Esempi di applicazione del Metodo di Rayleigh-Ritz

1) Mensola caricata con un carico distribuito

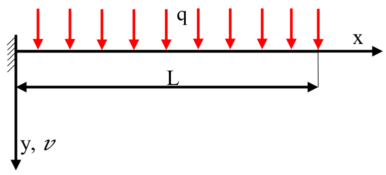
L’energia potenziale del sistema vale:

$$\pi_p = \int_0^L \frac{E \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 \cdot dx - \int_0^L q \cdot v(x) \cdot dx$$

Come nell’esempio precedente, imponiamo a priori il seguente campo di spostamento:

$$v(x) = a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

dove sono stati eliminati i coefficienti a_0 e a_1 per soddisfare le condizioni al contorno. La derivata prima e seconda del campo di spostamento valgono rispettivamente:



$$\frac{dv(x)}{dx} = 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x$$

L’energia potenziale del sistema risulta quindi pari a:

$$\pi_p = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L (2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x)^2 \cdot dx - q \cdot \int_0^L (a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3) \cdot dx$$

Sviluppando gli integrali abbiamo:

$$\pi_p = EI[2La_2^2 + 6a_2 a_3 L^2 + 6a_3^2 L^3] - q \cdot \left[\frac{L^3}{3} a_2 + \frac{L^4}{4} a_3\right]$$

I coefficienti a_2 e a_3 che rendono stazionario π_p sono determinati risolvendo il seguente sistema di due equazioni algebriche:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial a_2} = EI(4La_2 + 6L^2 a_3) - \frac{q \cdot L^3}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial a_3} = EI(6L^2 a_2 + 12L^3 a_3) - \frac{q \cdot L^4}{4} = 0$$

che in forma matriciale, dopo aver diviso le due equazioni per L diventa:

$$EI \begin{bmatrix} 4 & 6L \\ 6L & 12L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q \cdot L^2}{3} \\ \frac{q \cdot L^3}{4} \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$a_2 = \frac{\begin{Vmatrix} \frac{q \cdot L^2}{3} & 6L \\ \frac{q \cdot L^3}{4} & 12L^2 \end{Vmatrix}}{EI \begin{Vmatrix} 4 & 6L \\ 6L & 12L^2 \end{Vmatrix}} = \frac{4q \cdot L^4 - 3q \cdot L^4/2}{EI(48L^2 - 36L^2)} = \frac{5q \cdot L^2}{24EI}$$

$$a_3 = \frac{\begin{Vmatrix} 4 & \frac{q \cdot L^2}{3} \\ 6L & \frac{q \cdot L^3}{4} \end{Vmatrix}}{EI \begin{Vmatrix} 4 & 6L \\ 6L & 12L^2 \end{Vmatrix}} = \frac{q \cdot L^3 - 2q \cdot L^3}{12EIL^2} = -\frac{q \cdot L}{12EI}$$

La freccia ed il momento flettente valgono quindi:

$$v(x) = a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = \frac{qx^2}{24EI}[5L^2 - 2Lx]$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = EI(2a_2 + 6a_3 x) = \frac{q \cdot L}{2}\left(\frac{5L}{6} - x\right)$$

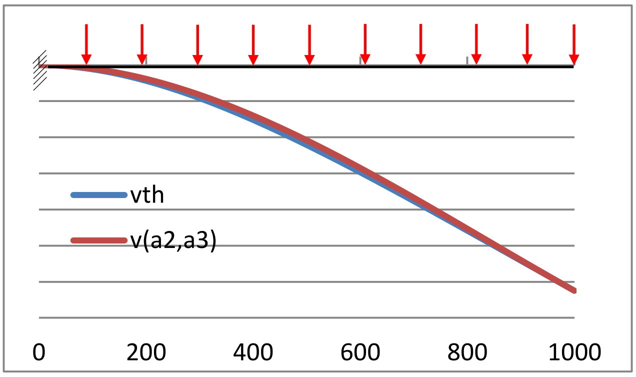
La freccia ed il momento flettente teorici valgono rispettivamente:

