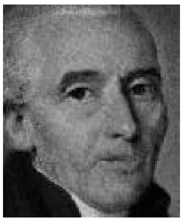

Joseph-Louis Lagrange
(1736—1813)

Istituzioni di Analisi Superiore

Antonio Greco
e-mail: greco@unica.it
tel. 070 675 8524

Anno accademico **2003/2004**
primo semestre

Leonhard Euler
(1707—1783)

Oggetto e finalità del corso

Il corso si impernia su alcuni dei problemi classici del *Calcolo delle Variazioni*, come, ad esempio: perché il cerchio è la figura piana con l'area più grande, fra tutte quelle aventi un perimetro dato? Qual è la traiettoria che permette, ad un grave in caduta, di transitare nel minimo tempo possibile fra due punti dati?

Tali problemi, pur avendo origini diverse (geometriche, fisiche, ecc.) hanno la stessa formulazione matematica: studiare il minimo di una funzione il cui dominio non è, come nel caso delle funzioni elementari dell'Analisi, un insieme di numeri reali, ma è bensì *un insieme di funzioni*.

Nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore vengono illustrati i primi rudimenti di questo vastissimo settore della matematica, ad un triplice scopo:

1. per il notevole interesse che i problemi classici del calcolo delle variazioni hanno di per sé;
2. per consolidare la formazione di base degli studenti, rivisitando alcune nozioni fondamentali, come ad esempio il concetto di *minimo* ed il *teorema di Fermat*;
3. per motivare un eventuale proseguimento degli studi, ad esempio sui seguenti argomenti:
   - i problemi al contorno per le equazioni differenziali del secondo ordine;
   - gli *spazi funzionali* e le loro proprietà, ed in particolare gli spazi di funzioni *non necessariamente derivabili*.

Esami

L'esame consiste in una prova orale. Non è prevista una prova scritta. Al momento dell'esame, lo studente deve dimostrare di **conoscere** gli argomenti di questo programma, e di **saper risolvere** degli esercizi dello stesso livello di difficoltà di quelli assegnati durante il corso. In particolare, egli deve:

- avere una solida conoscenza delle nozioni di massimo e minimo e del teorema di Fermat;
- saper risolvere problemi isoperimetrici elementari, come ad esempio determinare il rettangolo di area massima fra tutti quelli aventi un dato perimetro;
- avere un'idea delle origini, degli scopi, e di alcuni dei problemi e dei metodi del calcolo delle variazioni;
- saper determinare il minimo di funzionali del calcolo delle variazioni particolarmente semplici, come ad esempio il più tipico di essi, l'integrale di Dirichlet (in dimensione 1), sotto altrettanto semplici condizioni al contorno, come ad esempio $u(a) = u(b) = 0$.

Gli esercizi del corso sono reperibili presso il docente.

Frequenza

In occasione del test di ingresso e delle due verifiche *in itinere* sono stati rilevati i seguenti dati:

- al test di ingresso: 4 presenti;
- alla prima verifica: 12 presenti;
- alla seconda verifica: 11 presenti.

La frequenza del corso non è obbligatoria.

Programma

Premessa: per poter *usare* la matematica, oltre a saper esprimere i concetti in modo rigoroso è importante averne una buona rappresentazione *intuitiva*.

Pre-requisiti di geometria euclidea:

- Area del cerchio, area della superficie sferica, volume della sfera.

Pre-requisiti di logica:

- La negazione dell'enunciato *«per ogni ... si ha ...»*
non è *«per nessun ... si ha ...»*,
ma è invece *«esiste almeno un ... per il quale non si ha ...»*
[PS1, pag. 9, formula (1.3)].

Pre-requisiti sull'ottimizzazione in dimensione 1:

- Nozione di funzione superiormente limitata, nozione di funzione inferiormente limitata.
- Nozione di massimo assoluto, nozione di minimo assoluto di una funzione [PS1, pag. 154].
- Nozione di *estremo superiore*, nozione di estremo inferiore di una funzione [PS1, pag. 154].
- Esempi di funzioni definite sull'intervallo chiuso [0,1] e *prive* sia di punti di massimo assoluto, che di punti di minimo assoluto:
  - $y = x$ per x in (0,1); $y = 1/2$ per $x = 0$ e per $x = 1$.
  - $y = \operatorname{tg} \pi x$ per x in $[0,1]\setminus\{1/2\}$; $y = 0$ per $x = 1/2$.
- Esempi di funzioni inferiormente limitate, ma prive di minimo:
  - $y = e^x$, per x in **R**.
  - $y = \operatorname{arctg} x$, per x in **R**.
- Esempi di funzioni per le quali la ricerca dei punti di massimo assoluto, e dei punti di minimo assoluto, può essere effettuata *senza l'uso* del calcolo differenziale:
  - $y = |x|$, per x in **R**.
  - $y = x$, per x in [0,1].
  - $y = x^2$, per x in **R**.
- Nozione di *derivata* di una funzione [PS1, pag. 272].
- La classe $C^k([a,b])$ [PS1, pag. 281].
- Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile.
- Nozione di *punto critico* di una funzione [PS1, pag. 293].
- Nozione di *punto interno* a un dato sottoinsieme di **R** [PS1, pag. 134].
- Enunciato e dimostrazione del teorema di Fermat: i punti di massimo interni, e i punti di minimo interni di una funzione derivabile sono punti critici [PS1, pag. 293].
- Dimostrazione del fatto che i punti di massimo interni, e i punti di minimo interni di una funzione qualunque *non sono*, in generale, punti critici (perché la funzione potrebbe non essere derivabile).

