



<https://unica.adobeconnect.com/p6z0vznqajk9/>

LE STRUTTURE TRIDIMENSIONALI E LA TORSIONE¹

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che un **solido infinitamente rigido**, privo di vincoli, possiede **sei gradi di libertà**, ovvero per localizzarlo univocamente nello spazio sono necessarie sei informazioni indipendenti: la posizione di tre punti (purché non allineati), oppure la posizione di un punto, più tre rotazioni rispetto ad un sistema di riferimento fisso.

Se il corpo è vincolato a muoversi su un piano, conserva **tre gradi di libertà**.

Abbiamo quindi esaminato come calcolare e disegnare **le azioni interne**, N , M e T di insiemi di travi infinitamente rigide vincolate tra di loro a formare una struttura piana.

In un secondo momento abbiamo studiato la **geometria delle aree** (posizione del baricentro, momenti statici e momenti d'inerzia), sono state descritte sommariamente le principali **prove meccaniche** sui materiali da costruzione (specie quelli metallici) ed è stato esaminato lo stato di **deformazione** e di sforzo di travi prismatiche sottoposte a stati di **trazione semplice, flessione semplice e taglio**.

Riassumendo, **perché un problema possa considerarsi piano**, è necessario che:

- gli assi delle travi che formano la struttura giacciono tutte sullo stesso piano;
- le travi siano realizzate con materiale omogeneo e isotropo;
- i vincoli e le forze esterne giacciono sullo stesso piano della struttura;
- le sezioni trasversali delle travi posseggano un piano di simmetria coincidente con quello della struttura.

Se queste limitazioni sono rispettate, i punti della struttura possono subire solo spostamenti paralleli al piano su cui giacciono gli assi dell'intera struttura, a parte le contrazioni trasversali prodotte "**dall'effetto Poisson**", $\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_a$.

¹ ATTENZIONE: dopo circa 14 minuti dall'inizio della lezione, la registrazione si è interrotta per circa 2 minuti a causa della caduta del collegamento di rete.



Nelle nostre analisi si è inoltre supposto valido il “**principio di sovrapposizione degli effetti**”, applicabile quando le travi siano caricate moderatamente, in modo che lo stato di sforzo rimanga in campo lineare elastico e gli spostamenti si possano considerare piccoli. Tale principio afferma quanto segue:

- si immagini che su una struttura agisca il sistema di forze \vec{F}_1 che provoca il campo di spostamenti u_1, v_1, w_1 ;
- In un secondo tempo, la stessa struttura sia sottoposta ad un sistema di forze \vec{F}_2 che provoca il campo di spostamenti u_2, v_2, w_2 ;

Se è valido il **principio di sovrapposizione degli effetti**, l'applicazione del sistema di forze $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, provoca il campo di spostamenti $u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2$.

Esaminando la **flessione deviata** abbiamo visto che una struttura giacente sul piano $x - y$ subisce spostamenti **w fuori dal piano** provocati dal momento M_y che determina la rotazione delle sezioni trasversali delle travi intorno all'asse y e quindi spostamenti w in direzione z .

Gli spostamenti w in direzione z possono essere provocati dal mancato rispetto delle ipotesi precedenti, per esempio:

- gli assi delle travi non giacciono su un unico piano;
- il materiale non è omogeneo oppure non è isotropo;
- una componente del carico è diretta in direzione perpendicolare al piano $x - y$;
- le sezioni trasversali delle travi non posseggono un piano di simmetria coincidente con il piano $x - y$.

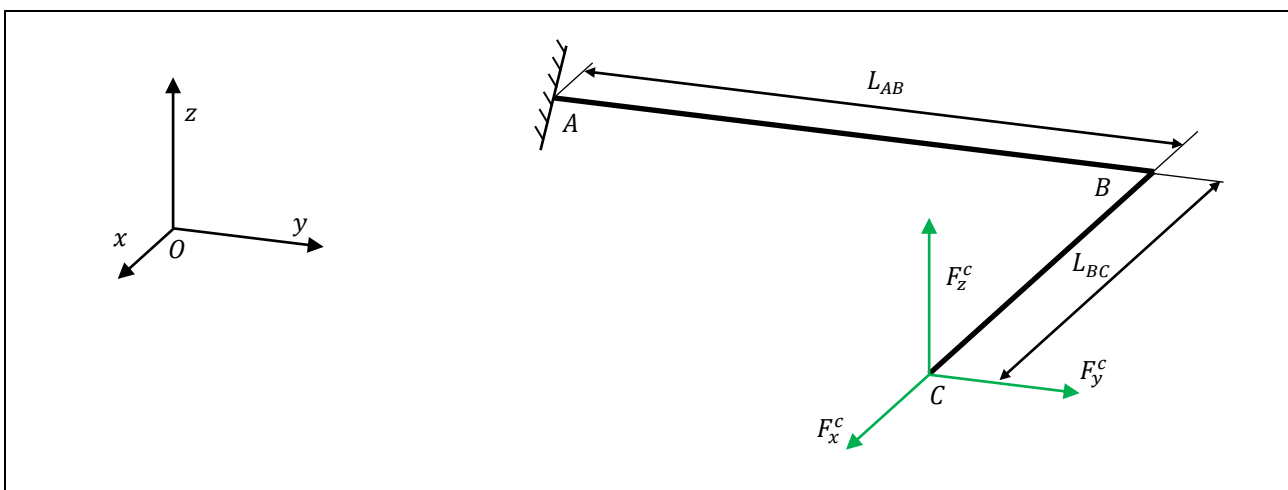
In tal caso avremo a che fare con una struttura tridimensionale e le azioni interne che la sollecitano diventano 6:

- 1) l'azione normale N_x che agisce in direzione parallela all'asse di ogni trave;
- 2) il taglio T_y che agisce in direzione perpendicolare all'asse di ogni trave.

