Esercizio 1

Risolvere

$$\boxed{2y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}} \quad (e)$$

Se $y \neq 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\left(\frac{1}{2y}\right) \quad (1)$

L'equazione è a variabili separabili e non ~~esistono~~ possiede soluzioni singolari.

La soluzione generale si ottiene riscrivendo (e) come

$$2y\,dy = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx$$ da cui integrando

$$\boxed{\int 2y\,dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx + C} \quad (b)$$

Poiché $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx$ è del tipo $\int f(x)^\alpha f'(x)\,dx = \frac{1}{(\alpha+1)}f(x)^{\alpha+1}$

con $\alpha = -\frac{1}{2}$

si trova $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{x^2-16}}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}(x^2-16)^{-\frac{1}{2}+1}\right]$

cioè $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}dx = \sqrt{x^2-16} + C$

e quindi da (b) segue $\boxed{y^2 = \sqrt{x^2-16} + C}$

Esercizio 2 (b)

Primo modo di procedere:

Equazione a) lineare del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 3x^3 & a) \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

General solution:

$$\mu \frac{dy}{dx} - \frac{\mu y}{x} = 3x^3 \mu$$

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \boxed{\left(\frac{d\mu}{dx}\right) y + \cancel{\mu \frac{dy}{dx}} = \cancel{\mu \frac{dy}{dx}} - \mu \frac{y}{x}} = 3x^3 \mu \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\mu}{dx} = -\mu \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\mu| = -\ln|x|$$

→ non metto la costante perché mi basta una μ che faccia il lavoro indicato in (1)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{x}}$$

Quindi $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x} y\right) = 3x^3 \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{x} y = 3\int x^2 dx + C}$

cioè $\dfrac{1}{x} y = x^3 + C \Rightarrow \boxed{y(x) = x^4 + Cx}$ Soluzione generale

$$2 = y(-1) = 1 - C \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

Soluzione $\boxed{y = x^4 - x}$

Esercizio 2 $\boxed{\text{bis}}$

C'è un altro modo di risolvere l'esercizio.

Posto $v = \frac{y}{x}$ si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = x\frac{dv}{dx} + v$

Quindi riscrivendo l'equazione a) (si vedi che non è omogenea) in termini di v, si trova

$$x\frac{dv}{dx} + v - v = 3x^3$$

ovvero $$\boxed{\frac{dv}{dx} = 3x^2} \qquad \triangledown$$

L'equazione $\triangledown$ può essere vista come un'equazione del primo ordine a variabili separabili (e non possiede soluzioni singolari) e si ha

$$dv = 3x^2\,dx \Rightarrow \int dv = \int 3x^2\,dx + C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v = x^3 + C}$$

Poiché $y = vx$ si trova $\boxed{y = x^4 + Cx}$

Imponendo la condizione iniziale $2 = y(-1) = 1 - C \Rightarrow C = -1$

e quindi $y = x^4 - x$.

C

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = e^{5x} & (1) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Trovo la Soluzione eq. omogenea associata $\quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (2)$

$y = e^{rx}$

$y' = r e^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

eq. caratteristica

$$r^2 - 2r + 10 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(r-1)^2 + 9 = 0$$

$$r_1 = 1 + 3i \quad , \quad r_2 = +1 - 3i$$

Soluzione generale eq. omogenea associata

$$y_c(x) = e^x \left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) \right)$$

Soluzione "prova" per la determinazione della soluzione particolare

$$y_p(x) = A e^{5x}$$

Poiché $y_p'(x) = 5Ae^{5x}$, $y_p''(x) = 25 e^{5x}$, sostituendo in (1) si trova $e^{5x}(25A - 10A + 10A) = e^{5x} \Longrightarrow 25A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{25}$

Soluzione IVP $\quad y(x) = y_c(x) + y_p(x) = e^x (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)) + \frac{1}{25} e^{5x}$

Imponendo le condizioni iniziali, si trova

$$y(0) = 1 \Longrightarrow \boxed{c_1 + \frac{1}{25} = 1} \Longrightarrow \boxed{c_1 = \frac{24}{25}}$$

$$y'(x) = e^{x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right) + e^{x}\left(-3c_1 \sin(3x) + 3c_2 \cos(3x)\right) + \frac{1}{5} e^{5x}$$

$$y'(0) = c_1 + 3c_2 + \frac{1}{5} = 2 \Longrightarrow \boxed{c_1 + 3c_2 = \frac{10}{5} - \frac{1}{5}}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{24}{25} \\ c_1 + 3c_2 = \frac{9}{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{24}{25} \\ 3c_2 = \frac{45}{25} - \frac{24}{25} = \frac{21}{25} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{24}{25}, \quad c_2 = \frac{7}{25}$$

Soluzione IVP

$$y(x) = e^{x}\left(\frac{24}{25} \cos(3x) + \frac{7}{25} \sin(3x)\right) + \frac{1}{25} e^{5x}$$

6

$$\underline{r}(t) = \left(3(t-\sin(t)),\ 3(1-\cos(t)),\ 2\right)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{v} = \left(3(1-\cos(t)),\ 3\sin t,\ 0\right) \longrightarrow$$ la curva è regolare per $t \in (0, 2\pi)$

$$\ddot{\underline{x}} = \underline{a} = \left(3\sin t,\ 3\cos t,\ 0\right)$$

$$1-\cos(t) = 2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{9(1-\cos t)^2 + 9\sin^2 t} = \sqrt{18 - 18\cos(t)} = 3\sqrt{2(1-\cos t)}$$

$$= 6\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 6\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

Poichè $t \in [0, 2\pi]$ la funzione $\sin\frac{t}{2}$ è sempre positiva e quindi

$$|\underline{v}| = 6\sin\frac{t}{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 6\sin\frac{t}{2}\,dt = -12\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -12\left[-1-1\right] = 24$$