Traccia delle soluzioni
esercizi assegnati all'esame del 7/07/2017
"Istituzioni ed Esercitazioni di Matematica 2"
Corso di studi in Chimica

(e)

1) Risolvere la seguente equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{2+x}\, y = 4 \qquad (1)$$

<u>Soluzione</u> Si tratta di un equazione differenziale ordinaria <u>lineare</u> del primo ordine.
Moltiplicando la (1) per una funzione $\mu = \mu(x)$, si ottiene

$$\mu \frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{2+x}\, y = 4\mu \qquad (2)$$

Cerchiamo una funzione μ (fattore integrante) in modo che la (2) si scriva nella forma

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = 4\mu \qquad (3)$$

Occorre quindi che $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu \frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{2+x}\, y \qquad (4)$

L'equazione (4) si scrive come

$$y \frac{d}{dx}\mu + \cancel{\mu \frac{dy}{dx}} = \cancel{\mu \frac{dy}{dx}} + \frac{2\mu}{2+x}\, y \qquad (5)$$

L'equazione (5) consente di ottenere la seguente equazione a variabili separabili

$$\frac{d\mu}{\mu} = 2\, \frac{dx}{2+x} \qquad (6)$$

Una soluzione di (6) è $\ln \mu = 2 \ln(2+x) = \ln (2+x)^2$

cioè $\boxed{\mu = (2+x)^2}$

NON INTERESSA LA SOLUZIONE GENERALE di (6) ma una soluzione che conduca a (3)

(b) L'equazione (3) si scrive quindi come

$$\frac{d}{dx}\left((2+x)^2 y\right) = 4(2+x)^2 \qquad (7)$$

Integrando ambo i membri di (7) si trova

$$(2+x)^2 y = 4\int (2+x)^2 + C \quad , \quad C \text{ costante arbitraria}$$

da cui la soluzione cercata

$$\boxed{y = \frac{4}{3}(2+x) + C\,(2+x)^{-2}}$$

Esercizio 2 Risolvere il seguente problema a valori iniziali

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione $\boxed{y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \quad (1)}$ ha la struttura $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, dove $y_c(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (2)$$

mentre $y_p(x)$ è una qualunque soluzione particolare dell'equazione (2).

Si ha $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ essendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti di (2). Per determinare due soluzione ~~della~~ linearmente indipendenti di (2) si osserva che

Se si cercano soluzioni dell'equazione (2) della forma

$$y(x) = e^{rx}$$

si perviene alla seguente equazione (algebrica) caratteristica:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad (3)$$

Poiché l'equazione (3) ammette due radici reali distinte $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, si avranno le soluzioni

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{3x}$$ che è immediato verificare essere linearmente indipendenti (Infatti $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{-x}$ che non è costante!)

Quindi $y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ (4)

Poiché e^{3x} appare anche a secondo membro di (1), per determinare una funzione particolare di (1) cerchiamo soluzioni della forma $y_p(x) = Axe^{3x}$ (5)

Si ha $y_p'(x) = (3Ax + A)e^{3x}$ (6)

$$y_p''(x) = 3Ae^{3x} + 3A(3x+1)e^{3x} \quad (7)$$

Sostituendo (5), (6), (7) in (1) si trova l'equazione

$$3Ae^{3x} + 3A(3x+1)e^{3x} - 5A(3x+1)e^{3x} + 6Axe^{3x} = 2e^{3x}$$

da cui ~~semplice~~, dopo aver semplificato, $\boxed{A = 2}$

Quindi $\boxed{y_p(x) = 2xe^{3x}}$ (8)

La soluzione generale di (1) è $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 2xe^{3x}$

Poiché $y'(x) = 2c_1 e^{2x} + (c_2+2+2x)e^{3x}$

Imponendo le condizioni $0 = y(0) = c_1 + c_2$

$4 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2$

si perviene al seguente sistema algebrico

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

che possiede l'unica soluzione $c_1 = 2$, $c_2 = -2$

Quindi la soluzione cercata è

$$\boxed{y(x) = 2e^{2x} - 2e^{3x} + 2xe^{3x}}$$

Esercizio 3. Trovare i massimi/minimi relativi liberi della funzione

$$f(x,y) = \cos x + \cos y \qquad \text{con } 0 \le x, y < 2\pi$$

~~Ci si può limitare a far variare x e y nell'intervallo [0~~

I punti "candidati" ad essere di massimo/minimo devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Poiché $f'_x(x,y) = -\sin x$, $f'(x,y) = -\sin y$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$$

Da cui i seguenti quattro punti critici

Poiché $f''_{xx}(x,y) = -\cos x$, $f''_{yy}(x,y) = -\cos y$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{vmatrix} = \cos x \cos y$$

Poiché $H(0,0) = 1 > 0$ e poiché $f_{xx}(0,0) = -1 < 0$ la forma quadratica associata al differenziale secondo è definita negativa e $(0,0)$ è un punto di massimo relativo

Poiché $H(\pi,\pi) = 1 > 0$ e $f_{xx}(\pi,\pi) = 1 > 0$ la forma quadratica associata ~~alla matrice hessiana~~ al differenziale secondo è definita positiva e (π,π) è un punto di minimo relativo.

Infine $H(0,\pi) = H(\pi,0) = -1 < 0$ e la forma quadratica associata al differenziale secondo è indefinita per cui $(\pi,0)$ e $(0,\pi)$ sono punti di sella.

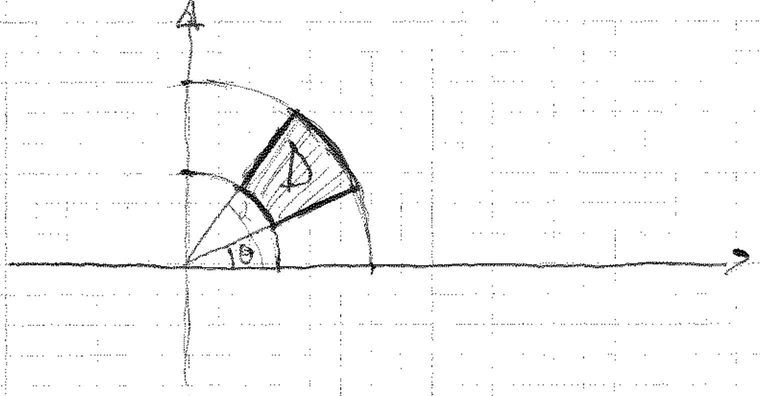
Esercizio 4 Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$ essendo D il dominio

del primo quadrante delimitato dalle due circonferenze di equazione $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ e dalle due rette di equazione $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $y=\sqrt{3}\,x$

Osservato che le due rette passano entrambe per l'origine e formano con l'asse x rispett. un angolo di $\frac{\pi}{6}$ e di $\frac{\pi}{3}$

(la retta di eq. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$) (la retta di eq. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$)



Usando coordinate polari

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} &1\le\rho\le 2 \\ &\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$J=\begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Si ha quindi $$\int_1^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho^2\,d\theta = \int_1^2 \rho^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)d\rho = \frac{\pi}{6}\int_1^2 \rho^2\,d\rho$$

$$=\frac{\pi}{6}\,\frac{1}{3}\rho^3\Big|_1^2 = \frac{7\pi}{18}$$