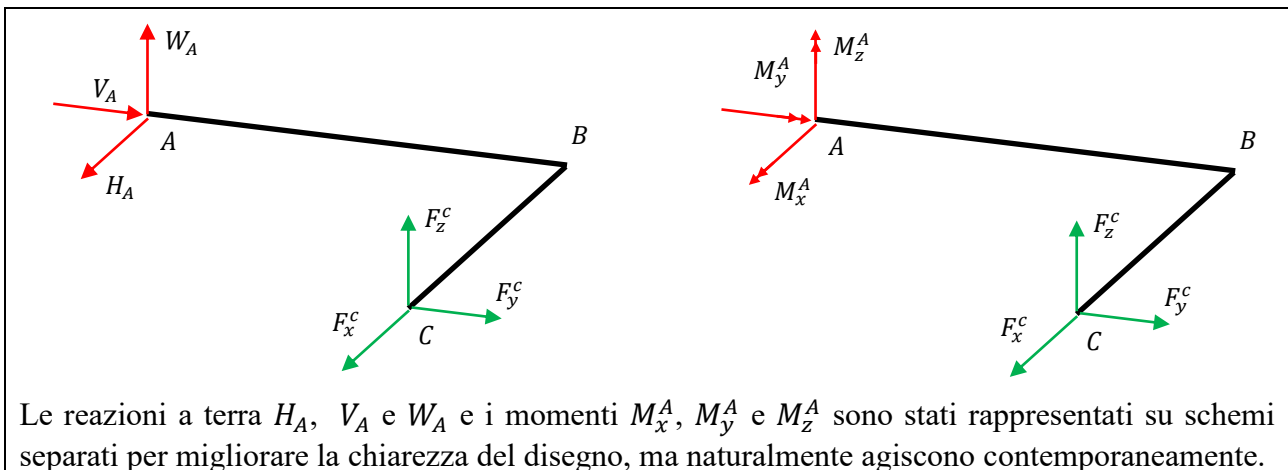


- 3) il taglio T_z che agisce in direzione perpendicolare al piano formato da N_x e T_y .
- 4) il momento torcente M_x che provoca la rotazione delle sezioni trasversali delle travi intorno al proprio asse x locale;
- 5) il momento flettente M_y che provoca la rotazione delle sezioni trasversali delle travi intorno all'asse y locale;
- 6) il momento flettente M_z che provoca la rotazione delle sezioni trasversali delle travi intorno all'asse z locale.

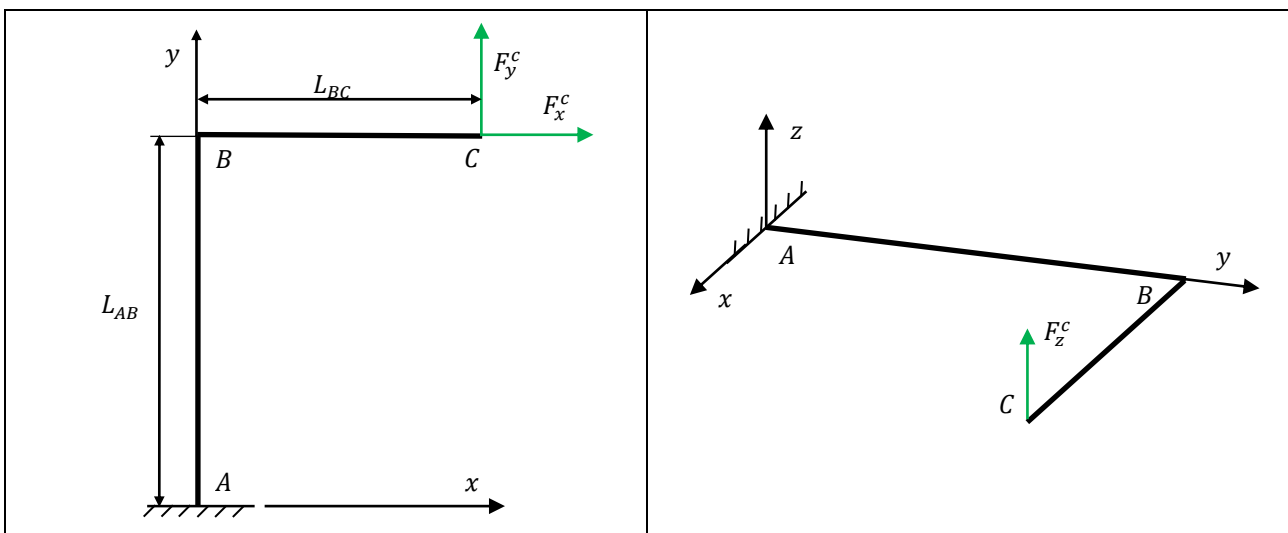
Consideriamo il caso della semplice mensola a forma di **manovella** rappresentata in figura. **Si tratta di una trave il cui asse giace sul piano $x - y$** , ma caricata nel punto C da una forza F_z^c fuori dal piano e da due forze F_x^c e F_y^c , giacenti sullo stesso piano.



Ipotizziamo che la sezione trasversale della trave sia **circolare** di raggio R costante lungo tutta la sua lunghezza. Ipotizziamo inoltre che il materiale sia omogeneo ed isotropo. Si tratta di un **problema tridimensionale** per cui le azioni interne sono 6.

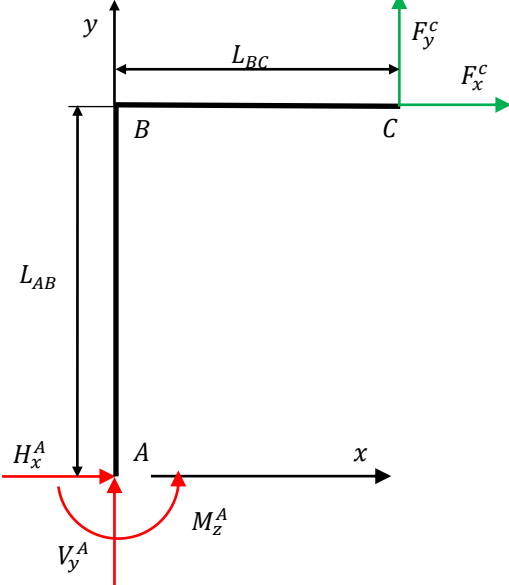


Osserviamo che se non agisse la forza F_z^c il problema sarebbe piano, come quelli fin qui esaminati. Quindi, in base al **Principio di sovrapposizione degli effetti**, il problema tridimensionale può essere scisso nella somma di due problemi più semplici.