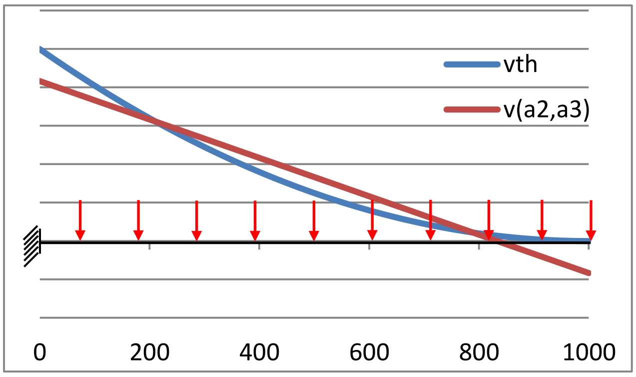
$$v_{teorico}(x) = \frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad M_{teorico}(x) = \frac{q}{2}(L-x)^2$$

Nelle seguenti tabelle e grafici riportiamo il confronto tra i valori teorici e quelli calcolati utilizzando due parametri $(a_{2,}a_3)$.

x	$v_{teorico}$	$v_{calc}(a_{2,}a_3)$	$Err(a_{2,}a_3)$
L	$\frac{qL^4}{8EI}$	$\frac{qL^4}{8EI}$	0 %

x	$M_{teorico}$	$M_{calc}(a_{2,}a_3)$	$Err(a_{2,}a_3)$
0	$\frac{qL^2}{2}$	$\frac{5qL^2}{12}$	-16.7 %
L	0	$\frac{-qL^2}{12}$	-





2) Mensola caricata con una copia concentrata

L'energia potenziale del sistema vale:

$$\pi_p = \int_0^L \frac{E \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 \cdot dx - M_0 \cdot \vartheta(L)$$

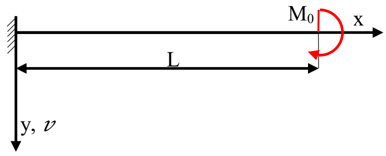
Come nell'esempio precedente, imponiamo a priori il seguente campo di spostamento:

$$v(x) = a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

dove sono stati eliminati i coefficienti a_0 e a_1 per soddisfare le condizioni al contorno. La derivata prima e seconda del campo di spostamento valgono rispettivamente:

$$\frac{dv(x)}{dx} = 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x$$



L'energia potenziale del sistema risulta quindi pari a:

$$\pi_p = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L (2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x)^2 \cdot dx - M_0 \cdot (2 \cdot a_2 \cdot L + 3 \cdot a_3 \cdot L^2)$$

Sviluppando l'integrale abbiamo:

$$\pi_p = EI[2La_2^2 + 6a_2 a_3 L^2 + 6a_3^2 L^3] - M_0 \cdot (2 \cdot a_2 \cdot L + 3 \cdot a_3 \cdot L^2)$$

I coefficienti a_2 e a_3 che rendono stazionario π_p sono determinati risolvendo il seguente sistema di due equazioni algebriche:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial a_2} = EI(4La_2 + 6L^2 a_3) - 2M_0 L = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial a_3} = EI(6L^2 a_2 + 12L^3 a_3) - 3M_0 L^2 = 0$$

che in forma matriciale, diventa:

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 6L^2 \\ 6L^2 & 12L^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2M_0 L \\ 3M_0 L^2 \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$a_2 = \frac{\begin{Vmatrix} 2M_0 L & 6L^2 \\ 3M_0 L^2 & 12L^3 \end{Vmatrix}}{EI \begin{Vmatrix} 4L & 6L^2 \\ 6L^2 & 12L^3 \end{Vmatrix}} = \frac{24M_0 \cdot L^4 - 18M_0 \cdot L^4}{EI(48L^4 - 36L^4)} = \frac{M_0}{2EI}$$

$$a_3 = \frac{\begin{Vmatrix} 4L & 2M_0 L \\ 6L^2 & 3M_0 L^2 \end{Vmatrix}}{EI \begin{Vmatrix} 4L & 6L^2 \\ 6L^2 & 12L^3 \end{Vmatrix}} = \frac{12M_0 L^3 - 12M_0 L^3}{12EIL^4} = 0$$

La freccia ed il momento flettente valgono quindi:

$$v(x) = a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = \frac{M_0}{2EI} \cdot x^2$$

