

# **MATERIALI STRUTTURALI E I LORO RIFLESSI SULLE STRUTTURE**

*Per l'artista creatore, ogni materiale reca un suo messaggio*

F.L. Wright

- Pietre
- Laterizio
- Metallo
- Legno
- Conglomerato armato e precompresso

- Le strutture non sono un artificio del pensiero, ma sono fatte di carne ed ossa, cioè sono formate da materiali che si dicono propriamente materiali strutturali.
- Acquisiti corpo e forma mediante i materiali, le strutture possono assolvere al loro compito mostrando un comportamento diverso a seconda del corpo e della forma (brevemente, la tipologia) che a loro vengono assegnati. Tale comportamento strutturale risulta quindi legato a due circostanze, strettamente connesse fra loro, che sono appunto i materiali e gli schemi strutturali.
- Con determinati materiali non si possono realizzare convenientemente che determinati schemi strutturali e, per converso, determinati schemi richiedono quasi inevitabilmente l'uso di determinati materiali.

PARTENONE (477-438 a.C.) - Arch. Phidia



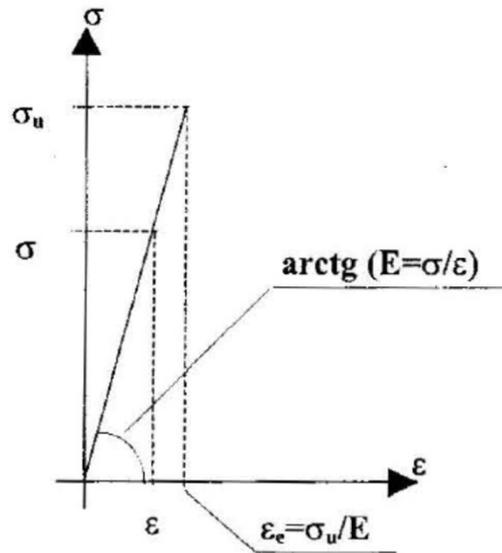
GOLDEN GATE BRIDGE - S. FRANCISCO (1933-37) - J.B. STRAUSS



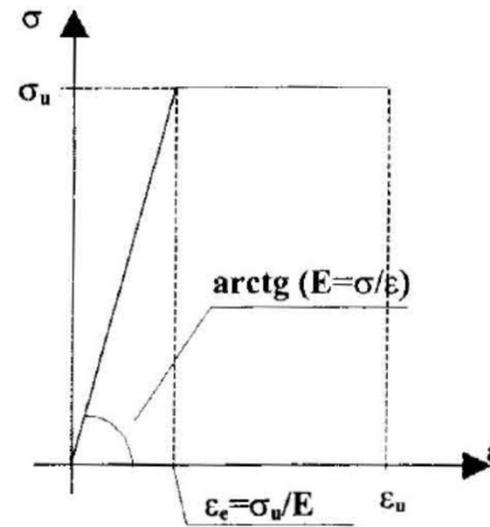
# CARATTERISTICHE DEI MATERIALI

- CARATTERISTICHE MECCANICHE
  - ✓ Elasticità
  - ✓ Plasticità
  - ✓ Resistenza
  - ✓ Rigidità
- ALTRE CARATTERISTICHE
  - ✓ Viscosità
  - ✓ Resistenza a fatica
  - ✓ Durabilità