Iniziamo con la struttura piana che giace sul piano x-y.

Eliminiamo l'incastro nel punto A e vi sostituiamo le reazioni incognite che si calcolano scrivendo le **equazioni cardinali della statica**:


$$\begin{cases} \sum F_x = F_x^c + H_x^A = 0 \\ \sum F_y = F_y^c + V_y^A = 0 \end{cases}$$
$$\sum M_z = M_z^A - F_x^c L_{AB} + F_y^c L_{BC} = 0$$

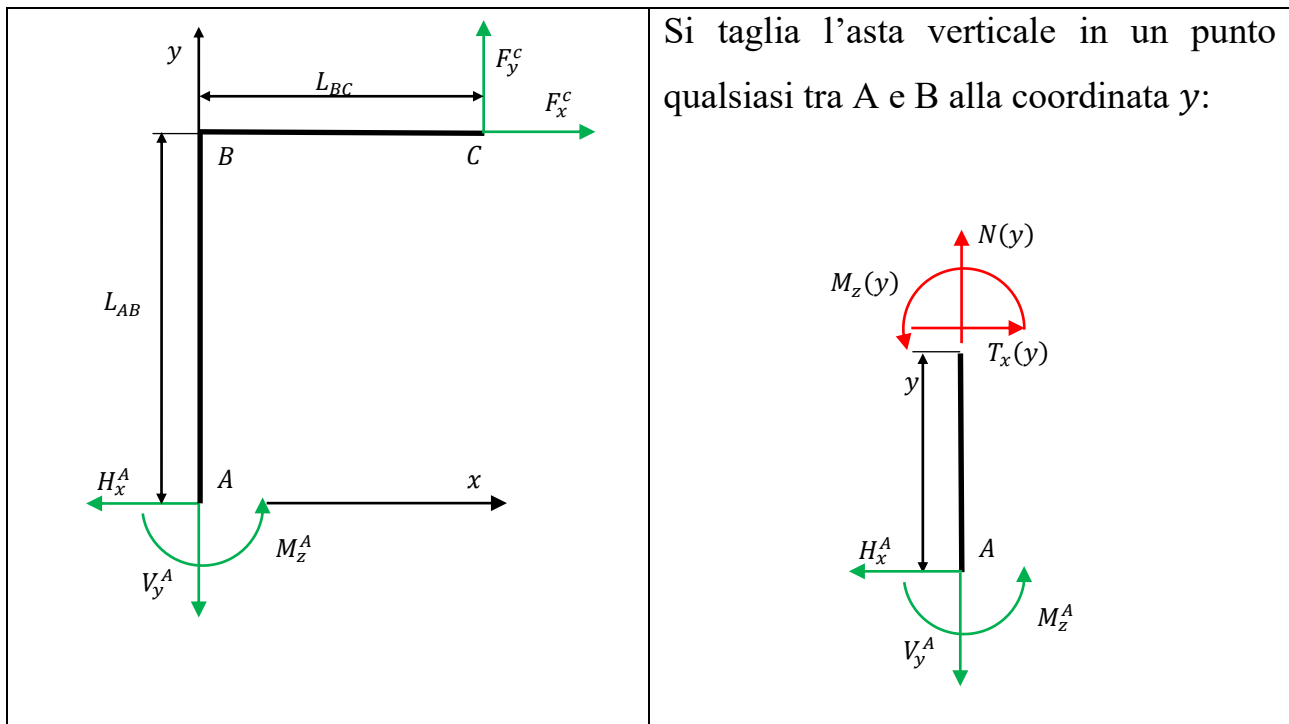
Sono sufficienti tre equazioni perché il problema è piano.

Risolvendo le tre equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} H_x^A = -F_x^c \\ V_y^A = -F_y^c \\ M_z^A = F_x^c L_{AB} - F_y^c L_{BC} \end{cases}$$

Visto che le reazioni risultano negative, **cambiamo segno e verso ai due vettori**; il verso del momento M_z^A dipende dai valori delle forze e dalla lunghezza delle aste.

Procediamo con il calcolo delle azioni interne.



Si taglia l'asta verticale in un punto qualsiasi tra A e B alla coordinata y :

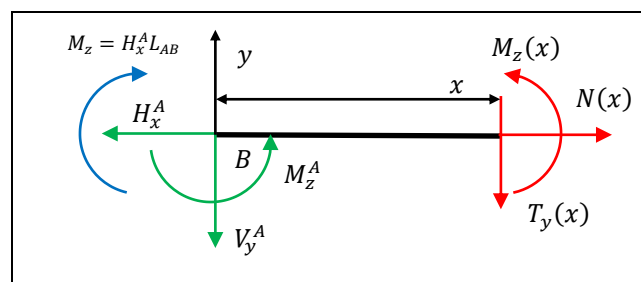
Si scrivono le **equazioni cardinali della statica** per il tratto in esame:

$$\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N(y) - V_y^A = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_x(y) - H_x^A = 0 \\ \sum M_z = M_z(y) + M_z^A - H_x^A y = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} N(y) = V_y^A = F_y^c \\ T_x(y) = H_x^A = F_x^c \\ M_z(y) = H_x^A y - M_z^A = F_x^c y - F_x^c L_{AB} + F_y^c L_{BC} = F_x^c (y - L_{AB}) + F_y^c L_{BC} \end{cases}$$

Si taglia l'asta orizzontale in un punto qualsiasi tra B e C alla coordinata x :



Le forze vengono trasportate nel nodo B, aggiungendo il momento di trasporto:

$$M_z = H_x^A L_{AB}$$



Nel nodo B agirà quindi il momento:

$$M_Z^B = M_Z^A - H_x^A L_{AB}$$

Sostituendo i valori delle reazioni vincolari si ottiene:

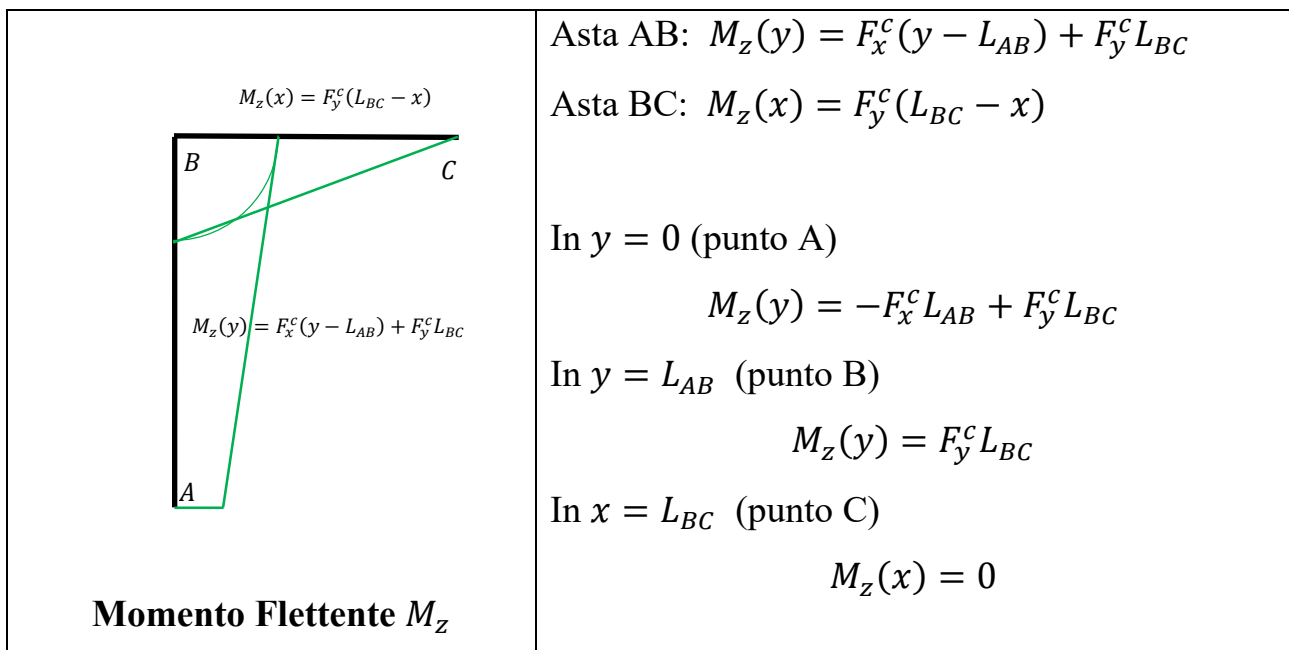
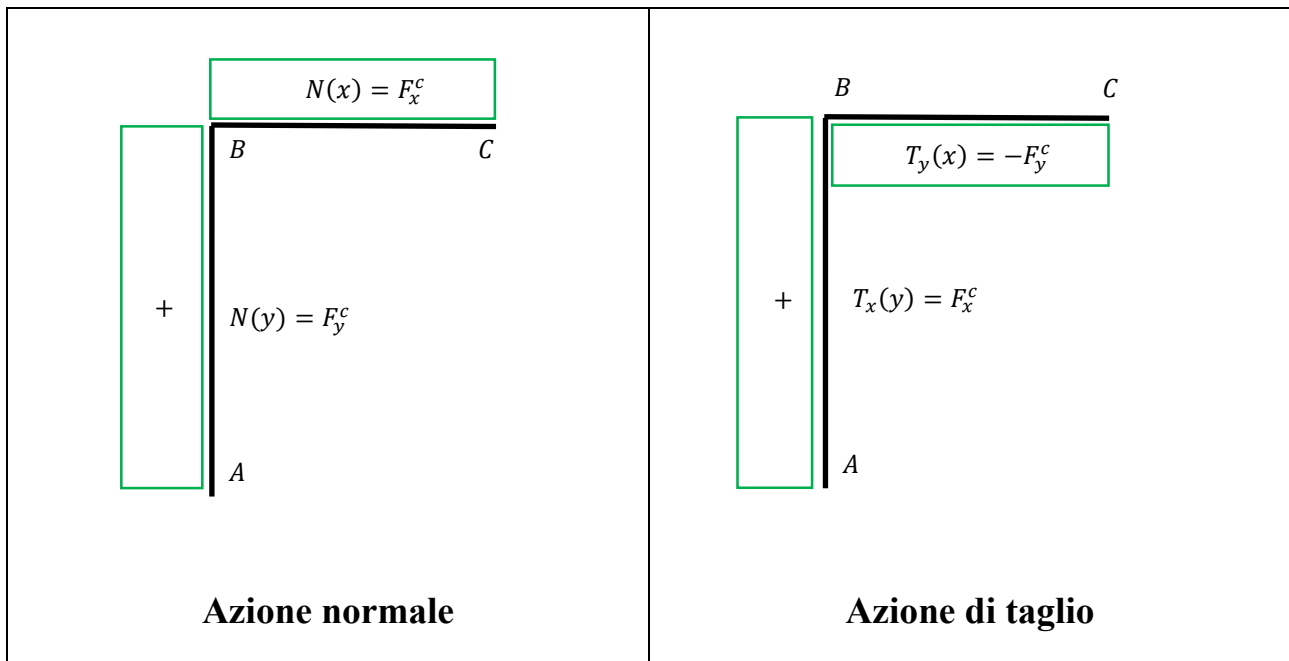
$$M_Z^B = F_x^c L_{AB} - F_y^c L_{BC} - F_x^c L_{AB} = -F_y^c L_{BC}$$

| | |
|--|---|
| | <p>Si scrivono le equazioni cardinali della statica per il tratto in esame:</p> $\begin{cases} \sum F_{\parallel} = N(x) - H_x^A = 0 \\ \sum F_{\perp} = T_y(x) + V_y^A = 0 \\ \sum M_z = M_z(x) - F_y^c L_{BC} + V_y^A x = 0 \end{cases}$ |
|--|---|

