d'inerzia. Ricordando le ulteriori definizioni

$$I_{O,11} = \sum_{a=1}^{N} m_a\,(y_a^2 + z_a^2), \qquad I_{O,22} = \sum_{a=1}^{N} m_a\,(x_a^2 + z_a^2), \qquad I_{O,33} = \sum_{a=1}^{N} m_a\,(x_a^2 + y_a^2),$$

dopo aver nuovamente osservato che tutti i punti del sistema hanno quota z_a nulla, si trova che

$$I_{O,11} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, y_a^2, \qquad I_{O,22} = \sum_{a=1}^{N} m_a\, x_a^2,$$

$$I_{O,33} = \sum_{a=1}^{N} m_a\,(x_a^2 + y_a^2) = I_{O,11} + I_{O,22}.$$

- *Le espressioni del momento angolare e dell'energia cinetica sono date da*

$$\mathbf{L}_O = M(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{v}_G + \sum_{j,h=1}^{3} \omega_j\, I_{G,jh}\, \mathbf{k}_h,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\, M\mathbf{v}_G^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{j,h=1}^{3} \omega_j\, I_{G,jh}\, \omega_h$$

nel caso di assi solidali generici e da

$$\mathbf{L}_O = M(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{v}_G + \omega_1\, I_{G,11}\, \mathbf{k}_1 + \omega_2\, I_{G,22}\, \mathbf{k}_2 + \omega_3\, I_{G,33}\, \mathbf{k}_3,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\, M\mathbf{v}_G^2 + \tfrac{1}{2}\, (I_{G,11}\, \omega_1^2 + I_{G,22}\, \omega_2^2 + I_{G,33}\, \omega_3^2),$$

nel caso di assi solidali principali d'inerzia.

Semplici sostituzioni danno le formule proposte nell'ultima affermazione dell'enunciato.

11. EQUAZIONI CARDINALI E MOTO DEL CORPO RIGIDO LIBERO

Lo **stato** di un sistema rigido ad un certo istante è definito dall'insieme delle posizioni e delle velocità dei suoi punti. I sei valori dei parametri che determinano posizione e orientamento di una terna solidale e i sei valori delle loro derivate ad un qualunque istante identificano lo stato corrispondente (ossia permettono di ricostruire posizione e velocità di tutti i punti del sistema). In altri termini, ogni stato è parametrizzato da 12 scalari. Dal punto di vista puramente cinematico i valori dei 12 parametri possono essere scelti arbitrariamente all'interno di opportuni intervalli (aperti). La quantità di moto, il momento angolare e l'energia cinetica sono funzioni dello stato del sistema, ossia dei 12 parametri (cfr. esempio del paragrafo precedente).

Quando si descrive la successione degli stati associati ad un moto assegnato si ottiene una famiglia di 12 funzioni del tempo: 6 funzioni descrivono l'evoluzione della terna solidale, le altre sei si ottengono per derivazione. Corrispondono a moti fisicamente realizzabili soltanto quelle sestuple di funzioni che rendono identicamente soddisfatte le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare.

- *Per ogni sistema rigido valgono in ogni istante le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare nella forma seguente*

  $$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{R}^{(e)}, \qquad \dot{\mathbf{L}}_G = \mathbf{M}_G^{(e)},$$

  dove G è il baricentro.

Ricordiamo che

$$\mathbf{P} = M\, \mathbf{v}_G, \qquad \mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}), \qquad \text{essendo} \qquad \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j,h=1}^{3} \omega_j\, I_{G,jh}\, \mathbf{k}_h.$$

Per calcolare la derivata temporale del momento angolare si osserva che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j,h=1}^{3} \omega_h\, I_{G,hj}\, \mathbf{k}_j\Big) \\
&= \sum_{j,h=1}^{3} \frac{d\omega_h}{dt} I_{G,hj}\, \mathbf{k}_j + \sum_{j,h=1}^{3} \omega_h\, I_{G,hj}\, \frac{d\mathbf{k}_j}{dt} \\
&= \mathbf{I}_G(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \sum_{j,h=1}^{3} \omega_h\, I_{G,hj}\, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}_j \\
&= \mathbf{I}_G(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \Big(\sum_{j,h=1}^{3} \omega_h\, I_{G,hj}\, \mathbf{k}_j\Big) \\
&= \mathbf{I}_G(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni cardinali si ottiene il seguente risultato:

- *Si consideri un sistema rigido. Durante il moto le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare assumono la forma*

$$M\,\mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)}, \qquad \mathbf{I}_G(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_G^{(e)}.$$

Nel caso di **polo O solidale e fisso** vale inoltre la rappresentazione

$$\mathbf{I}_O(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_O^{(e)}.$$

Le forze esterne intervengono nelle equazioni cardinali soltanto attraverso il loro risultante $\mathbf{R}^{(e)}$ e il loro momento $\mathbf{M}_O^{(e)}$. Sistemi di forze aventi uguale risultante e uguale momento rispetto a un polo qualsiasi sono chiamati equivalenti. A parità di condizioni iniziali, due sistemi di forze equivalenti applicati allo stesso corpo rigido producono lo stesso moto. Si può trarre vantaggio da questa situazione per semplificare la descrizione del sistema di forze assegnate. Si può dimostrare che ogni sistema di forze è equivalente all'azione di una coppia e di un opportuno vettore.

Per il momento ci limitiamo ad osservare che il sistema costituito dai "vettori peso applicati nei punti di un sistema discreto" è equivalente al sistema "peso totale applicato nel baricentro". Si ha infatti

$$\mathbf{R}^{\text{pesi}} = \sum_{a=1}^{N} m_a\,\mathbf{g} = M\mathbf{g}, \qquad \mathbf{M}_O^{\text{pesi}} = \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_O) \wedge m_a\,\mathbf{g} = M(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{g} = (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_O) \wedge M\mathbf{g};$$

ciò significa che i due sistemi hanno uguale risultante e uguale momento, qualunque sia il polo. Il risultato vale anche nel caso continuo, purchè le somme siano sostituite da integrali. Si noti infine che quando manca la condizione di rigidità **non** è più vero che sistemi di forze equivalenti producono lo stesso moto.

Studiamo infine il teorema dell'energia tenendo conto delle equazioni cardinali. In particolare ricaviamo l'espressione della potenza Π, definita come derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica T. Si ha

$$T = \frac{1}{2}\,M\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}).$$

Derivando rispetto al tempo e applicando le equazioni cardinali risulta

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{dT}{dt} \\
&= M\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{a}_G + \frac{1}{2}\left\{ \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \cdot [\, \mathbf{I}_G(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) \,] \right\} \\
&= \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \boldsymbol{\omega} \cdot [\, \mathbf{I}_G(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_G(\boldsymbol{\omega}) \,] \\
&= \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_G^{(e)},
\end{aligned}$$

avendo anche sfruttato la simmetria dell'operatore d'inerzia e il fatto che un triplo prodotto misto con due vettori uguali è nullo.

La stessa espressione vale per un qualunque altro polo solidale O:

$$\Pi = \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^{(e)}.$$

Raccogliamo i risultati precedenti nella formulazione del seguente teorema.

- **Teorema.** *Nel caso di sistema rigido (discreto o continuo) si ha*

$$\frac{dT}{dt} = \Pi = \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^{(e)}.$$

essendo O un qualunque polo solidale.

Il teorema precedente permette di calcolare l'espressione del **lavoro infinitesimo** nel caso di sistema rigido discreto o continuo. Si ha infatti

$$dL = \Pi\, dt = (\mathbf{v}_O\, dt) \cdot \mathbf{R}^{(e)} + (\boldsymbol{\omega}\, dt) \cdot \mathbf{M}_O^{(e)} = d\mathbf{x}_O \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \mathbf{u}\, d\theta \cdot \mathbf{M}_O^{(e)},$$

avendo posto $d\mathbf{x}_O = \mathbf{v}_O\, dt$ e $\boldsymbol{\omega}\, dt = \omega\, \mathbf{u}\, dt = d\theta\, \mathbf{u}$, dove $\mathbf{u}$ è il versore dell'asse di rotazione e θ è l'angolo di rotazione.