1. ROTAZIONI

Essendo data nello spazio fisico una terna di assi cartesiani ortogonali si vuole descrivere il moto di un corpo rigido. Ogni posizione assunta nel tempo è completamente specificata dalla conoscenza dell'**origine** e dell'**orientamento** di una **terna solidale**. La descrizione del comportamento dell'origine è assimilabile alla descrizione del moto di un punto e non crea particolari complicazioni. Fissiamo l'attenzione sugli assi solidali. Ogni orientamento da essi assunto può essere posto in corrispondenza con la trasformazione che la terna assegnata nello spazio deve subire affinchè i suoi assi diventino paralleli a quelli della terna solidale. Occorre quindi saper descrivere le **rotazioni**. Per semplificare, si può supporre per il momento che l'origine resti in quiete.

Dal momento che i sistemi di coordinate cartesiane ortogonali (ad origine fissata) sono in corrispondenza biunivoca con le basi ortonormali, il problema della caratterizzazione delle rotazioni può essere affrontato nei termini seguenti: si caratterizzano prima le trasformazioni ortogonali, intese come le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che mandano basi ortonormali in basi ortonormali; poi di introducono le rotazioni di assi definendole come una opportuna sottoclasse delle trasformazioni ortogonali.

Gli stessi elementi che caratterizzano il moto di un solido, vale a dire il moto dell'origine e la rotazione di una terna solidale, intervengono anche nella descrizione del comportamento di un osservatore mobile, come si vedrà in seguito.

Una trasformazione ortogonale $\mathbf{R}$ *è un endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *che trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. La matrice associata ad una trasformazione ortogonale è chiamata matrice ortogonale.*

La matrice $\mathbf{R}$ *è ortogonale se e solo se*

$$R_{ij}R_{ih} = \delta_{jh} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^T\mathbf{R} = I,$$

essendo $R_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_j)$.

Infatti, un endomorfismo $\mathbf{R}$ è determinato dalla conoscenza dei trasformati degli elementi di una base. Sia dunque $\mathbf{e}$ una base ortonormale di V ed siano $\mathbf{k}_j$ i trasformati dei versori $\mathbf{e}_j$; si ha allora

$$\mathbf{k}_j = \mathbf{R}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i\,[\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_j)] = \mathbf{e}_i\,R_{ij}.$$

La terna di vettori $\mathbf{k}_j$ definisce una base ortonormale se, e solo se,

$$\delta_{jh} = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}_h = (\mathbf{e}_i R_{ij}) \cdot (\mathbf{e}_s R_{sh}) = R_{ij}R_{sh}\,(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_s) = R_{ij}R_{sh}\,\delta_{is} = R_{ij}R_{ih},$$

avendo sfruttato l'identità $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_s = \delta_{is}$, diretta conseguenza dell'ortonormalità della base $\mathbf{e}$. Si osserva ancora che

$$R_{ij}R_{ih} = \{\mathbf{R}^T\}_{ji}R_{ih} = \{\mathbf{R}^T\mathbf{R}\}_{jh}.$$

Nelle notazioni adottate le componenti di $\mathbf{k}_j$ nella base $\mathbf{e}$ formano la colonna j della matrice $\mathbf{R}$. Questa identificazione fornisce il significato geometrico degli elementi di $\mathbf{R}$ e l'interpretazione geometrica della condizione $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$.

D'ora in avanti l'equazione $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ è assunta come caratterizzazione delle matrici ortogonali. Calcolando il determinante di ambo i membri e ricordando che $\det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R}$ si trova che

$$(\det \mathbf{R})^2 = 1, \qquad \text{ossia} \qquad \det \mathbf{R} = \pm 1.$$

Si conclude che una matrice ortogonale è **invertibile**.

Dalla condizione $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ si deduce che $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, essendo $\mathbf{R}^{-1}$ l'inversa di $\mathbf{R}$. Scrivendo la definizione di inversa nella forma $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$ si trova che

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}.$$

Si può concludere che **l'ordine di scrittura delle matrici $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}^T$ nella caratterizzazione delle trasformazioni ortogonali è inessenziale.**

Le trasformazioni ortogonali sono anche caratterizzabili come gli endomorfismi che **lasciano invariato il prodotto scalare** di due vettori qualsiasi. Di conseguenza lasciano anche invariata la distanza fra due punti qualsiasi. Per questo motivo ci dobbiamo aspettare che le trasformazioni ortogonali intervengano nella descrizione del moto dei corpi rigidi, ricordando che un corpo rigido è caratterizzato dal fatto che la distanza fra due suoi punti qualsiasi è costante nel tempo.

Vale l'equivalenza

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \textit{per ogni} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}.$$

Si osserva preliminarmente che

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(x_j \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_j)\, x_j = \mathbf{e}_i\, R_{ij}\, x_j.$$

Poi si considera la catena di identità

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{y}) = (\mathbf{e}_i\, R_{ij}\, x_j) \cdot (\mathbf{e}_h\, R_{hk}\, y_k) = R_{ij} R_{ik}\, x_j y_k = \{\mathbf{R}^T\mathbf{R}\}_{jk}\, x_j y_k.$$

Si osserva inoltre che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_j \mathbf{e}_j) \cdot (y_k \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}\, x_j y_k.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si vede che la condizione $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ equivale alla condizione $\{\mathbf{R}^T\mathbf{R}\}_{st} = \delta_{st}$.

Le matrici ortogonali formano un **gruppo** rispetto alla moltiplicazione, in quanto il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale, esiste un elemento unità dato dalla matrice $\mathbf{I}$, e, come abbiamo visto, ogni matrice ortogonale ammette un inverso. Tale gruppo è chiamato il gruppo ortogonale di ordine 3 e denotato $O(3)$. Il gruppo $O(3)$ è noncommutativo, nel senso che cambiando l'ordine di esecuzione di due rotazioni non si ottiene necessariamente lo stesso risultato. Verifichiamo per esercizio che l'insieme delle matrici ortogonali è chiuso rispetto alla moltiplicazione (nel seguito applicheremo questa proprietà). Siano dunque $\mathbf{R}_1$ ed $\mathbf{R}_2$ tali che

$$\mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_2 = \mathbf{I}.$$

Si vuole dimostrare che anche il prodotto $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ è una matrice ortogonale, ossia che

$$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \mathbf{I}.$$

A tale scopo basta osservare che

$$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T\mathbf{I}\mathbf{R}_2 = \mathbf{I}.$$

Nella nostra trattazione ci limitiamo a considerare basi destrorse (o destre). Una base è **destrorsa** se una persona in piedi con il capo nella direzione di $\mathbf{e}_3$ e il volto nella direzione di $\mathbf{e}_2$ vede $\mathbf{e}_1$ alla propria destra; equivalentemente, la rotazione di $\pi/2$ che porta $\mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_2$ appare antioraria, se vista da $\mathbf{e}_3$; oppure ancora, pollice, indice e medio della mano destra possono essere sovrapposti (senza fratture) ai versori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$, rispettivamente.