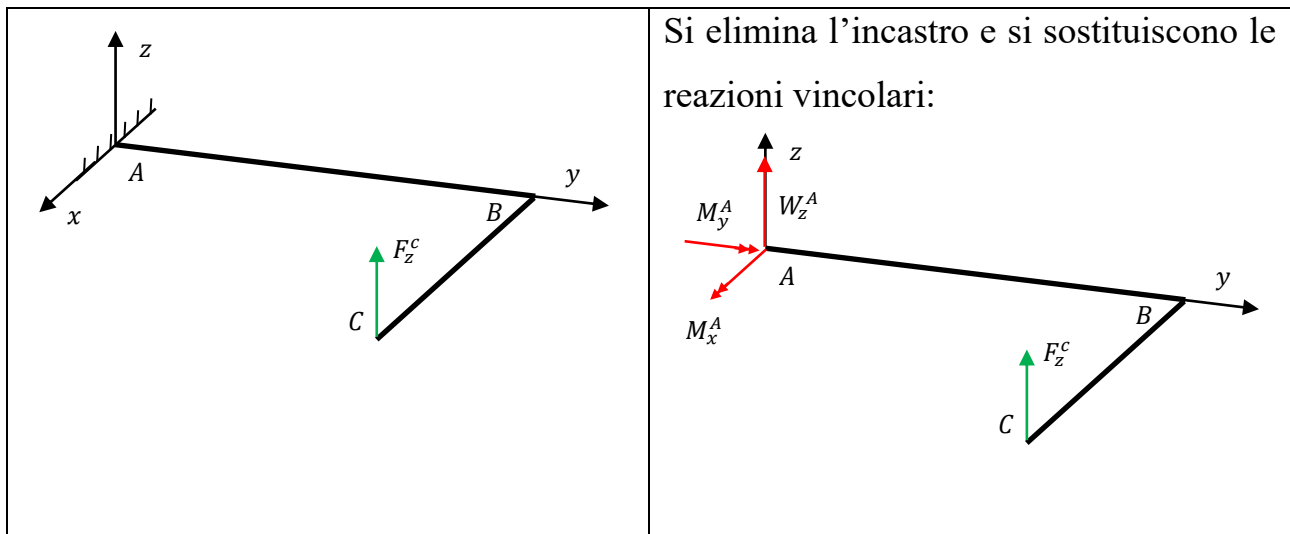
da cui:

$$\begin{cases} N(x) = H_x^A \\ T_y(x) = -V_y^A \\ M_z(x) = F_y^c L_{BC} - V_y^A x = F_y^c (L_{BC} - x) \end{cases}$$

Si procede al disegno delle azioni interne.



Esaminiamo adesso l'effetto della forza fuori dal piano:



Si scrivono le **equazioni cardinali della statica** e si calcolano le reazioni a terra:

$$\begin{cases} \sum F_z = F_z^c + W_z^A = 0 \\ \sum M_x = M_x^A + F_z^c L_{AB} = 0 \\ \sum M_y = M_y^A - F_z^c L_{BC} = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} F_z^c = -W_z^A \\ M_x^A = -F_z^c L_{AB} \\ M_y^A = F_z^c L_{BC} \end{cases}$$

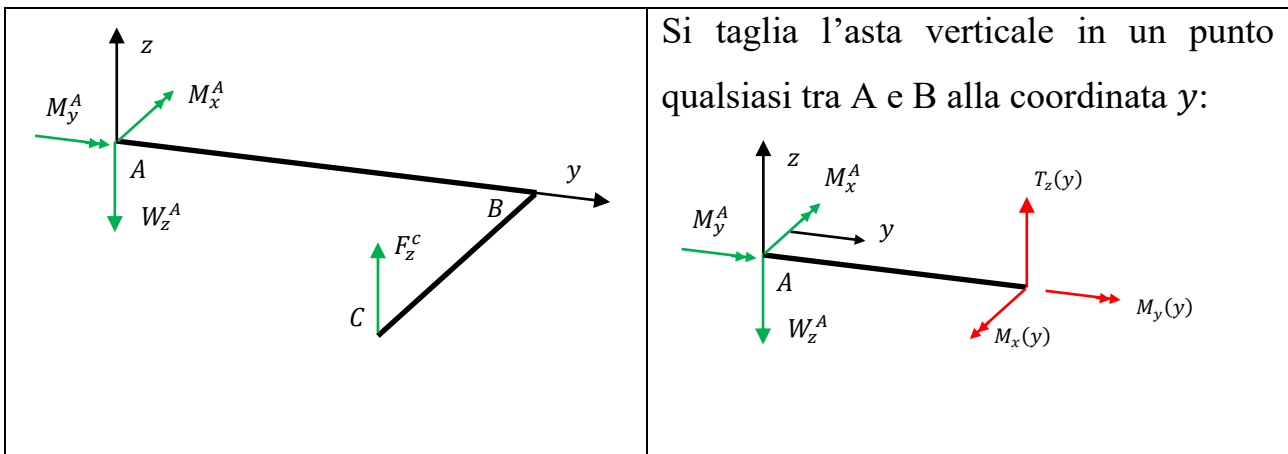
Lo stesso risultato si può ottenere eseguendo il prodotto vettoriale tra il vettore \vec{r} che unisce il punto A al punto C, per il vettore delle forze applicato in C:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} L_{BC} \\ L_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ L_{BC} & L_{AB} & 0 \\ 0 & 0 & F_z^c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_{AB} F_z^c \\ -L_{BC} F_z^c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Le reazioni devono equilibrare questo momento, per cui si ottengono invertendo il segno di \vec{M} .

Si cambia segno e verso ai due vettori negativi.

Procediamo con il calcolo delle azioni interne.