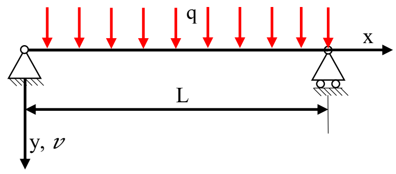
$$M(x) = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = EI(2a_2 + 6a_3 x) = M_0$$

che in questo caso risultano identici ai valori teorici:

$$v_{teorico}(x) = \frac{M_0}{2EI} x^2 \qquad M_{teorico}(x) = M_0$$

3) Trave su due appoggi caricata in modo uniforme

L'energia potenziale del sistema vale:



$$\pi_p = \int_0^L \frac{E \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 \cdot dx - \int_0^L q \cdot v(x) \cdot dx$$

Imponiamo a priori il seguente campo di spostamento:

$$v(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

Le condizioni al contorno impongono quanto segue:

per $x = 0$ $\quad v(x = 0) = a_0 = 0$

per $x = L$ $\quad v(x = L) = a_1 \cdot L + a_2 \cdot L^2 = 0$ $\quad$ da cui: $a_1 = -a_2 \cdot L$

Quindi il campo di spostamento assume la forma:

$$v(x) = -a_2 \cdot L \cdot x + a_2 \cdot x^2 = a_2 \cdot (x^2 - L \cdot x)$$

Le derivate dello spostamento valgono:

$$\vartheta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_2 \cdot (2x - L) \quad ; \quad \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 2a_2$$

L'energia potenziale del sistema risulta quindi pari a:

$$\pi_p = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L (2 \cdot a_2)^2 \cdot dx - q \cdot a_2 \cdot \int_0^L (x^2 - L \cdot x) \cdot dx$$

Sviluppando gli integrali abbiamo:

$$\pi_p = 2EILa_2^2 - q \cdot a_2 \cdot \left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{2}\right] = 2EILa_2^2 + \frac{q \cdot a_2 \cdot L^3}{6}$$

Il coefficiente a_2 che rende stazionario π_p vale:

$$a_2 = -\frac{q \cdot L^2}{24EI}$$

da cui il campo di spostamento vale:

$$v(x) = \frac{q \cdot L^2}{24EI} \cdot x \cdot (L - x)$$

ed il momento flettente vale:

$$M(x) = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 2a_2 EI = -\frac{q \cdot L^2}{12}$$

Per migliorare la soluzione possiamo pensare di aggiungere alcuni termini alla funzione spostamento, tali però da rispettare a priori le condizioni al contorno.

$$v(x) = a_0 + a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x)$$

Per le condizioni al contorno abbiamo $a_0 = 0$:

Poiché per $x = L$ $\quad v(x = L) = 0$ $\quad$ poniamo: $\quad f_1(x) = x \cdot (x - L)$ $\;$ e $\; f_2(x) = f_1^2 = x^4 - 2Lx^3 + L^2 x^2$

Quindi il campo di spostamento assume la forma:

$$v(x) = a_1 \cdot (x^2 - L \cdot x) + a_2 \cdot (x^4 - 2Lx^3 + L^2 x^2)$$

Le derivate dello spostamento valgono:

$$\vartheta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_1 \cdot (2x - L) + a_2 \cdot (4x^3 - 6Lx^2 + 2L^2 x)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 2a_1 + a_2 \cdot (12x^2 - 12Lx + 2L^2)$$

L'energia potenziale del sistema risulta quindi pari a:

$$\pi_p = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(2a_1 + a_2(12x^2 - 12Lx + 2L^2)\right)^2 dx - q\int_0^L \left(a_1(x^2 - Lx) + a_2(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)\right) dx$$

Sviluppando gli integrali abbiamo:

$$\pi_p = 2EIL \cdot \left(a_1^2 + \frac{a_2^2 L^4}{5}\right) - q \cdot \left[-\frac{L^3 a_1}{6} + \frac{L^5 a_2}{30}\right]$$