# RESISTENZA

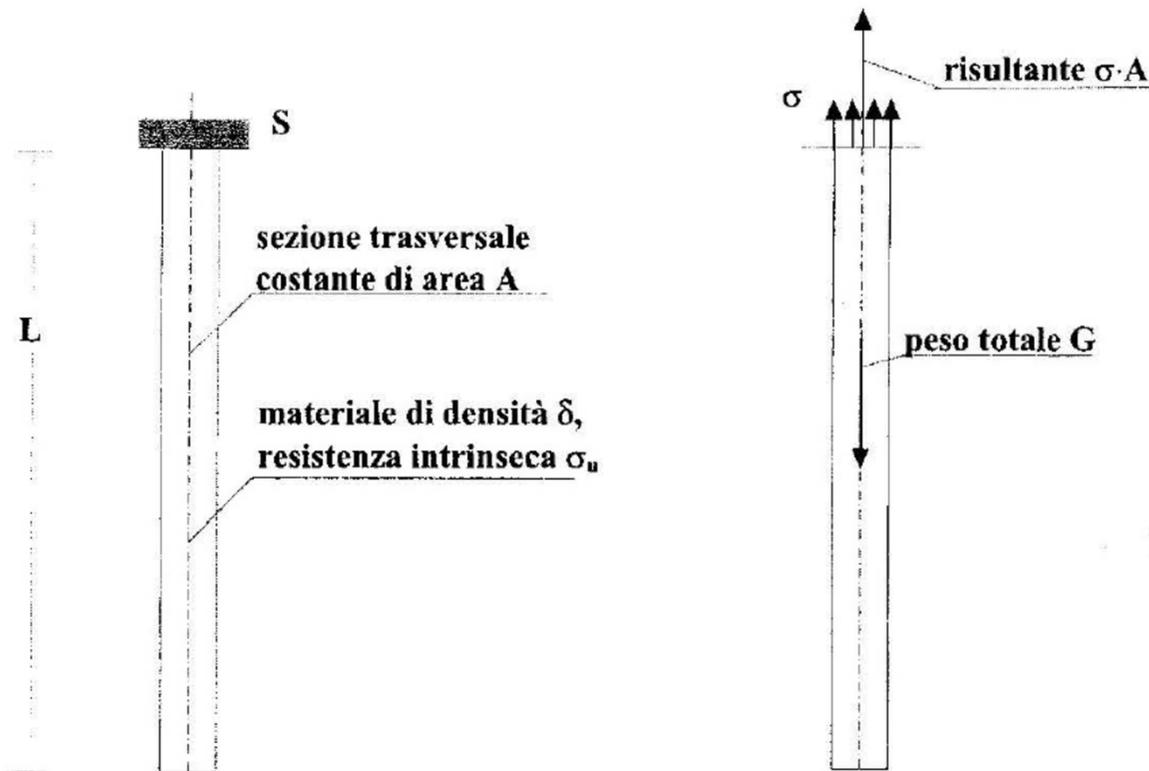


a) materiale fragile



b) materiale duttile

# La lunghezza di resistenza limite per un elemento teso o compresso



- volume totale dell'asta  $V=LA$
- massa totale dell'asta  $M=V \delta$ , essendo  $\delta$  la densità del materiale,
- peso totale dell'asta  $G=M g$ , essendo  $g$  l'accelerazione di gravità,

e quindi:

- $G=LA \delta g$   $\delta g$  è il peso specifico

Per l'equilibrio deve risultare:

- $G = \sigma A$
- $LA \delta g = \sigma A$

Semplificando per  $A$  e risolvendo rispetto ad  $L$ , si ottiene:

- $L = \sigma / \delta g$

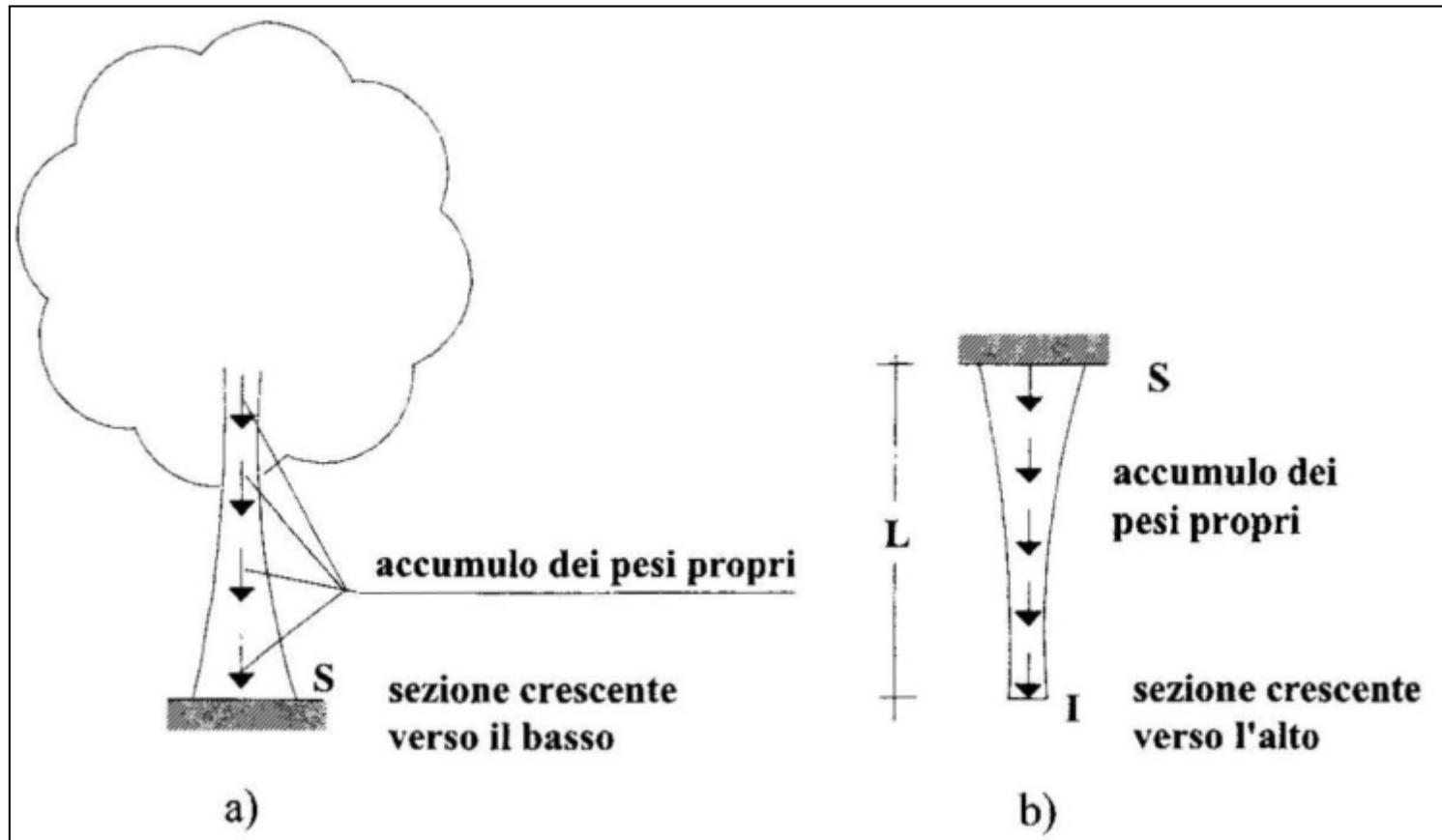
Sostituendo a il valore di rottura (ultimo), si ottiene:

- $L_u = \sigma_u / \delta g$  *lunghezza di resistenza specifica*

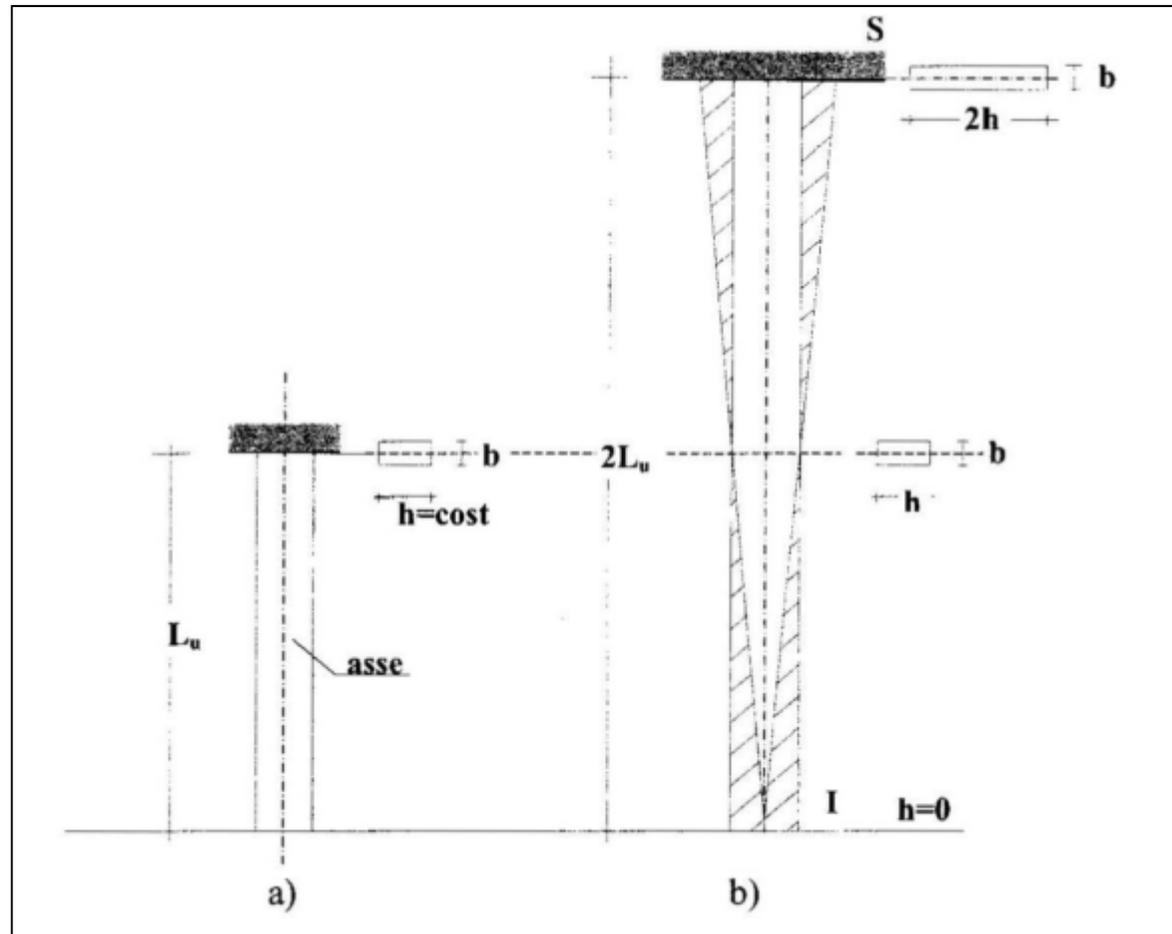
- $L_u = \sigma_u / \delta g$  *lunghezza di resistenza*  
*specifica*

- le lunghezze dell'elemento non sono influenzate dall'area  $A$ , cioè non si può pensare di migliorarle disponendo più materiale intorno all'asse rettilineo dell'asta: giacché, è vero che aumentando  $A$  aumenta la resistenza  $\sigma A$ , ma nella stessa misura cresce il peso  $L\delta g A$ ;
- non ha interesse la forma della sezione, che può essere qualsiasi, purché simmetrica intorno all'asse dell'asta, affinché si abbia soltanto una sollecitazione assiale.

# Il rendimento strutturale $\chi$ per gli elementi tesi o compressi



Profilazione dell'elemento con la variabilità della sezione



Profilazione dell'elemento con variabilità lineare della sezione  
( $b = \text{const.}$ )

Si vuole dimostrare come dando **variabilità lineare alla sezione**, conseguente alla forma data all'elemento strutturale, si ottenga il **raddoppio delle prestazioni in termini di lunghezza di resistenza**.

Lunghezza di resistenza specifica per l'asta a) avente sezione costante:

$$L_u = \sigma_u / \delta g$$

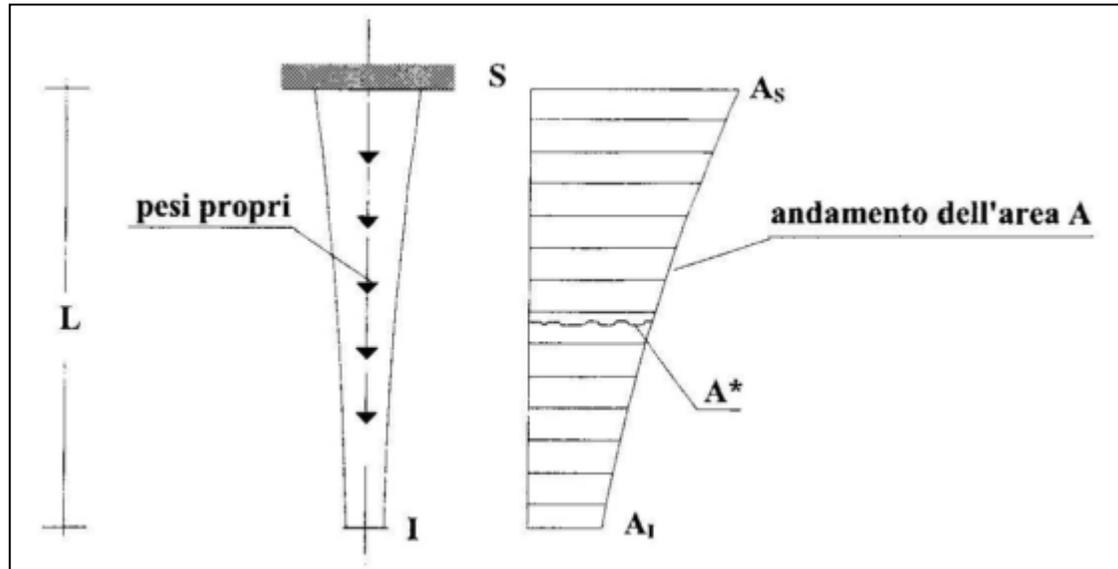
L'asta b) presenta invece una sezione variabile linearmente.

Nella sezione distante  $L_u$  dal piede si ha la stessa resistenza  $R_u = h \cdot b \cdot \sigma_u$  dell'asta a) mentre il peso è solo la metà ne consegue che per l'asta b) alla distanza  $L_u$  non si arriva alla rottura.

Affinché avvenga la rottura, bisogna portarsi alla distanza  $2L_u$  dal piede, giacché si avrà così un peso doppio di quello della asta a) ma altresì una resistenza doppia avendosi per la sezione un'altezza doppia,  $2h$ .

**Risultato:** Con questa variabilità lineare della sezione, si è ottenuto il raddoppio delle prestazioni in termini di lunghezza di resistenza.

Asta appesa, soggetta al peso proprio, avente una sezione variabile.



Hp: supponiamo di assegnare ad  $A$  una variazione tale da escludere qualsiasi rottura lungo l'asta, mentre sia proprio la sezione di sommità  $S$  a rompersi, per l'accumulo dei pesi propri in corrispondenza ad una determinata lunghezza dell'asta.

$$\text{Volume dell'asta } V = L \cdot A^*$$

$A^*$  = valore medio dell'area  $A$  sulla lunghezza  $L$  non valutato in questa sede

Nelle ipotesi fatte si può esprimere  $A^*$  come frazione  $1/\chi$  di  $A_s$  (il pedice  $s$  = sommità):

$$A^* = A_s / \chi \quad \text{con } \chi > 1$$

*Per l'asta a)  $A^* = A_s$  mentre per l'asta b)  $A^* = A_s / 2$*

$$G = V \cdot \delta g = L \cdot A^* \cdot \delta g = L \cdot (A_s / \chi) \cdot \delta g$$

Nella sezione  $s$  la risultante  $\sigma$  vale  $\sigma \cdot A_s$  e questa risultante deve equilibrare il peso  $G$