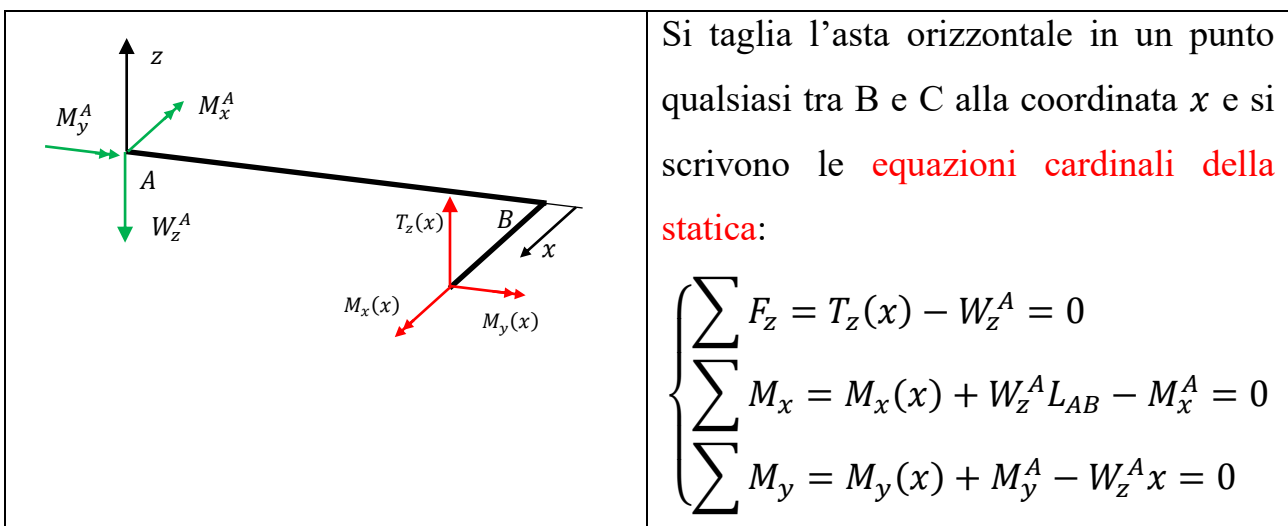
Si scrivono le **equazioni cardinali della statica** per il pezzetto di trave:

$$\begin{cases} \sum F_z = T_z(y) - W_z^A = 0 \\ \sum M_x = M_x(y) - M_x^A + W_z^A y = 0 \\ \sum M_y = M_y(y) + M_y^A = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} W_z^A = F_z^C \\ M_x(y) = M_x^A - W_z^A y = F_z^C (L_{AB} - y) \\ M_y(y) = -M_y^A = -F_z^C L_{BC} \end{cases}$$

Si taglia l'asta orizzontale in un punto qualsiasi tra B e C alla coordinata x :



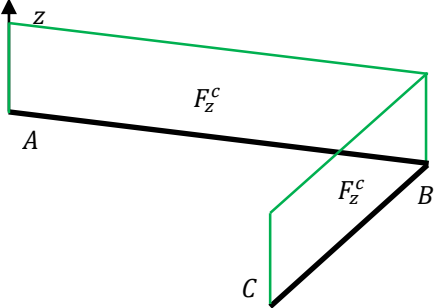
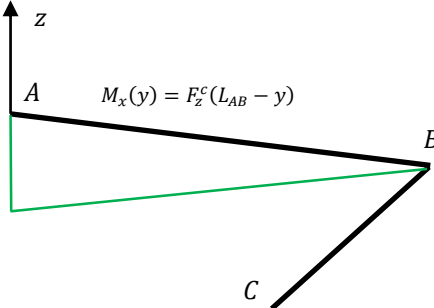
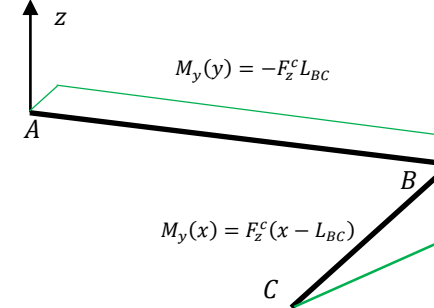
$$\begin{cases} \sum F_z = T_z(x) - W_z^A = 0 \\ \sum M_x = M_x(x) + W_z^A L_{AB} - M_x^A = 0 \\ \sum M_y = M_y(x) + M_y^A - W_z^A x = 0 \end{cases}$$

da cui:



$$\begin{cases} T_z(x) = W_z^A = F_z^c \\ M_x(x) = M_x^A - W_z^A L_{AB} = F_z^c L_{AB} - F_z^c L_{AB} = 0 \\ M_y(x) = W_z^A x - M_y^A = F_z^c x - F_z^c L_{BC} = F_z^c (x - L_{BC}) \end{cases}$$