Si considerino la basi destre $\mathbf{e}$ e $\mathbf{k}$, nell'ipotesi che $\mathbf{k}$ sia ottenuta da $\mathbf{e}$ mediante una rotazione del piano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ attorno ad $\mathbf{e}_3$ di un angolo β, in senso antiorario. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{e}_1 \cos\beta + \mathbf{e}_2 \sin\beta, \\
\mathbf{k}_2 &= -\mathbf{e}_1 \sin\beta + \mathbf{e}_2 \cos\beta, \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Ricordando che, in conseguenza della definizione $\mathbf{k}_j = \mathbf{e}_i\, R_{ij}$, le componenti dei $\mathbf{k}$ generano le colonne della matrice $\mathbf{R}$, nel caso in esame si ha

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti in particolare che $\det \mathbf{R} = 1$.

È noto che una rotazione può essere descritta tramite l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione. Se la matrice $\mathbf{R}$ descrive una rotazione, deve essere possibile ricostruire l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione mediante operazioni eseguite sugli elementi della matrice. Affrontiamo per primo il problema di **trovare il versore n dell'asse di rotazione, data la matrice R**.

Si osserva che appartengono all'asse di rotazione tutti quei vettori (se ne esistono) che sono lasciati invariati dalla trasformazione $\mathbf{R}$. La condizione è espressa dall'equazione

$$\mathbf{R}\,\mathbf{n} = \mathbf{n}.$$

Passando alla scrittura in componenti si ottiene un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite. Se è assegnata una specifica matrice $\mathbf{R}$, ad esempio la $\mathbf{R}$ considerata precedentemente, è facile verificare se il sistema ammette soluzioni non banali. Il vero problema consiste nel provare che ogni matrice di rotazione $\mathbf{R}$ determina un corrispondente versore $\mathbf{n}$. Si osserva allora che l'equazione $\mathbf{R}\,\mathbf{n} = \mathbf{n}$ è un caso speciale della relazione $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, dove il vettore $\mathbf{n}$ è caratterizzato come **autovettore di R con autovalore** 1. Pertanto occorre dimostrare che ogni matrice di rotazione ammette l'autovalore 1. Il corrispondente autovettore normalizzato identifica il versore dell'asse di rotazione.

Lo scalare 1 è autovalore di $\mathbf{R}$ se è vera l'equazione

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0.$$

Per verificare che il determinante si annulla si considera la catena di identità

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = -(\mathbf{I} - \mathbf{R}) = -(\mathbf{R}\mathbf{R}^T - \mathbf{R}) = -\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}).$$

Risulta quindi che

$$\mathbf{R} - \mathbf{I} = -\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^T - \mathbf{I});$$

calcolando il determinante di ambo i membri si trova l'ulteriore identità

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = \det[-\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})].$$

Si consideri ora il secondo membro: per le proprietà dei determinanti e la condizione $\det \mathbf{R} = 1$ si trova

$$\det[-\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})] = (-1)^3 \det[\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})] = -\det \mathbf{R}\, \det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}).$$

Sostituendo questo risultato nella precedente identità sui determinanti si ottiene

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0.$$

Dunque,

Ogni matrice di rotazione ammette l'autovalore 1 *e quindi l'equazione* $\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n}$ *per l'asse di rotazione è risolubile.*

Si dimostra inoltre che questo autovettore è unico.

Questo risultato traduce un teorema scoperto da Eulero nel 1776. Eulero trovò che ogni spostamento di un **corpo rigido** tale che un punto resti fisso (ossia ogni rotazione generata da una matrice $\mathbf{R}$, nel nostro linguaggio) è una "rotazione attorno a un asse". In altre parole, ogni cambiamento di orientamento di un corpo rigido è indotto da una rotazione attorno a qualche asse, opportunamente definito.

2. ANGOLI DI EULERO

Abbiamo già ricavato la matrice di rotazione nel caso del piano. Affrontiamo ora il problema della descrizione esplicita della matrice di rotazione nello spazio. Osserviamo preliminarmente che se in un problema si deve determinare una rotazione (ad esempio quella che in ogni istante assegna la posizione di un corpo rigido nello spazio) sembra naturale assumere come incognite l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione. Si potrebbe mostrare che questa scelta **non** è conveniente perchè dà origine ad equazioni di moto troppo complicate; si può aggiungere che, conoscendo angolo ed asse di rotazione, può essere difficile ricostruire la posizione del corpo rotante ad un istante generico, problema che invece è al centro del nostro interesse. È meglio scegliere come incognita la matrice di rotazione, e determinare a posteriori l'asse e l'angolo di rotazione. In realtà, si possono dedurre le equazioni del moto senza esplicitare l'angolo e l'asse di rotazione; esaminando qualche caso particolare si vedrà inoltre che è possibile "visualizzare" il moto prescindendo dalla determinazione di angolo ed asse di rotazione.

Dalla relazione $\mathbf{k}_j = \mathbf{e}_i R_{ij}$ si deduce che le **colonne** della matrice $\mathbf{R}$ sono formate dalle componenti dei versori della nuova base ortonormale $\mathbf{k}$. Se si conosce l'orientamento della base ruotata è data è facile scrivere la matrice di rotazione, ma se si affronta un problema dinamico la posizione della base ruotata è incognita. Cerchiamo quindi un'altra strada, che prescinda dalla conoscenza a priori dell'orientamento della base ruotata $\mathbf{k}$.

Iniziamo dalla seguente osservazione. Se si conoscono due versori della base ruotata, la direzione del terzo versore è univocamente determinata come direzione normale al piano generato dai primi due. Questo commento di natura geometrica fa capire che le colonne della matrice R non sono tutte indipendenti fra loro. In termini algebrici, il sistema

$$R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}$$

stabilisce che i 9 elementi della matrice di rotazione sono legati da 6 equazioni, per cui **soltanto 3 elementi di R sono indipendenti**; i rimanenti 6 elementi sono determinabili **algebricamente** risolvendo il sistema. Concludiamo che tre elementi di matrice (o tre proiezioni di versori ruotati) dovrebbero esaurire la descrizione della matrice $\mathbf{R}$.

