Esercizio 1 Risolvere il seguente problema a valori iniziali

$$\begin{cases} (x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 3x^3 y = 6x\, e^{-\frac{3}{2}x^2} & (a) \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

<u>Soluzione</u>

Occorre scrivere la soluzione generale dell'equazione (a)

Dividendo l'equazione (a) per x^2+1 si trova:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x^3}{1+x^2}\, y = \frac{6x}{1+x^2}\, e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

Moltiplicando l'equazione (a) per la funzione (incognita) $\mu = \mu(x)$ si ottiene

$$\mu \frac{dy}{dx} + \frac{3x^3}{1+x^2}\,\mu y = \frac{6x\mu}{1+x^2}\, e^{-\frac{3}{2}x^2} \qquad (b)$$

Il primo membro di (b) è uguale a $\frac{d}{dx}(\mu y)$ (se e solo se)

$$\cancel{\mu \frac{dy}{dx}} + y\frac{d\mu}{dx} = \cancel{\mu \frac{dy}{dx}} + \frac{3x^3}{1+x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3x^3}{1+x^2}} \qquad (c)$$

Di questa equazione interessa una soluzione particolare in modo che si abbia

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\mu y) = \frac{6x\mu}{1+x^2}\, e^{-\frac{3}{2}x^2}} \qquad (d)$$

Da (c) si ricava $\ln \mu = \displaystyle\int \frac{3x^3}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

Poiché $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$.

Ottengo $\ln \mu = 3\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}\ln|1+x^2|$

e poiché $|1+x^2| > 0 \quad \forall x$

$$\boxed{\mu(x) = e^{\frac{3}{2}x^2 + \ln(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}x^2}} \quad (e)$$

Sostituendo (e) in (d) si trova

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{3}{2}x^2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y\right) = \frac{6x}{(1+x^2)}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}x^2} \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

ovvero, $\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{3}{2}x^2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y\right) = 6x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}}$

Integrando ambo i membri si perviene a

$$\boxed{e^{\frac{3}{2}x^2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y = 6\int x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} dx} \quad (f)$$

Poiché $\int x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{5}{2}+1}\right)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}+1} + c$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + c, \quad c \text{ costante arbitraria}$$

Quindi:

$$\cancel{y(x) = -2e^{-\frac{3}{2}x^2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + c e^{-\frac{3}{2}x^2}}$$

$$y(x) = -2e^{-\frac{3x^2}{2}}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + c\, e^{-\frac{3}{2}x^2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= e^{-\frac{3x^2}{2}}\left[-2 + c(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Poiché $y(0) = 1 \Rightarrow -2 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = +3}$

Quindi la soluzione del problema a valori iniziali è

$$y(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[-2+3\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$

Trovare i massimi/minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x,y) = x\cos y + \sin y - \frac{1}{4}x^2 \quad , \quad \text{con } 0 \leq y \leq 2\pi$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

Poiché $f'_x(x,y) = \cos y - \frac{1}{2}x$, $f'_y(x,y) = -x\sin y + \cos y$

I punti critici si trovano risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \cos y - \frac{1}{2}x = 0 \\ -x\sin y + \cos y = 0 \end{cases}$$

Semplici calcoli mostrano come ci siano i seguenti quattro punti critici

$$A=\left(0,\frac{\pi}{2}\right) , B=\left(0,\frac{3}{2}\pi\right) , C=\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right) , D=\left(-\sqrt{3},\frac{5}{6}\pi\right)$$

Si lascia allo studente il compito di verificare che A e B siano punti di sella mentre C e D sono punti di Max relativo.

Prova Scritta di Istituzioni ed Esercitazioni
di Matematica 2
Corso di Studio in Chimica
19/09/2018

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ Scrivere la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 64y = e^{8x} \qquad (1)$$

La soluzione generale dell'equazione (1) ha la forma

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

dove $y_c(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata e $y_p(x)$ una soluzione particolare dell'equazione (1)

Si verifica immediatamente che la soluzione generale di (1) è

$y_c(x) = Ae^{8x} + Be^{-8x}$ con A, B costanti arbitrarie

Poiché e^{8x} è una soluzione dell'equazione omogenea, per determinare soluzioni particolari di (1), cerchiamo una soluzione della forma

$$y_p(x) = Axe^{8x}$$

Quindi $y_p'(x) = Ae^{8x} + 8Axe^{8x}$

$$y_p''(x) = 8Ae^{8x} + 8Ae^{8x} + 64Axe^{8x} = (16A + 64Ax)e^{8x}$$
$$= 16A(1+4x)e^{8x}$$

Sostituendo in (1) si ha

$$16A(1+4x)e^{8x} - 64Axe^{8x} = e^{8x} \Longrightarrow 16Ae^{8x} = e^{8x}$$
$$\Downarrow$$
$$16A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{16}$$

Quindi $y_p(x) = \frac{x}{16}e^{8x}$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = Ae^{8x} + Be^{-8x} + \frac{x}{16}e^{8x}$$

Esercizio 4

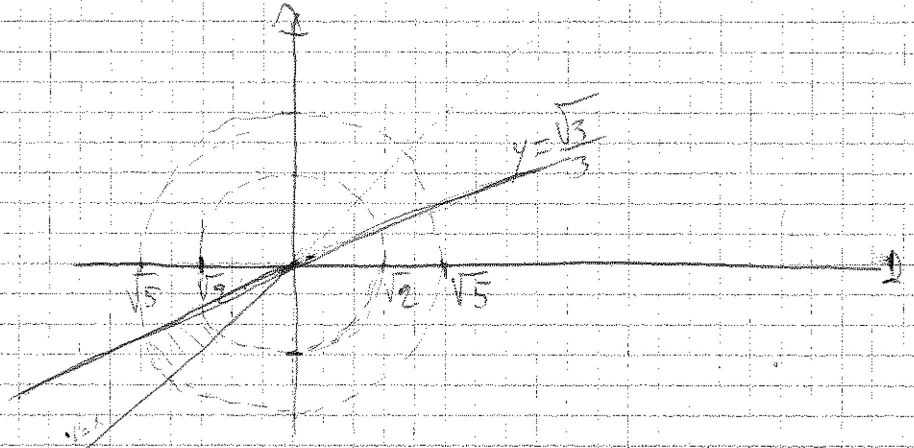
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy si consideri la regione D del piano situata nel terzo quadrante e delimitata dalle rette di equazione $y = x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e dalle due circonferenze di equazione $x^2+y^2=2$ e $x^2+y^2=5$.

Si chiede di:

a) Rappresentare graficamente la regione piana D

b) Calcolare $\iint_D (x^2+y^2)^{5/2}\,dx\,dy$

Soluzione



b) L'integrale richiesto si calcola facilmente usando coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{con} \quad \sqrt{2} \le \rho \le \sqrt{5} \quad e \quad \frac{7}{6}\pi \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$$

Poiché il modulo dello Jacobiano della trasformazione vale ρ

si trova

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\rho^2)^{\frac{5}{2}} \rho \, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \rho^6 \, d\rho \right) d\theta = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{7}\rho^7 \Big|_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \right) d\theta = \ldots$$

si invitano gli studenti a completare i calcoli