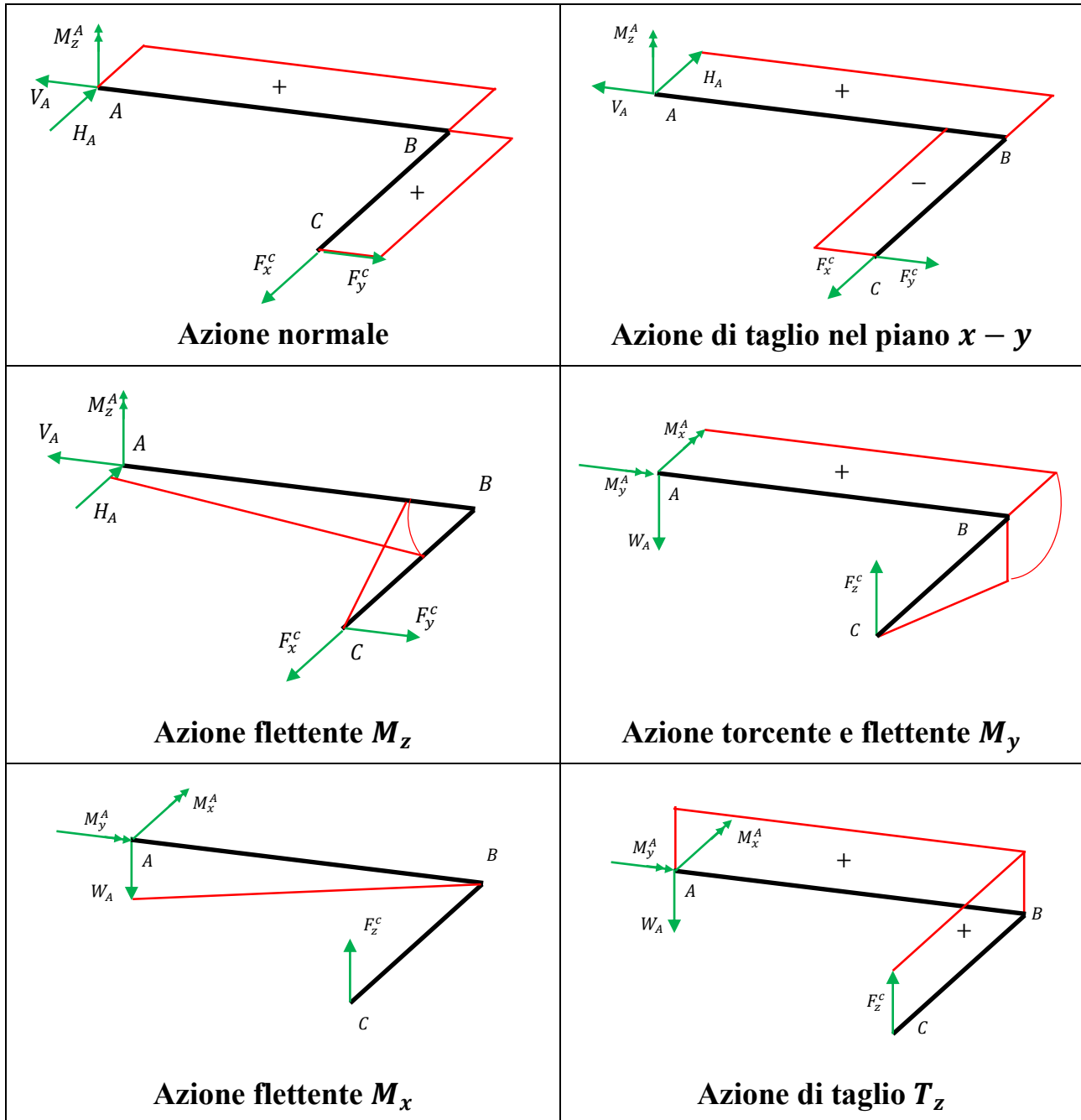
Si procede al disegno delle azioni interne.

| | |
|--|---|
|  <p style="text-align: center;">Azione di taglio T_z</p> | <p>Tratto AB: $T_z(y) = F_z^c$ Tratto BC: $T_z(x) = F_z^c$</p> |
|  <p style="text-align: center;">Momento flettente M_x</p> | <p>Tratto AB: $M_x(y) = F_z^c (L_{AB} - y)$ Tratto BC: $M_x(x) = 0$</p> <p>Nel punto A: $M_x(y = 0) = F_z^c L_{AB}$ Nel punto B: $M_x(y = L_{AB}) = 0$ Nel punto C: $M_x(x = L_{BC}) = 0$</p> |
|  <p style="text-align: center;">Momento flettente M_y</p> | <p>Tratto AB: $M_y(y) = -F_z^c L_{BC}$ Tratto BC: $M_y(x) = F_z^c (x - L_{BC})$</p> <p>Nel punto A: $M_y(y = 0) = -F_z^c L_{BC}$ Nel punto B: $M_y(y = L_{AB}) = -F_z^c L_{BC}$ Nel punto C: $M_y(x = L_{BC}) = 0$</p> |



Sulla struttura agiscono le 6 azioni interne calcolate prima nel piano $x - y$, poi considerando solo la forza F_z^c fuori dal piano.

