Seconda prova parziale "Ist. Matematica 2"

5 Giugno 2017

CdL in Chimica

Esercizio 1. Si consideri la funzione differenziabile

$$f(x,y) = \cos(x^3+5y^2) + \sin(x^2+5y^3)$$

a. Dire quale è l'insieme di definizione;

b. Calcolare il differenziale totale della funzione;

c. Calcolare la derivata della funzione composta le cui componenti

$$x = t, \quad y = t^2.$$

a. $\mathbb{R}^2$

b. $$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = \left[-3x^2 \sin(x^3+5y^2) + 2x\cos(x^2+5y^3)\right]dx$$
$$+ \left[-10y\sin(x^3+5y^2) + 15y^2\cos(x^2+5y^3)\right]dy$$

c. $$\frac{df}{dt} = f'_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f'_y(x(t),y(t))\,y'(t)$$

Poiché $$f'_x = -3x^2 \sin(x^3+5y^2) + 2x\cos(x^2+5y^3)$$
$$f'_y = -10y\sin(x^3+5y^2) + 15y^2\cos(x^2+5y^3)$$
$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = 2t$$

si trova $$\frac{df}{dt} = -3t^2\sin(t^3+5t^4) + 2t\cos(t^2+5t^6)$$
$$+ 2t\left(-10t^2\sin(t^3+5t^4) + 15t^4\cos(t^2+5t^6)\right)$$

cioè $$\frac{df}{dt} = (-3t^2-20t^3)\sin(t^3+5t^4) + 2t(1+15t^4)\cos(t^2+5t^6)$$

Esercizio 2

Si consideri la superficie di equazione

$$z = x^4 - y^3 + 18$$

a) Scrivere l'equazione della superficie in coordinate parametriche e verificare che essa è regolare

b) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $P(1,1,18)$

a) $x = u$, $y = v$, $z = u^4 - v^3 + 18$

Parametrizzazione $(u, v, u^4 - v^3 + 18)$

Poiché $J = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4u^3 \\ 0 & 1 & -3v^2 \end{pmatrix}$

ha rango due (da esso si può estrarre il minore $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$)

la superficie è regolare

b) L'equazione del piano tangente è

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y - y_0)$$

con $z_0 = 18$, $x_0 = y_0 = 1$.

Poiché $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2$ si ha $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -3$

l'equazione cercata è $z = 18 + 4(x-1) - 3(y-1)$

ovvero $\boxed{4x - 3y - z + 17 = 0}$

Esercizio 3

Trovare i massimi e/o i minimi relativi della seguente funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 12y - 7y^2 + y^3$$

Si ha $f'_x = 4x + 2y$

$$f'_y = 2x + 12 - 14y + 3y^2$$

I punti "candidati" ad essere di massimo e/o minimo si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3y^2 - 14y + 2x + 12 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x = -\frac{y}{2}$ nella seconda equazione si ha

$$3y^2 - 15y + 12 = 0$$

ovvero $y^2 - 5y + 4 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono:

$$A = (-2, 4) \quad , \quad B = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

Poiché $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 2$, $f''_{yy} = 6y - 14$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6y-14 \end{vmatrix} = 4(6y-14) - 4 = 4(6y-15) = 12(2y-5)$$

Quindi:

$$H(-2,4) = 12(-5+8) = 36 > 0$$

$$H\left(-\frac{1}{2},1\right) = 12(-5+2) = -36 < 0$$

Quindi $B\left(-\frac{1}{2},1\right)$ non è punto né di massimo né di minimo perché la forma quadratica è indefinita

mentre $A(-2,4)$ poiché $H(-2,4) = 36 > 0$ e $f_{xx}(-2,4) = 4 > 0$

risulta punto di minimo relativo (in quanto la forma quadratica è definita positiva).

Il valore del minimo si trova calcolando

$$f(-2,4) = 2(-2)^2 + 2(-2)4 + 48 - 7(48)^2 + (+48)^3.$$

Esercizio 4

Si consideri, nel piano Oxy, la parte di piano D compresa fra la parabola di equazione $y = x^2$ e la retta passante per l'origine e per il punto $A = (1, 2)$

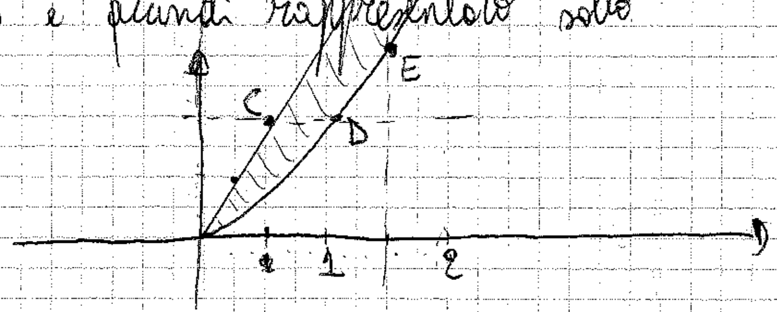
a. Calcolare $\iint_D x^3 y \, dx dy$ rappresentando D come dominio x-semplice

b. Calcolare $\iint_D x^3 y \, dx dy$ rappresentando D come dominio y-semplice

c. Calcolare, utilizzando l'integrale doppio appropriato, la misura (area) del dominio D.

La retta passante per il punto $O = (0, 0)$ e $A = (1, 2)$ ha equazione
$y = 2x$

Il dominio D è quindi rappresentato sotto



Si verifica subito che la retta e la parabola si intersecano nei punti $O(0,0)$ e $B(2, 4)$

Quindi se D viene considerato come x-semplice allora (con riferimento alla figura)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \; x_C \leq x \leq x_D\}$$

mentre se è considerato y-semplice

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \; y_E \leq y \leq y_F$$

Poiché $x_C = \frac{y}{2}$, $x_D = \sqrt{y}$

$y_E = x^2$, $y_F = 2x$

Si avrà che se il dominio è considerato x-semplice

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4,\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y} \right\}$$

se il dominio viene considerato y-semplice

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x \right\}$$

Quindi si ha

a) $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x^3 y\,dx = \int_0^4 \left(\frac{y^3}{4} - \frac{y^5}{64} \right) dy = \frac{16}{3}$$

b) $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} x^3 y\,dy = \int_0^2 \left(2x^5 - \frac{x^7}{2} \right) dx = \frac{16}{3}$$

c) $$|D| = \iint_D 1 \cdot dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} dy = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$