Se in un problema si deve trovare una rotazione può essere scomodo assumere come incognite 3 elementi di matrice o 3 proiezioni di versori. Quando si deve descrivere l'orientamento della terna solidale per studiare il moto di un corpo rigido è preferibile riguardare come parametri incogniti 3 angoli opportunamente scelti, tipicamente gli angoli di Eulero, ed esprimere gli elementi della matrice di rotazione in funzione di questi angoli. In termini astratti, gli angoli di Eulero forniscono una rappresentazione parametrica dell'insieme delle matrici di rotazione. Per definire questi angoli si fattorizza la rotazione che trasforma la base $\mathbf{e}$ nella base $\mathbf{k}$ nel prodotto di 3 rotazioni successive attorno ad assi opportuni. I corrispondenti angoli di rotazione, gli angoli di Eulero, diventano le incognite del problema. Noti gli angoli di Eulero si possono ricostruire gli elementi della matrice di rotazione $\mathbf{R}$. Il procedimento è fondato sul fatto che la composizione di rotazioni è ancora una rotazione.

Siano $\mathbf{e}$ *e* $\mathbf{k}$ *basi ortonormali assegnate in posizione generica.*
L'angolo di nutazione θ *è l'angolo formato da* $\mathbf{e}_3$ *con* $\mathbf{k}_3$*, orientato da* $\mathbf{e}_3$ *verso* $\mathbf{k}_3$*. Si ha* $0 < \theta < \pi$*.*
L'asse dei nodi è la retta di versore $\mathbf{N}$ *definita come intersezione dei piani generati da* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *e* $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ *e orientata in modo che la rotazione descritta dall'angolo* θ *sia antioraria.*
L'angolo di precessione ϕ *è l'angolo formato da* $\mathbf{e}_1$ *con* $\mathbf{N}$*, orientato da* $\mathbf{e}_1$ *verso* $\mathbf{N}$*. Risulta* $0 < \phi < 2\pi$*.*
L'angolo di rotazione propria ψ *è l'angolo compreso fra* $\mathbf{N}$ *ed* $\mathbf{k}_1$*, orientato da* $\mathbf{N}$ *verso* $\mathbf{k}_1$*; si ha* $0 < \psi < 2\pi$*.*
I tre parametri θ, ϕ, ψ *sono chiamati angoli di Eulero.*

Gli assi delle rotazioni descritte dagli angoli θ, ϕ e ψ sono dati dai versori $\mathbf{N}$, $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{k}_3$, rispettivamente.

In condizioni di genericità le due basi $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{k}$ determinano univocamente una terna di parametri. Vale anche il viceversa nel senso che, data una terna di angoli di Eulero, si possono realizzare tre rotazioni successive che permettono di ricostruire la posizione della base $\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathbf{e}$. Si procede nella maniera seguente.

(1) **Rotazione di un angolo ϕ attorno all'asse $\mathbf{e}_3$.** In questo modo il versore $\mathbf{e}_3$ resta invariato mentre $\mathbf{e}_1$ assume la posizione $\mathbf{N}$ della linea dei nodi. Il trasformato di $\mathbf{e}_2$ è chiamato $\boldsymbol{\xi}$. Introducendo il prodotto righe per colonne si può rappresentare il legame fra la base $\mathbf{e}$ e la sua immagine nei termini compatti seguenti

$$(\,\mathbf{N}\quad \boldsymbol{\xi}\quad \mathbf{e}_3\,) = (\,\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_3\,)\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =: (\,\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_3\,)\,\mathbf{R}_1.$$

(2) **Rotazione di un angolo θ attorno alla linea dei nodi $\mathbf{N}$.** In questo caso il versore $\mathbf{N}$ resta invariato mentre il versore $\mathbf{e}_3$ ruota attorno ad $\mathbf{N}$ assumendo la posizione che identifichiamo con $\mathbf{k}_3$. L'immagine del versore $\boldsymbol{\xi}$ è indicata con $\boldsymbol{\eta}$. In questo caso si ha

$$(\,\mathbf{N}\quad \boldsymbol{\eta}\quad \mathbf{k}_3\,) = (\,\mathbf{N}\quad \boldsymbol{\xi}\quad \mathbf{e}_3\,)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} =: (\,\mathbf{N}\quad \boldsymbol{\xi}\quad \mathbf{e}_3\,)\,\mathbf{R}_2.$$

(3) **Rotazione di un angolo ψ attorno a $\mathbf{k}_3$.** Il versore $\mathbf{k}_3$ resta invariato mentre $\mathbf{N}$ diventa un nuovo versore che identifichiamo con $\mathbf{k}_1$; $\mathbf{k}_2$ è il trasformato di $\boldsymbol{\eta}$. Si trova

$$(\,\mathbf{k}_1\quad \mathbf{k}_2\quad \mathbf{k}_3\,) = (\,\mathbf{N}\quad \boldsymbol{\eta}\quad \mathbf{k}_3\,)\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =: (\,\mathbf{N}\quad \boldsymbol{\eta}\quad \mathbf{k}_3\,)\,\mathbf{R}_3.$$

Operando due sostituzioni possiamo scrivere esplicitamente l'espressione della matrice $\mathbf{R}$ che lega le due terne $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{e}$ mediante l'equazione $\mathbf{k}_j = \mathbf{e}_i R_{ij}$. Si trova

$$(\,\mathbf{k}_1\quad \mathbf{k}_2\quad \mathbf{k}_3\,) = (\,\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_3\,)\,\mathbf{R}_1\,\mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_3 = (\,\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_3\,)\,\mathbf{R},$$

dove $\mathbf{R}$ è definita dall'equazione

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

dalla quale segue, valutando esplicitamente i prodotti,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\cos\psi\sin\phi & \sin\theta\sin\phi\\ \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\sin\psi\cos\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\psi\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Si consideri il caso $0 \le \theta \le \pi$. Si può osservare che la relazione fra terne di valori di angoli di Eulero e matrici di rotazione non è sempre biunivoca. In particolare, se $\theta = 0$ gli angoli ϕ e ψ intervengono nella scrittura della matrice R solo mediante la loro somma; se invece $\theta = \pi$ allora R dipende dagli angoli ϕ e ψ solo attraverso la loro differenza. Più semplicemente ancora, nel caso $\theta = 0$ non è definito l'asse dei nodi. All'origine di questa complicazione sta il fatto che la parametrizzazione indotta dagli angoli di

Eulero ha intrinsecamente natura locale; si possono aggirare le difficoltà cambiando la scelta della terna fissa.

