Prova Scritta di Ist. ed Esercitazioni
di Matematica 2
Corso di studio in Chimica
23-07-2018
Traccia delle soluzioni

2) Risolvere la seguente eq. differenziale del primo ordine

$$x^2 \frac{dy}{dx} = 1-x^2+y^2-x^2y^2$$

Riscritta l'equazione come

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1-x^2)(1+y^2)$$

essa è un'equazione differenziale a variabili separabili. Non presenta soluzioni singolari essendo $1+y^2 \neq 0$ e la soluzione generale si trova nel seguente modo

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int \frac{1-x^2}{x^2}\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{arctg} y = -x^{-1} - x + C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{x} - x + C\right)}$$

1- Risolvere il seguente problema a valori iniziali

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin 3x & (1) \\[2ex] y(0) = 2 \\[1ex] \dfrac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione generale equazione omogenea

$$y_c(x) = e^{-x}\left(A_1 \cos x + A_2 \sin x\right)$$

Si cerchino soluzioni particolari della forma

$$\boxed{y_p(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x} \qquad (2)$$

Derivando due volte l'eq (2) e sostituendo i risultati trovati in (1) si trova $c_1 = -\frac{7}{85}$, $c_2 = -\frac{6}{85}$

Per cui la soluzione generale di (1) è

$$y(x) = e^{-x}\left(A_1 \cos x + A_2 \sin x\right) - \frac{7}{85} \sin 3x - \frac{6}{85} \cos 3x$$

$$y(0) = 2 \implies A_1 - \frac{6}{85} = 2 \implies A_1 = \frac{176}{85}$$

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{176}{85} \cos x + A_2 \sin x\right) - \frac{7}{85} \sin 3x - \frac{6}{85} \cos 3x$$

$$y'(x) = -e^{-x}\left(\frac{176}{85} \cos x + A_2 \sin x\right) + e^{-x}\left(-\frac{176}{85} \sin x + A_2 \cos x\right)$$
$$- \frac{21}{85} \cos 3x + \frac{18}{85} \sin 3x$$

$$y'(0) = 0 \implies 0 = -\frac{176}{85} + A_2 - \frac{21}{85} \implies A_2 = \frac{197}{85}$$

Quindi $y(x) = +e^{-x}\left(\frac{176}{85} \cos x + \frac{197}{85} \sin x\right) - \frac{7}{85} \sin 3x - \frac{6}{85} \cos 3x$

(3) Trovare i massimi/minimi relativi della seguente funzione

$$f(x,y) = 9\sin y - \frac{1}{2}\left(x + 3\cos y\right)^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2\pi$$

Poiché $f_x(x,y) = -(x + 3\cos y)$

$$f_y(x,y) = 9\cos y - (x + 3\cos y)(-3\sin y)$$

I punti critici si trovano risolvendo il sistema

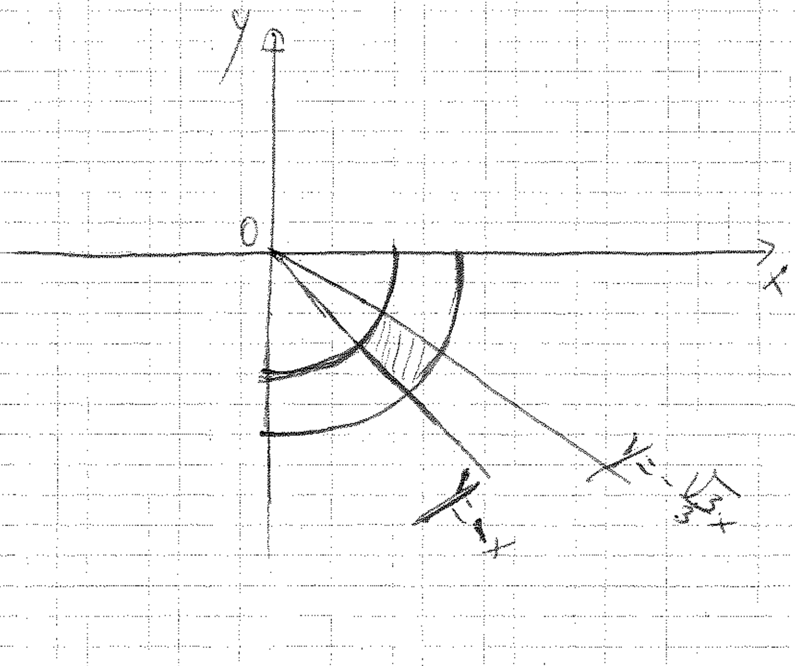
$$\begin{cases} x + 3\cos y = 0 \\ 9\cos y - (x + 3\cos y)(-3\sin y) = 0 \end{cases}$$

Semplici calcoli mostrano come ci siano solo due punti critici

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Si lascia allo studente il compito di verificare che $\left(x=0,\ y=\frac{\pi}{2}\right)$ è un punto di massimo relativo mentre $\left(x=0,\ y=\frac{3}{2}\pi\right)$ è un punto di sella

(4)



L'integrale richiesto si calcola facilmente usando coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}, \quad \text{dove} \quad 4 \le \rho \le 5 \quad \text{e} \quad \frac{7}{4}\pi \le \theta \le \frac{5}{3}\pi$$

Lo Jacobiano della trasformazione vale ρ, per cui

$$\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy = \int_4^5\int_{\frac{7}{4}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} (\rho^2)^{\frac{3}{2}}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_4^5 \rho^4\,d\rho \int_{\frac{7}{4}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} d\theta = \ldots$$

si lascia allo studente il compito di terminare i semplici calcoli