$$L \cdot (A_s / \chi) \cdot \delta g = \sigma \cdot A_s$$

$$\text{da cui } L = \chi \cdot \sigma / \delta g$$

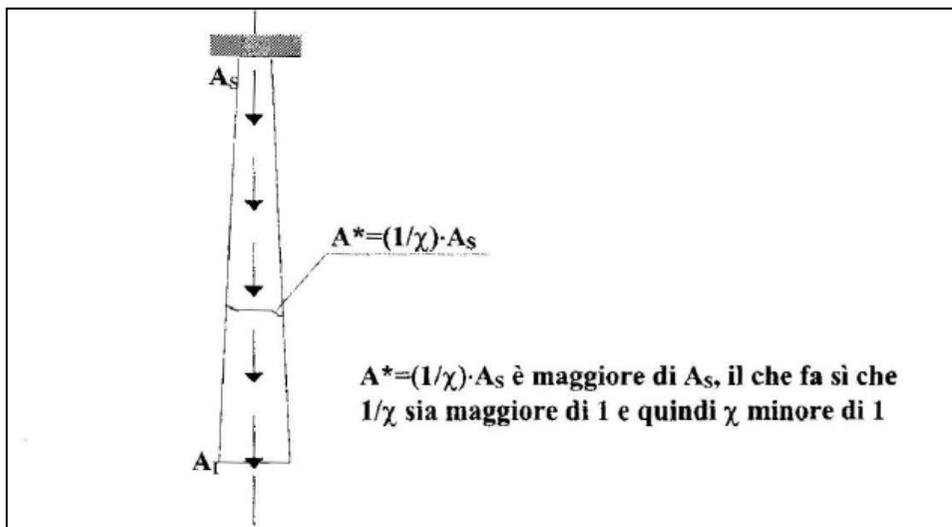
Con  $\sigma = \sigma_u$  e quindi con  $L = L_u$

$$L_u = \chi \cdot \sigma_u / \delta g$$

$$L_u = \chi \cdot \sigma_u / \delta g$$

Il parametro  $\chi$  costituisce la misura del "rendimento" dell'elemento strutturale conseguente alla variabilità assegnata alla sua sezione: esso dicesi appunto **rendimento strutturale**.

Quanto più  $\chi$  è grande, tanto maggiori sono le lunghezze di resistenza  $L_u$ : pertanto, occorre cercare di realizzare forme strutturali di massimo rendimento



Caso di asta appesa con sezione «malamente» variabile



Palazzo di Cnosso

Un migliore comportamento strutturale si può solo ottenere:

- aumentando la resistenza intrinseca  $\sigma_u$ ;
- e/o riducendo il suo peso specifico  $\delta g$ ;
- e/o aumentando in modo intelligente il rendimento strutturale  $\chi$  (e questo è proprio legato all'intuizione e all'intelligenza dell'uomo).

# L'effetto dei sovraccarichi per gli elementi tesi o compressi

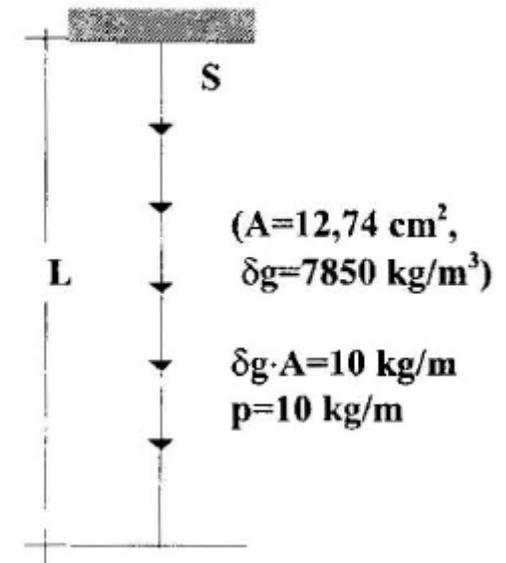
Si considera al posto del peso specifico reale ( $\delta g$ ) del materiale un peso specifico fittizio ( $\delta g$ )<sup>\*</sup> che conteggi la presenza del sovraccarico  $p$ .