Prescindendo da questi casi singolari, gli angoli di Eulero permettono di introdurre una comoda rappresentazione parametrica delle matrici di rotazione.

Tornando alle già menzionate applicazioni di natura cinematica, la rotazione nel tempo di una terna mobile di assi aventi versori $\mathbf{k}$ è descritta assegnando i tre angoli di Eulero in funzione del tempo. Se il moto è incognito, gli angoli di Eulero fanno parte delle incognite del problema. Si vedrà che la scrittura delle equazioni differenziali del moto in termini di angoli di Eulero è particolarmente vantaggiosa.

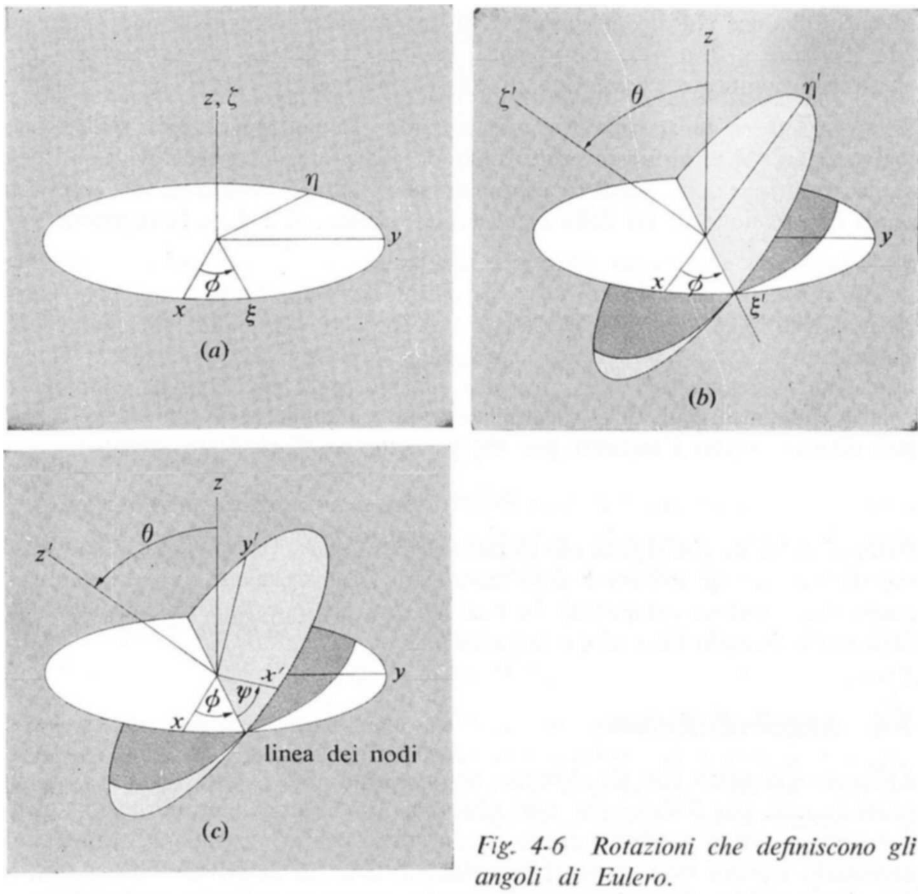

Fig. 4-6 Rotazioni che definiscono gli angoli di Eulero.

3. DERIVATA ASSOLUTA E RELATIVA

Siano $\mathcal{O}^{(a)} = (O^*, \mathbf{e})$ e $\mathcal{O}^{(r)} = (O, \mathbf{k})$ due osservatori in moto l'uno rispetto all'altro. Stabiliamo di chiamare $\mathcal{O}^{(a)}$ **osservatore assoluto** e $\mathcal{O}^{(r)}$ **osservatore relativo**; per il momento i due attributi "assoluto" e "relativo" sono puramente convenzionali. Soltanto al momento di costruire la dinamica relativa $\mathcal{O}^{(a)}$ sarà identificato con un osservatore inerziale.

Il moto dell'osservatore relativo rispetto a quello assoluto è determinato dalla conoscenza dell'equazione del moto dell'origine O, $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_O(t)$, e dalla conoscenza dell'orientamento degli assi mobili $\mathbf{k}$ in funzione del tempo. A tale scopo si possono assegnare in funzione del tempo gli angoli di Eulero θ, ψ, ϕ oppure la matrice di rotazione R.

L'osservatore $\mathcal{O}^{(r)}$ si muove di moto traslatorio rispetto ad $\mathcal{O}^{(a)}$ se l'orientamento della base $\mathbf{k}$ non varia nel tempo.
Un moto traslatorio è rettilineo se la traiettoria di O è una retta; è rettilineo uniforme se la retta è percorsa da O con velocità costante.
L'osservatore mobile è in moto rotatorio se esiste un punto C degli assi di centro O e versori $\mathbf{k}$ che si mantiene in quiete rispetto ad $\mathcal{O}^{(a)}$.
Il moto è rotatorio assiale se esiste una retta r solidale con $\mathcal{O}^{(r)}$ che si mantiene in quiete rispetto all'osservatore assoluto.

Supponiamo di identificare $\mathcal{O}^{(r)}$ con una giostra ruotante. Sia O il centro della giostra. Identifichiamo $\mathcal{O}^{(a)}$ con un osservatore fissato al suolo. Sia infine OP un raggio disegnato sulla giostra.

Il raggio OP è fermo (costante) rispetto alla giostra ed è mobile (funzione del tempo) rispetto al suolo. Ci dobbiamo aspettare che la derivata temporale del vettore (costante) OP rispetto ad $\mathcal{O}^{(r)}$ sia **nulla**, e che sia **non nulla** la derivata del vettore (funzione del tempo) OP rispetto ad $\mathcal{O}^{(a)}$.

L'esempio indica che, in generale, il risultato dell'operazione di derivazione rispetto al tempo deve dipendere dalla scelta dell'osservatore. Ci proponiamo di studiare la relazione che intercorre fra le derivate temporali definite in $\mathcal{O}^{(r)}$ e in $\mathcal{O}^{(a)}$.

Denotiamo con

$$\frac{d_a}{dt} \quad e \quad \frac{d_r}{dt}$$

le derivate rispetto al tempo nel riferimento assoluto e in quello relativo, rispettivamente.

