Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

20 gennaio 2021

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - kz & x + y \\ x - z & -x + kz \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) Si verifichi che f è una applicazione lineare

b) Si trovino gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f non è iniettiva

c) Si trovino gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali f è biettiva

d) Verificare che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono vettori linearmente indipendenti di $M_2(\mathbb{R})$ e completarli a una base B di $M_2(\mathbb{R})$

e) Posto $k = 0$, trovare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base alla base B di $M_2(\mathbb{R})$ trovata nel punto precedente

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ stabilire se il seguente sistema lineare è compatibile ed in caso affermativo trovarne le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + kx_3 + kx_4 = k \\ -x_2 + x_3 + kx_4 = k \\ kx_1 + kx_2 = k \end{cases}$$

Esercizio 3

Si consideri l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

come matrice associata rispetto alla base $B = \{(1,0,-1), (0,1,0), (1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se f è diagonalizzabile e trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f