I coefficienti a_1 e a_2 che rendono stazionario π_p sono determinati risolvendo il seguente sistema di due equazioni algebriche:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial a_1} = 4EILa_1 + \frac{qL^3}{6} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial a_2} = \frac{4EIa_2L^5}{5} - \frac{qL^5}{30} = 0$$

che in forma matriciale, diventa:

$$EI\begin{bmatrix} 4L & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}L^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL^3}{6} \\ \frac{qL^5}{30} \end{Bmatrix}$$

Notiamo che non sono presenti termini fuori dalla diagonale, per cui la soluzione del sistema è immediata:

$$a_1 = -\frac{qL^2}{24EI} \quad ; \quad a_2 = \frac{q}{24EI}$$

La freccia ed il momento flettente valgono quindi:

$$v(x) = -\frac{qL^2}{24EI} \cdot (x^2 - L \cdot x) + \frac{q}{24EI} \cdot (x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)$$

$$M(x) = EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} = EI\left(-\frac{qL^2}{12EI} + \frac{q}{24EI} \cdot (12x^2 - 12Lx + 2L^2)\right)$$

Semplificando otteniamo:

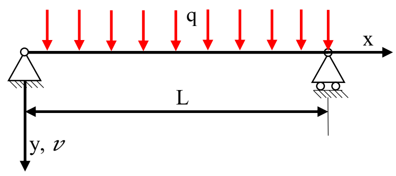
$$v(x) = \frac{qx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$$

$$M(x) = \frac{qx}{2}(x - L)$$

che in questo caso risultano identici ai valori teorici.

4) Trave su due appoggi caricata in modo uniforme (bis)

L'energia potenziale del sistema vale:



$$\pi_p = \int_0^L \frac{E \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 \cdot dx - \int_0^L q \cdot v(x) \cdot dx$$

Imponiamo a priori il seguente campo di spostamento:

$$v(x) = a_0 \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Le condizioni al contorno sono rispettate perché in $x = 0$ ed in $x = L$ lo spostamento risulta nullo.

Le derivate dello spostamento valgono:

$$\vartheta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{\pi a_0}{L} \cdot cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad ; \quad \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{\pi^2 a_0}{L^2} \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

L'energia potenziale del sistema risulta quindi pari a:

$$\pi_p = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L \left[-\frac{\pi^2 a_0}{L^2} \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2 \cdot dx - q \cdot a_0 \cdot \int_0^L sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot dx$$

Sviluppando gli integrali abbiamo:

$$\pi_p = \frac{EI}{2} \cdot \frac{\pi^4}{L^4} a_0^2 \cdot \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L + q \cdot a_0 \cdot \frac{L}{\pi}\left[cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L$$

$$\pi_p = \frac{EI}{4} \cdot \frac{\pi^4}{L^3} a_0^2 - 2q \cdot a_0 \cdot \frac{L}{\pi}$$

La derivata dell'energia potenziale dispetto all'unico parametro vale:

$$\frac{d\pi_p}{da_0} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{\pi^4}{L^3} a_0 - 2q \cdot \frac{L}{\pi}$$

da cui ricaviamo:

$$a_0 = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \cong \frac{qL^4}{76.5 \cdot EI}$$

Il campo di spostamento vale quindi:

$$v(x) = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

ed il momento flettente vale:

$$M(x) = EI\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -EI\frac{\pi^2 a_0}{L^2} \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\frac{4qL^2}{\pi^3} \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cong -\frac{qL^2}{7.75} \cdot sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

In mezzeria ($x = L/2$) la freccia (trascurando l'effetto del taglio) ed il momento flettente esatti valgono rispettivamente:

$$v(x = L/2) = \frac{5qL^4}{384EI} \cong \frac{qL^4}{76.8 \cdot EI} \quad ; \quad M(x = L/2) = -\frac{qL^2}{8}$$

mentre quelli calcolati valgono:

$$v(x = L/2) = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \cong \frac{qL^4}{76.5 \cdot EI} \quad ; \quad M(x = L/2) = -\frac{4qL^2}{\pi^3} \cong -\frac{qL^2}{7.75}$$

come si può osservare i due risultati sono molto prossimi.

Lo spostamento calcolato risulta più piccolo di quello esatto, cioè la struttura risulta più rigida di quella reale; d'altra parte il momento calcolato risulta più grande del valore esatto, a vantaggio della sicurezza.