Se $f(t)$ è una funzione scalare del tempo si ha

$$\frac{d_a f}{dt} = \frac{d_r f}{dt} = \dot{f}.$$

Infatti, si consideri una funzione scalare del tempo $f(t)$. Come conseguenza ultima dell'assioma di tempo assoluto i due osservatori $\mathcal{O}^{(a)}$ e $\mathcal{O}^{(r)}$ usano la stessa coordinata temporale, e quindi danno la stessa descrizione della funzione f. Si ha allora

$$\frac{d_a f}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{d_r f}{dt},$$

ossia derivata assoluta e relativa sono uguali e coincidono con l'usuale derivata rispetto al tempo di f, denotata col punto sovrapposto.

Si consideri ora un vettore $\mathbf{u}(t)$. Il derivato di $\mathbf{u}$ è un vettore avente per componenti le derivate delle componenti. Derivata assoluta e relativa differiscono in quanto sono diverse le componenti del vettore $\mathbf{u}$ nelle basi $\mathbf{e}$ e $\mathbf{k}$. Più precisamente, si considerano le rappresentazioni

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_i\,\mathbf{e}_i & \text{in} \quad \mathcal{O}^{(a)} \\ u'_j\,\mathbf{k}_j & \text{in} \quad \mathcal{O}^{(r)}. \end{cases}$$

In accordo con la definizione dell'operazione di derivazione di un vettore si ha

$$\frac{d_a \mathbf{u}}{dt} := \frac{d_a(u_i\,\mathbf{e}_i)}{dt} = \dot{u}_i\,\mathbf{e}_i,$$

$$\frac{d_r \mathbf{u}}{dt} := \frac{d_r(u'_j\,\mathbf{k}_j)}{dt} = \dot{u}'_j\,\mathbf{k}_j.$$

Si vuole trovare il legame fra derivata temporale assoluta e relativa dello stesso vettore $\mathbf{u}$. Per confrontare le due definizioni si osserva che vale la catena di identità

$$\begin{aligned}\frac{d_a\mathbf{u}}{dt} &= \frac{d_a(u'_j\,\mathbf{k}_j)}{dt} \\ &= \dot{u}'_j\,\mathbf{k}_j + u'_j\,\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt} \\ &= \frac{d_r\mathbf{u}}{dt} + u'_j\,\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt},\end{aligned}$$

ove si è tenuto conto del fatto che i versori $\mathbf{k}_j$ sono interpretabili come vettori funzioni del tempo in $\mathcal{O}^{(a)}$. Per completare la costruzione occorre il seguente risultato.

Le derivate temporali assolute dei versori della terna mobile sono date dalle formule di Poisson

$$\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt} = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{k}_j \qquad (j=1,2,3),$$

dove il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ *è definito da*

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{3}\mathbf{k}_h\wedge\frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt}.$$

La più semplice dimostrazione delle formule di Poisson è ottenuta sostituendo la definizione di $\boldsymbol{\omega}$ nel secondo membro e verificando che si ottiene una identità. Con calcoli immediati si trova

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{k}_j &= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{h=1}^{3}\mathbf{k}_h\wedge\frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt}\right)\wedge\mathbf{k}_j \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{3}\left[(\mathbf{k}_h\cdot\mathbf{k}_j)\,\frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt} - \left(\frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt}\cdot\mathbf{k}_j\right)\mathbf{k}_h\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{3}\left[\delta_{hj}\frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt} + \left(\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt}\cdot\mathbf{k}_h\right)\mathbf{k}_h\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt} + \frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt}\right] \\ &= \frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt}.\end{aligned}$$

Nel passaggio dalla seconda alla terza riga è stata utilizzata l'identità

$$\mathbf{k}_h\cdot\mathbf{k}_j = \delta_{hj}$$

dalla quale segue, calcolando la derivata assoluta rispetto al tempo di ambo i membri,

$$\frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt}\cdot\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_h\cdot\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt} = 0, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d_a\mathbf{k}_h}{dt}\cdot\mathbf{k}_j = -\mathbf{k}_h\cdot\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt},$$

Il legame fra derivata temporale assoluta e relativa del vettore $\mathbf{u}$ *è dato da*

$$\frac{d_a\mathbf{u}}{dt} = \frac{d_r\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{u}.$$

Si considera l'ultima espressione ottenuta per la derivata assoluta del vettore $\mathbf{u}$ e si sostituiscono le formule di Poisson. Risulta

$$\frac{d_a\mathbf{u}}{dt} = \frac{d_r\mathbf{u}}{dt} + u'_j\,\frac{d_a\mathbf{k}_j}{dt} = \frac{d_r\mathbf{u}}{dt} + u'_j\,\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{k}_j = \frac{d_r\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\wedge(u'_j\,\mathbf{k}_j).$$

Il vettore $\mathbf{u}$ è arbitrario. Se si pone $\mathbf{u}=\boldsymbol{\omega}$ e si applica il teorema precedente si deduce che le derivate temporali assoluta e relativa del vettore $\boldsymbol{\omega}$ coincidono, dal momento che $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}=0$. Tenendo conto di questa osservazione si può evitare di distinguere fra derivata temporale assoluta e relativa di $\boldsymbol{\omega}$ ponendo semplicemente

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d_r\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d_a\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Se $\boldsymbol{\omega}=0$ i versori $\mathbf{k}_j$ sono costanti nel tempo. Essendo costante l'orientamento della base $\mathbf{k}$ si conclude che l'osservatore $\mathcal{O}^{(r)}$ è in moto traslatorio rispetto ad $\mathcal{O}^{(a)}$.

Resta ancora da dimostrare che $\boldsymbol{\omega}$ è effettivamente una **velocità angolare**. Per ora si osservi soltanto che $\boldsymbol{\omega}$ si annulla nel caso di moto traslatorio.

