Soluzione Prova Scritta
Ist. ed Esercitazioni di Matematica 2
19/09/2017

Esercizio 1.

L'equazione $y' - 2xy = 3x^2 e^{x^2}$ (1) è un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Moltiplicando l'equazione (1) per $\mu = \mu(x)$ si trova l'eq. equivalente

$$\mu \frac{dy}{dx} - 2\mu xy = 3\mu x^2 e^{x^2} \qquad (2)$$

Poiché $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu \frac{dy}{dx} + y \frac{d\mu}{dx}$, l'equazione (2) si può scrivere

nella forma $\boxed{\frac{d}{dx}(\mu y) = 3\mu x^2 e^{x^2}}$ (3) per una funzione μ tale

per cui

$$\cancel{\mu \frac{dy}{dx}} + y \frac{d\mu}{dx} = \cancel{\mu \frac{dy}{dx}} - 2\mu xy \qquad (4)$$

L'equazione (4) consente di ricavare una funzione μ per cui la (3) è soddisfatta: si ha infatti (da (4))

$$\frac{d\mu}{dx} = -2\mu x \qquad (5)$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

Una soluzione di (5) è $\boxed{\mu = e^{-x^2}}$ e sostituendo tale ~~valore~~ espressione di μ nell'equazione (3) si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} y\right) = 3x^2, \qquad (6)$$

Integrando l'equazione (6) si ottiene $e^{-x^2} y = x^3 + C$

ovvero $y = e^{x^2}(x^3 + C)$ che rappresenta la soluzione generale di (1)

Imponendo che si abbia $y(0)=5$ si trova $C=5$ e quindi $y(x)=e^{x^2}(x^3+5)$.

Esercizio 2

Si ha un'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coeff costanti.
La soluzione generale ha la seguente struttura

$$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$$

essendo $y_c(x)$ la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y''+16y=0 \quad (1)$$

e $y_p(x)$ una qualunque soluzione particolare di

$$y''+16y=\sin(2x) \quad (2)$$

Per risolvere l'equazione (1) si cercano soluzioni del tipo $\phi(x)=e^{rx}$ e, poiché $\phi''(x)=r^2e^{rx}$, sostituendo in (1) si perviene alla seguente equazione caratteristica $r^2+16=0$ che ammette le soluzioni $r_1=4i$ e $r_2=-4i$.

Una coppia di soluzioni linearmente indipendenti di (1) è quindi $y_1(x)=\cos(4x)$ e $y_2(x)=\sin(4x)$ e perciò

$$\boxed{y_c(x)=c_1\cos(4x)+c_2\sin(4x)}.$$

Per determinare una soluzione particolare $y_p(x)$, si cerca una soluzione del tipo $\boxed{y_p(x)=A\sin(2x)+B\cos(2x)}$ (3)

Poiché $y_p''(x)=-4(A\sin(2x)+B\cos(2x))$, sostituendo (3) e la derivata seconda in (2) si ottiene

$$12A\sin(2x)+12B\cos(2x)=\sin(2x).$$

Dall'ultima equazione conduce quindi a

$$A = \frac{1}{12} \quad e \quad B = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{12} \sin(2x)}$$

e la soluzione generale dell'equazione (2) è

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + \frac{1}{12} \sin(2x).$$

Esercizio 3

Eventuali punti di ~~max/x~~ max e/o minimo sono tali che

$$\text{grad } f = \underline{0}, \text{ cioè soddisfano il}$$

sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\sin x - \cos x = 0 \\ -\sin y - \cos y = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin y + \cos y = 0 \end{cases}$$

La prima equazione $(\sin x = -\cos x)$ è verificata per $x = \frac{3}{4}\pi$ e $x = \frac{7}{4}\pi$ (si ricordi che $0 \le x, y \le 2\pi$), mentre la seconda equazione del sistema è ~~verif~~ soddisfatta per $y = \frac{3}{4}\pi$ e $y = \frac{7}{4}\pi$.

Si hanno pertanto i seguenti quattro punti critici

$$A = \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right), \quad B = \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right), \quad C = \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right), \quad D = \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$$

Per stabilire se ci sono punti di max e/o minimo consideriamo

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -\cos x + \sin x & 0 \\ 0 & -\cos y + \sin y \end{vmatrix} = (-\cos x + \sin x)(-\cos y + \sin y)$$

Quindi

- $H\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 > 0$ e poiché

$f_{xx}\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2} > 0$, la forma quadratica associata al differenziale secondo in A è definita positiva e A è un punto di minimo relativo.

- $H\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) = H\left(\frac{7}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 < 0$

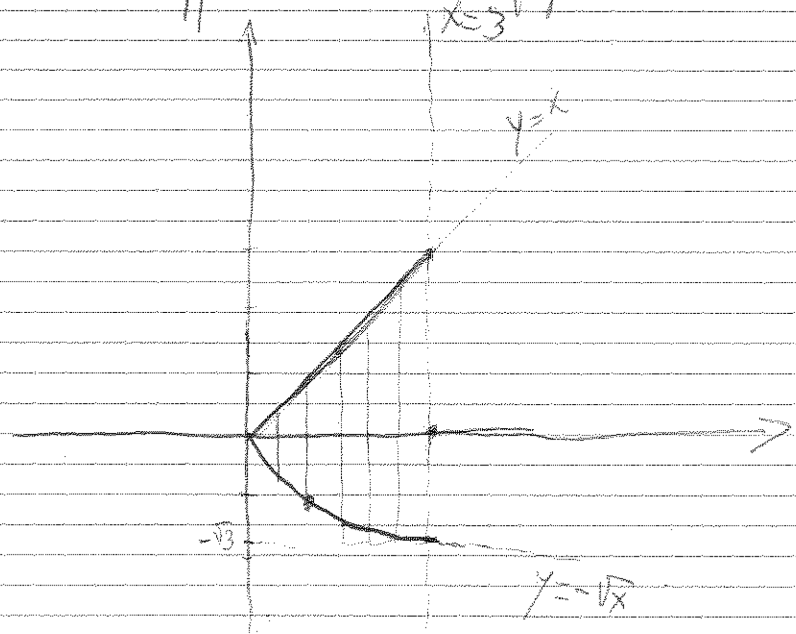
e la forma quadratica associata al differenziale secondo nei punti B e C è indefinita. B e C sono punti di sella.

- $H\left(\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 > 0$ e poiché

$f_{xx}\left(\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} < 0$, la forma quadratica associata differenziale secondo in D è definita negativa D è un punto di massimo relativo libero.

Esercizio 4

Il dominio D è rappresentato in figura sotto



Il dominio è sia x-semplice che y-semplice. Un possibile modo di rappresentarlo analiticamente è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3, \; -\sqrt{x} \le y \le x\}$$

Si ha a) $$\iint_D x^2 y \, dx\,dy = \int_0^3 dx \left(\int_{-\sqrt{x}}^{x} x^2 y \, dy \right)$$

$$= \int_0^x x^2 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{x} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 x^2 (x^2 - x) \, dx =$$

= si lasciano i semplici passaggi finali allo studente

b) (Area della regione D) $$\iint_D dx\,dy = \int_0^3 dx \left(\int_{-\sqrt{x}}^{x} dy \right) =$$

$$= \int_0^3 (x + \sqrt{x}) \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{27}$$