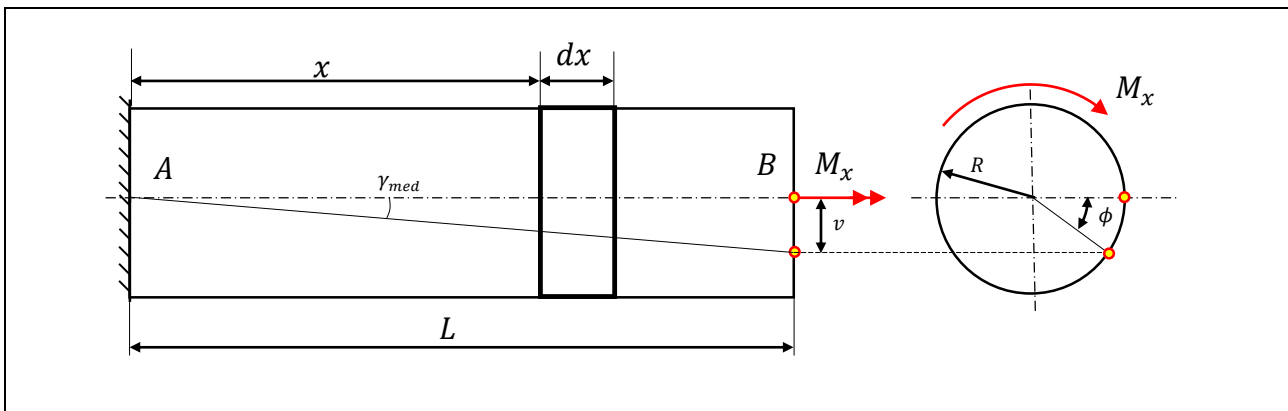
RIASSUMENDO



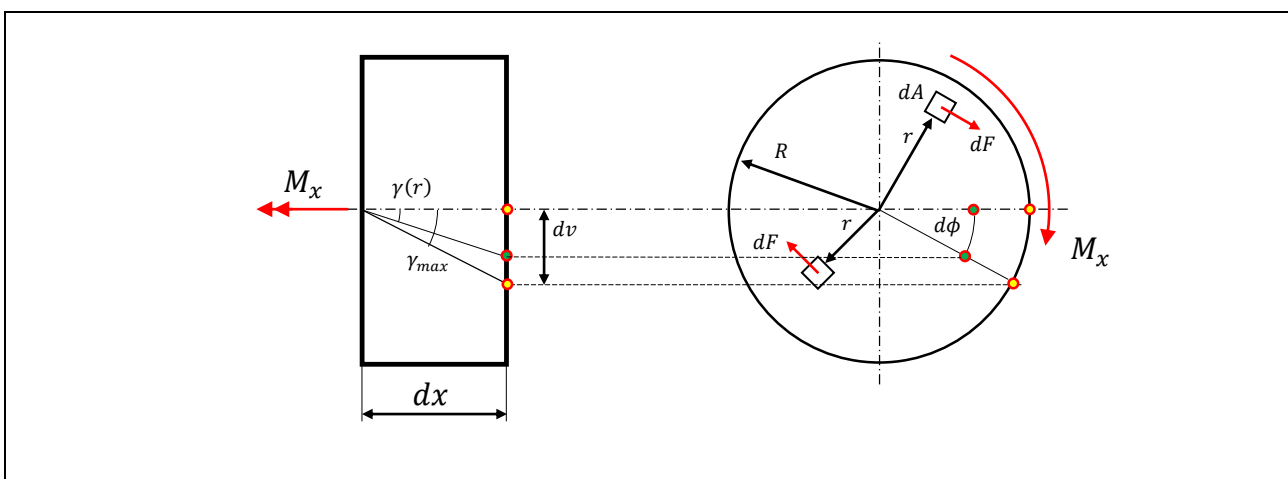
LA TORSIONE DELLE TRAVI A SEZIONE CIRCOLARE

In generale lo studio della torsione è molto complesso: le sezioni trasversali delle travi possono ingobbirsi (*warping*) e i suoi punti, oltre a ruotare intorno al baricentro della sezione, possono subire spostamenti in direzione dell'asse della trave. Se i vincoli impediscono questi spostamenti assiali, nascono degli sforzi assiali che si sommano a quelli prodotti dall'azione normale e dalla flessione.

Lo studio della torsione si semplifica quando le sezioni trasversali delle travi è di forma circolare (piena o cava).



Possiamo immaginare di estrarre dalla trave un cilindro di lunghezza infinitesima dx , che sta in equilibrio grazie alle forze infinitesime dF che agiscono sulla superficie della sua sezione trasversale, in direzione perpendicolare ad ogni raggio:





Per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse x deve essere verificata la seguente equazione:

$$\int_A r dF = M_x$$

dove $dF = \tau_{xt} dA$ da cui

$$\int_A \tau_{xt} r dA = M_x$$

Il problema è **staticamente indeterminato** per cui è necessaria un'ipotesi cinematica:

Si ipotizza che la superficie subisca una rotazione rigida ϕ intorno all'asse x e che rimanga piana.

Di conseguenza si può scrivere:

$$\gamma_{xt}(r) = \frac{\gamma_{max}}{R} r$$

Inoltre si suppone valida la Legge di Hooke: $\tau_{xt} = G\gamma_{xt}$

Da cui:

$$\int_A \tau_{xt} r dA = \int_A G\gamma_{xt} r dA = \int_A G \frac{\gamma_{max}}{R} r^2 dA = G \frac{\gamma_{max}}{R} \int_A r^2 dA = G \frac{\gamma_{max}}{R} I_p = M_x$$

Ma poiché:

$$\gamma_{xt}(r) = \frac{\gamma_{max}}{R} r$$

Sostituendo:

$$\frac{\gamma_{max}}{R} = \frac{\gamma_{xt}(r)}{r}$$

si ottiene:

$$G \frac{\gamma_{xt}(r)}{r} I_p = M_x$$

da cui:

$$\gamma_{xt}(r) = \frac{M_x r}{G I_p}$$

Per la Legge di Hooke:

$$\tau_{xt} = G\gamma_{xt} = \frac{M_x r}{I_p}$$

Se un elemento lungo dx è sottoposto a torsione si ottiene:



$$dx \cdot \gamma_{xt} = r d\phi$$

da cui si ottiene:

$$\gamma_{xt} = r \frac{d\phi}{dx}$$

Di conseguenza la rotazione infinitesima subita dalla sezione vale:

$$d\phi = \frac{\gamma_{xt}}{r} dx = \frac{M_x}{GI_p} dx$$

Integrando su tutta la trave si ottiene:

$$\phi = \int_L \frac{M_x}{GI_p} dx$$

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE

La densità di energia elastica nel caso del taglio puro vale:

$$\Psi = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Ricordando che:

$$\tau_{xt}(r) = \frac{M_x r}{I_p} \quad \text{e} \quad \gamma_{xt}(r) = \frac{M_x r}{GI_p}$$

e quindi:

$$\Psi = \frac{1}{2} \tau_{xt} \gamma_{xt} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2(x) r^2}{G I_p^2(x)}$$

L'energia elastica complessiva accumulata nell'intero volume della trave si ottiene integrando la densità di energia elastica:

$$\mathcal{L} = \int_{vol} \frac{1}{2} \frac{M_x^2(x) r^2}{G I_p^2(x)} dvol$$

Il volume infinitesimo $dvol$ si può esprimere come: $dvol = dA \cdot dx$ e poiché $M_x(x)$, G , e $I_p(x)$ sono funzione di x ma non dei punti interni all'area, l'integrale diventa:



$$\mathcal{L} = \int_{vol} \frac{1}{2} \frac{M_x^2(x) r^2}{G I_p^2(x)} dvol = \int_L \left(\frac{1}{2} \frac{M_x^2(x)}{G I_p^2(x)} \int_A r^2 dA \right) \cdot dx$$

Ricordando che $\int_A r^2 dA = I_p$ si ottiene:

$$\mathcal{L} = \int_L \frac{1}{2} \frac{M_x^2(x)}{G I_p(x)} \cdot dx$$