A prima vista, può sembrare che le formule di Poisson siano di scarsa utilità pratica, dal momento che sono semplicemente delle identità: la "derivata temporale assoluta dei versori mobili" è scritta per mezzo del vettore $\boldsymbol{\omega}$, che a sua volta è definito per mezzo delle "derivate temporali assolute dei versori mobili". Si vedrà che le formule di Poisson sono vantaggiose dopo che sarà stato dimostrato che il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è effettivamente una **velocità angolare** e sarà stato presentato un procedimento per costruirlo in funzione degli angoli che descrivono la rotazione della base mobile

4. VELOCITÀ ANGOLARE

Si consideri un osservatore $\mathcal{O}^{(r)}$ in moto rotatorio assiale rispetto ad $\mathcal{O}^{(a)}$. Sia O un punto dell'asse di rotazione, di versore $\mathbf{n}$. Si può porre $\mathcal{O}^{(a)}=(O,\mathbf{e})$ e $\mathcal{O}^{(r)}=(O,\mathbf{k})$, essendo $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}_3=\mathbf{n}$. Sia $\theta(t)$ l'angolo di rotazione, ossia l'angolo formato da $\mathbf{e}_1$ con $\mathbf{k}_1$, orientato da $\mathbf{e}_1$ verso $\mathbf{k}_1$. Semplici considerazioni geometriche mostrano che

$$\mathbf{k}_1(t)=\cos\theta(t)\,\mathbf{e}_1+\sin\theta(t)\,\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{k}_2(t)=-\sin\theta(t)\,\mathbf{e}_1+\cos\theta(t)\,\mathbf{e}_2,\qquad \mathbf{k}_3=\mathbf{e}_3.$$

Le precedenti relazioni definiscono gli elementi $R_{ij}(t)$ della matrice di rotazione. Derivando rispetto al tempo e confrontando con le definizioni dei versori $\mathbf{k}$ si ottiene

$$\frac{d_a\mathbf{k}_1}{dt}=\dot\theta\,\mathbf{k}_2,\qquad \frac{d_a\mathbf{k}_2}{dt}=-\dot\theta\,\mathbf{k}_1,\qquad \frac{d_a\mathbf{k}_3}{dt}=0.$$

Sostituendo nella definizione di $\boldsymbol{\omega}$ risulta

$$\boldsymbol{\omega}=\dot\theta\,\mathbf{k}_3.$$

Si conclude che il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è diretto lungo l'asse di rotazione; vista dal versore $\mathbf{k}_3$ la rotazione appare antioraria se $\dot\theta$ è positivo, oraria nel caso opposto. Tutta la costruzione si riassume nella seguente affermazione: **nel caso di rotazione attorno a un asse fisso la velocità angolare è diretta lungo quell'asse, è orientata nel verso da cui la rotazione appare antioraria ed ha modulo pari alla derivata dell'angolo di rotazione rispetto al tempo**.

L'osservazione precedente, in apparenza poco significativa dal punto di vista operativo, è completata dalla dimostrazione del seguente teorema, che offre un metodo pratico per la costruzione della velocità angolare in situazioni di tipo generico, evitando di cadere nel circolo vizioso menzionato alla fine del paragrafo precedente. Si noti che il procedimento richiede soltanto l'informazione sulla forma di $\boldsymbol{\omega}$ nel caso di moto rotatorio assiale.

Siano $\mathcal{O}^{(1)}$, $\mathcal{O}^{(2)}$, $\mathcal{O}^{(3)}$ tre osservatori. Siano $\boldsymbol{\omega}_{12}$, $\boldsymbol{\omega}_{13}$ e $\boldsymbol{\omega}_{23}$ le velocità angolari di $\mathcal{O}^{(2)}$ rispetto a $\mathcal{O}^{(1)}$, di $\mathcal{O}^{(3)}$ rispetto a $\mathcal{O}^{(1)}$ e di $\mathcal{O}^{(3)}$ rispetto a $\mathcal{O}^{(2)}$. Si ha

$$\boldsymbol{\omega}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{23} = \boldsymbol{\omega}_{13}.$$

Si indichino con d_1/dt, d_2/dt e d_3/dt le derivate rispetto al tempo associate ai tre osservatori assegnati. Poi si consideri un vettore qualsiasi $\mathbf{u}$ e si scrivano le identità

$$\frac{d_1\mathbf{u}}{dt} = \frac{d_2\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{12} \wedge \mathbf{u},$$

$$\frac{d_2\mathbf{u}}{dt} = \frac{d_3\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{23} \wedge \mathbf{u},$$

$$\frac{d_1\mathbf{u}}{dt} = \frac{d_3\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{13} \wedge \mathbf{u},$$

ottenute applicando ripetutamente il teorema di Poisson. Sostituendo nella prima equazione l'espressione di $d_2\mathbf{u}/dt$ ricavata dalla seconda e sottraendo la terza equazione si trova che

$$(\boldsymbol{\omega}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{23} - \boldsymbol{\omega}_{13}) \wedge \mathbf{u} = 0.$$

Dall'arbitrarietà di $\mathbf{u}$ segue la tesi.

Parafrasando il contenuto del teorema si può affermare che nel caso di due rotazioni successive **le velocità angolari si sommano**. Evidentemente, la conclusione si estende al caso di un numero finito di rotazioni. Il risultato sarà molto utile nella risoluzione di problemi di meccanica del corpo rigido.

- **Esempio.** Determinare l'espressione della **velocità angolare** della base $\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathbf{e}$ **quando la rotazione è descritta mediante gli angoli di Eulero** $\theta(t)$**,** $\psi(t)$**,** $\phi(t)$**.**

Applicando il precedente teorema e le considerazioni sulle rotazioni attorno a un asse fisso risulta

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\,\mathbf{e}_3 + \dot\theta\,\mathbf{N} + \dot\psi\,\mathbf{k}_3.$$

Considerazioni di tipo geometrico mostrano che rispetto alla base fissa risulta

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot\theta\cos\phi + \dot\psi\sin\theta\sin\phi)\,\mathbf{e}_1 + (\dot\theta\sin\phi - \dot\psi\sin\theta\cos\phi)\,\mathbf{e}_2 + (\dot\phi + \dot\psi\cos\theta)\,\mathbf{e}_3;$$

nella base mobile si ha invece

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi)\,\mathbf{k}_1 + (-\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi)\,\mathbf{k}_2 + (\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\,\mathbf{k}_3.$$

5. CINEMATICA RELATIVA.

Consideriamo un osservatore assoluto $\mathcal{O}^a = (O^*, \mathbf{e})$, un osservatore relativo $\mathcal{O}^r = (O, \mathbf{k})$, e un punto mobile P. Vogliamo determinare il legame fra le quantità cinematiche costruite dall'osservatore assoluto e quelle costruite dall'osservatore relativo.

In $\mathcal{O}^a$ la legge di moto di P è data dal vettore

$$O^*P = \mathbf{r}^a(t);$$

in $\mathcal{O}^r$ il moto è descritto dal vettore

$$OP = \mathbf{r}^r(t).$$

Il legame fra $\mathbf{r}^a(t)$ e $\mathbf{r}^r(t)$ è dato da

$$\mathbf{r}^a(t) = \mathbf{r}^r(t) + \mathbf{r}_O(t),$$

dove $\mathbf{r}_O(t) = O^*O$ descrive il moto dell'origine di $\mathcal{O}^r$ rispetto all'osservatore assoluto.