- Dimostrazione del fatto che i punti di massimo e i punti di minimo di una funzione derivabile *non sono*, in generale, punti critici (perché potrebbero non essere interni).
- Dimostrazione del fatto che i punti critici interni di una funzione derivabile *non sono*, in generale, né punti di massimo, né punti di minimo. Per questa dimostrazione, e anche per le due precedenti, è sufficiente esibire un controesempio. Un controesempio adatto per questa dimostrazione si trova in [PS1, pagg. 293-294]. Controesempi per le due dimostrazioni precedenti si trovano fra le funzioni elencate qui sopra.

Pre-requisiti sul calcolo integrale:

- Interpretazione geometrica dell'integrale definito di una funzione *negativa*.
- Calcolo dell'integrale definito di una funzione costante, *senza* la ricerca di una primitiva.
- L'unica funzione di classe C^0([a,b]), *non negativa*, il cui integrale sull'intervallo [a,b] è nullo, è la funzione identicamente nulla [PS1, pag. 466, esercizio 4].
- Formula di derivazione sotto il segno di integrale [A1, pag. 564, formula (2.9)].

Pre-requisiti sulle curve in forma non-parametrica:

- Lunghezza del grafico di una funzione regolare.

Pre-requisiti sul calcolo differenziale in dimensione 2:

- Differenziabilità di una funzione [PS1, pag. 354].
- Il vettore gradiente [PS1, pag. 351].
- Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [PS2, cap. 2, paragrafo 2.1].

Semplici problemi isoperimetrici:

- Dimostrazione del fatto che il quadrato ha *area massima* fra tutti i rettangoli aventi lo *stesso perimetro*.
- Conseguenze della suddetta proprietà del quadrato: recipienti di volume massimo; condotte di portata massima; appezzamenti di terreno di area massima.
- Deduzione della legge di Snell della rifrazione dal principio di Fermat.
- Altri semplici problemi isoperimetrici:
    - Il triangolo *rettangolo* di cateti *a* e *b* ha area massima fra tutti i triangoli aventi due lati di lunghezze *a* e *b*.
    - Il triangolo *isoscele* di base *b* e perimetro P ha area massima fra tutti i triangoli aventi la stessa base e lo stesso perimetro.

Problemi classici del calcolo delle variazioni:

- Origini e scopi del calcolo delle variazioni [PS2, pag. 562], [K1, cap. 24], [CR, cap. VII, paragrafo 10.1, pag. 557].
- Alcuni problemi classici del calcolo delle variazioni:
    - Il problema di Didone [PS2, pagg. 562, 564], [K1, pagg. 672-673].
    - Il problema delle geodetiche: geodetiche in $\mathbf{R}^2$ [A2, pagg.539-540 e 552].
    - La brachistocrona [A2, pagg. 540-541], [PS2, pag. 563], [K1, pagg. 670-671].

Il metodo di Eulero e Lagrange:

- Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni [A2, pagg. 548-549].
- L'equazione di Eulero-Lagrange [A2, pagg. 544–549].
- Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel calcolo delle variazioni e sua applicazione al problema isoperimetrico.

Cenni ai metodi diretti:

- Il problema dell'*esistenza* di una funzione estremante.
- Nozione di *successione minimizzante*.

Bibliografia

(Fra parentesi tonde sono riportati, quando possibile,
gli estremi della collocazione nella Biblioteca di Matematica)

[A1], [A2] (515 AME, Aa VII 29, Aa XIII 14 2)
L. Amerio,
Analisi matematica, volumi 1 e 2,
UTET.

[K1]
M. Kline,
Storia del pensiero matematico, volume 1,
Einaudi.

[CR] (500.9 COU)
R. Courant, H. Robbins,
Che cos'è la matematica?
Universale scientifica Boringhieri.

[PS1], [PS2]
C. D. Pagani, S. Salsa,
Analisi Matematica, volumi 1 e 2,
Masson.

Un breve filmato su compact disc è disponibile presso il docente.