Conoscendo il legame fra posizione assoluta e relativa di P si deduce il legame fra le corrispondenti velocità.

Vale l'identità (legge di addizione delle velocità di Galilei)

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^r + \mathbf{v}^s,$$

dove la velocità assoluta $\mathbf{v}^a$*, la velocità relativa* $\mathbf{v}^r$ *e la velocità di trascinamento* $\mathbf{v}^s$ *del punto* P *sono definite dalle equazioni*

$$\mathbf{v}^a = \frac{d_a\mathbf{r}^a}{dt}, \qquad \mathbf{v}^r = \frac{d_r\mathbf{r}^r}{dt}, \qquad \mathbf{v}^s = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r.$$

Infatti, calcolando la derivata temporale assoluta rispetto al tempo dei due membri dell'equazione che esprime il legame fra i vettori posizione $\mathbf{r}^a$ e $\mathbf{r}^r$, si ricava il legame fra velocità assoluta e relativa. Basta avere la seguente avvertenza: per calcolare la derivata temporale assoluta di una quantità relativa, come $\mathbf{r}^r(t)$, si applica il teorema $d_a\mathbf{u}/dt = d_r\mathbf{u}/dt + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$. Risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^a &= \frac{d_a\mathbf{r}^a}{dt} \\
&= \frac{d_a}{dt}(\mathbf{r}^r + \mathbf{r}_O) \\
&= \frac{d_r\mathbf{r}^r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r + \frac{d_a\mathbf{r}_O}{dt} \\
&= \mathbf{v}^r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r + \mathbf{v}_O.
\end{aligned}$$

La velocità assoluta di P è la velocità di P rispetto all'osservatore assoluto; la velocità relativa di P è la velocità di P rispetto all'osservatore relativo; la seguente osservazione fornisce il significato della velocità di trascinamento di P. Ad un generico istante t si consideri un punto Q che si trova in quiete rispetto ad $\mathcal{O}^r$ nella stessa posizione $\mathbf{r}^r(t)$ occupata da P. Si può dire che il punto Q è "trascinato" dal moto di $\mathcal{O}^r$. In queste condizioni si ha $\mathbf{v}_Q^r = 0$, e quindi risulta $\mathbf{v}_Q^a = \mathbf{v}_Q^s = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r + \mathbf{v}_O$, all'istante considerato. Concludiamo che la velocità di trascinamento rappresenta la velocità che P avrebbe se fosse in quiete rispetto a $\mathcal{O}^r$, ossia se fosse "trascinato" da $\mathcal{O}^r$. Si noti che $\mathbf{v}_s$ dipende dal punto P attraverso il vettore $\mathbf{r}^r$.

Nello sviluppo della cinematica dei sistemi rigidi sarà utilizzata la legge di addizione delle velocità. È opportuno anticipare gli elementi essenziali della costruzione, allo scopo di facilitare la comprensione di questa applicazione.

Si consideri una terna fissa $(O^*, \mathbf{e})$ e un corpo rigido in moto. Si identifica la terna mobile $(O, \mathbf{k})$ con una terna solidale, essendo O un punto del corpo rigido. Se P è un altro punto del corpo rigido, si ha

$$\mathbf{v}_P^a = \mathbf{v}_P^r + \mathbf{v}^s = \mathbf{v}_P^r + \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O),$$

dove $\mathbf{x}^r$ è stato sostituito da $(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O)$ ed è stato reintrodotto l'indice P per evitare ambiguità. Il punto P appartiene al corpo e quindi è in quiete rispetto all'osservatore mobile; conseguentemente la sua velocità relativa $\mathbf{v}_P^r$ è nulla. Si deduce che la velocità di P rispetto all'osservatore $(O^*, \mathbf{e})$ è data da

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^a = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O).$$

La legge di addizione delle velocità è una conseguenza degli assiomi che caratterizzano la struttura dello spazio-tempo. L'analisi di esperimenti condotti mediante raggi di luce mostra un disaccordo con i risultati previsti dalla legge di addizione delle velocità. Se ne conclude che sono falsificati gli assiomi di partenza. La costruzione di un nuovo modello di spazio-tempo in accordo con i dati sperimentali è dovuta ad Einstein. Il vecchio modello è ancora applicabile nel caso di velocità piccole rispetto alla velocità della luce.

Torniamo al caso generale. Derivando l'espressione della legge di addizione delle velocità si ottiene il seguente teorema, che stabilisce il legame fra l'accelerazione assoluta $\mathbf{a}^a$ e l'accelerazione relativa $\mathbf{a}^r$ del punto P.

Vale l'identità (Legge di composizione delle accelerazioni)

$$\mathbf{a}^a = \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^s + \mathbf{a}^c,$$

dove l'accelerazione assoluta $\mathbf{a}^a$, l'accelerazione relativa $\mathbf{a}^r$, l'accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}^s$ e l'accelerazione di Coriolis $\mathbf{a}^c$ del punto P sono definite dalle equazioni

$$\mathbf{a}^a = \frac{d_a \mathbf{v}^a}{dt}, \qquad \mathbf{a}^r = \frac{d_r \mathbf{v}^r}{dt}, \qquad \mathbf{a}^s = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}^r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r), \qquad \mathbf{a}^c = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^r.$$

Infatti, dalla legge di addizione delle velocità si deduce con facili calcoli che

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^a &= \frac{d_a \mathbf{v}^a}{dt} \\
&= \frac{d_a}{dt}\left[\mathbf{v}^r + \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r\right] \\
&= \frac{d_r}{dt}\left[\mathbf{v}^r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r\right] + \boldsymbol{\omega} \wedge \left[\mathbf{v}^r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r\right] + \frac{d_a \mathbf{v}_O}{dt} \\
&= \mathbf{a}^r + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^r + \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}^r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r).
\end{aligned}$$

Raccogliendo opportunamente gli addendi si può esprimere il risultato nella forma richiesta dall'enunciato del teorema.

Si noti che $\mathbf{a}^s$ rappresenta l'accelerazione che competerebbe al punto P se fosse in quiete rispetto ad $\mathcal{O}^r$, ossia se fosse "trascinato". Diversamente dal caso delle velocità, è falsa l'affermazione che l'accelerazione assoluta è la somma di accelerazione relativa e accelerazione di trascinamento.

L'accelerazione di trascinamento dipende da $\mathbf{a}_O$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, che sono vettori assegnati in funzione del tempo, e dal vettore posizione relativa $\mathbf{x}^r$. L'accelerazione di Coriolis $\mathbf{a}^c$ dipende da $\boldsymbol{\omega}$ e dal vettore velocità relativa $\mathbf{v}^r$.

Le relazioni precedenti si semplificano notevolmente se il moto dell'osservatore relativo è traslatorio ($\boldsymbol{\omega} = 0$), rotatorio ($\mathbf{v}_O = 0$ e $\mathbf{a}_O = 0$, se O è scelto opportunamente) o rotatorio assiale ($\mathbf{v}_O = 0$, $\mathbf{a}_O = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \omega\, \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ versore fissato).

6. DINAMICA RELATIVA

La formulazione newtoniana della meccanica è fondata sulle seguenti ipotesi.

(1) Le **forze fisiche**, cioè le forze che elementi di materia si scambiano fra loro, sono **indipendenti** dal sistema di riferimento. Per esempio, la forza esercitata in $\mathbf{r}$ da una molla ideale centrata in O è data da $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O)$ per tutti gli osservatori. Ciò equivale ad affermare che la costante elastica della molla e il vettore posizione $\mathbf{r} - \mathbf{r}_O$ sono indipendenti dall'osservatore.

(2) Esiste la classe dei sistemi di riferimento inerziali nei quali un punto materiale di massa m soggetto all'azione di una forza $\mathbf{F}$ si muove secondo la legge

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}.$$

Il riferimento solidale con le stelle "fisse" può essere ritenuto inerziale.

Dalle condizioni (1) e (2) si deduce che l'accelerazione di un punto mobile deve essere indipendente dalla scelta dell'osservatore inerziale. In particolare, se l'accelerazione è nulla per un osservatore inerziale è nulla per tutti gli altri, coerentemente col fatto che la legge d'inerzia deve valere per tutti gli osservatori inerziali. Si può precisare questa osservazione nei termini seguenti.

Sia $\mathcal{O}^{(i)}$ un osservatore inerziale, identificato con l'osservatore assoluto $\mathcal{O}^{(a)}$ della trattazione cinematica. Un altro osservatore **$\mathcal{O}$ è inerziale se e solo se si muove rispetto ad $\mathcal{O}^{(i)}$ di moto traslatorio rettilineo uniforme**. Se infatti $\mathcal{O}$ è in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad $\mathcal{O}^{(i)}$ risulta che $\boldsymbol{\omega} = 0$ e $\mathbf{a}_O = 0$; in queste condizioni si trova che $\mathbf{a}^s + \mathbf{a}^c = 0$; si ha allora $\mathbf{a}^a = 0$ se, e solo se, $\mathbf{a}^r = 0$. Ogni punto P isolato ha accelerazione nulla in $\mathcal{O}^{(i)}$ e quindi ha accelerazione nulla in $\mathcal{O}$; pertanto si muove rispetto ad $\mathcal{O}$ di moto rettilineo uniforme. Questo basta per concludere che in $\mathcal{O}$ vale la legge d'inerzia.

Viceversa, se anche $\mathcal{O}$ è inerziale, l'invarianza della legge d'inerzia implica che $\mathbf{a}^s + \mathbf{a}^c = 0$ identicamente (cioè per ogni scelta di $\mathbf{v}^r$ e di $\mathbf{r}^r$). Ponendo $\mathbf{r}^r = 0$ e $\mathbf{v}^r = 0$ si deduce che $\mathbf{a}_O = 0$. Ponendo $\mathbf{r}^r = 0$ e sfruttando l'arbitrarietà di $\mathbf{v}^r$ si deduce che $\boldsymbol{\omega} = 0$. Le condizioni $\boldsymbol{\omega} = 0$ e $\mathbf{a}_O = 0$ bastano per concludere che il moto relativo di $\mathcal{O}$ rispetto ad $\mathcal{O}^{(i)}$ è traslatorio rettilineo ed uniforme.

Si supponga ora che l'osservatore $\mathcal{O}^a$ sia un osservatore inerziale e che $\mathcal{O}^r$ sia un altro osservatore non inerziale, in moto assegnato. Sia P un punto mobile di massa m. Per l'osservatore inerziale $\mathcal{O}^a$ l'equazione differenziale del moto di P assume la forma $m\,\mathbf{a}^a = \mathbf{F}$, dove $\mathbf{F}$ è il risultante delle forze fisiche. Si vuole dedurre l'**equazione del moto relativo** del punto P, ossia l'equazione differenziale che definisce $\mathbf{r}^r(t)$.

Si consideri l'equazione che stabilisce il legame fra accelerazione relativa e accelerazione assoluta,

$$\mathbf{a}^a = \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^s + \mathbf{a}^c;$$

moltiplicando per m ambo i membri risulta

$$m\,\mathbf{a}^a = m\,\mathbf{a}^r + m\,\mathbf{a}^s + m\,\mathbf{a}^c.$$

Risolvendo rispetto ad $m\,\mathbf{a}^r$ e ricordando che $m\,\mathbf{a}^a = \mathbf{F}$ si trova

$$m\,\mathbf{a}^r = \mathbf{F} - m\,\mathbf{a}^s - m\,\mathbf{a}^c.$$

Concludiamo che

Il moto relativo di P è descritto dall'equazione

$$m\,\mathbf{a}^r = \mathbf{F} + \mathbf{F}^s + \mathbf{F}^c,$$

dove la forza di trascinamento $\mathbf{F}^s$ *e la forza di Coriolis* $\mathbf{F}^c$ *sono definite da*

$$\mathbf{F}^s = -m\,\mathbf{a}^s = -m\,[\,\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}^r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^r)\,],$$

$$\mathbf{F}^c = -m\,\mathbf{a}^c = -2m\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^r.$$

Nel caso di moto di un punto vincolato ad una linea rigida mobile, conviene identificare $\mathcal{O}^r$ con un osservatore in quiete rispetto alla linea. Il moto di P è determinato risolvendo il sistema che si ottiene proiettando sulla terna intrinseca l'equazione del moto relativo.

È opportuno ribadire che l'equazione del moto relativo è **equivalente** alla $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}^a$, essendo semplicemente una sua trascrizione in termini delle nuove incognite $\mathbf{r}^r(t)$. In molte circostanze l'equazione del moto relativo è di facile soluzione.

La forza di trascinamento e la forza di Coriolis non corrispondono ad interazioni fisiche tra il punto P e l'ambiente circostante, ma sono semplici conseguenze del moto relativo dell'osservatore; per questo motivo sono chiamate **forze apparenti** o **forze fittizie**. In effetti, queste forze scompaiono se si riferisce il moto ad un osservatore inerziale.