$$(\delta g)^* \cdot A = (\delta g) \cdot A + p$$

dividendo per  $A$

$$(\delta g)^* = (\delta g) + p/A$$

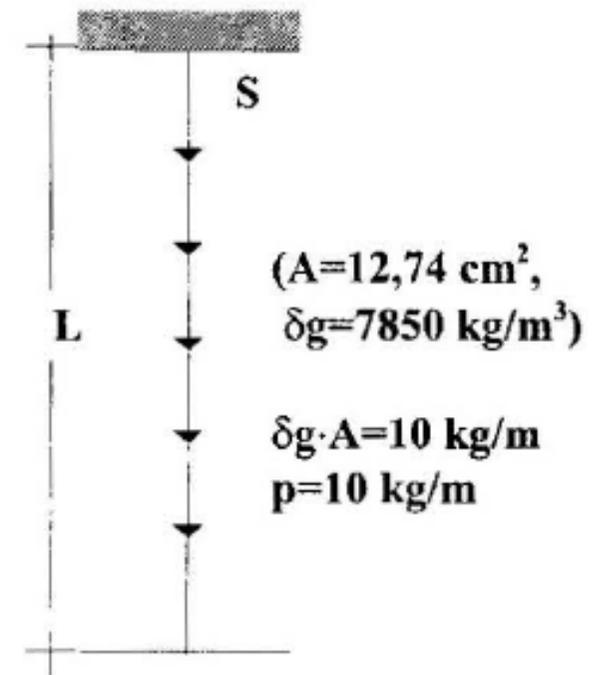
ESEMPIO: tondo in acciaio appeso, con peso proprio e sovraccarico, soggetto oltre al peso proprio  $(\delta g) \cdot A$  ad un sovraccarico  $p$  uniformemente distribuito



$$\delta g = 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3$$

$$1\text{m di lunghezza pesa: } (\delta g) \cdot A \cdot 1000 = 100\text{N}$$

$$\text{hp: } p = 100\text{N}/1000\text{mm} = 0,1\text{N/mm}$$

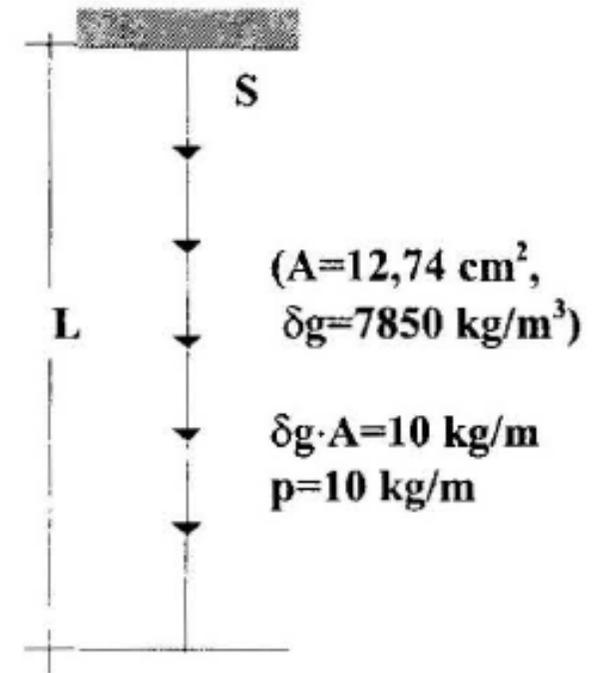


Si può subito dire che il peso specifico fittizio  $(\delta g)^*$ , per poter tener conto del peso del tondo (10 kg/m) e del sovraccarico  $p$  (pure lui di 10 kg/m), dovrà essere il doppio del peso specifico reale  $(\delta g)$ .

$$(\delta g)^* = (\delta g) + p/A =$$

$$= 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 + 0,1/1274 =$$

$$= 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 + 78,5 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3 = 2 (\delta g)$$



Se il peso specifico raddoppia  $L_u = \sigma_u / \delta g$  la lunghezza si dimezza

Se poi  $p$  fosse doppio del peso proprio, la lunghezza si

ridurrebbe a  $1/3$ , se fosse triplo, la lunghezza si ridurrebbe a

$1/4$ , e così via.

$$\frac{\sigma_u}{(\delta g)^*} = \frac{\sigma_u}{(\delta g)} \frac{1}{(\delta g)^*/(\delta g)} = \frac{L_u}{c}$$

Essendo  $L_u = \sigma_u / \delta g$

$$c = \frac{(\delta g)^*}{(\delta g)} = \frac{(\delta g) + p/A}{(\delta g)} = 1 + \frac{p}{(\delta g) \cdot A}$$

$\frac{p}{(\delta g) \cdot A}$  è dato dal rapporto fra il sovraccarico  $p$  uniformemente distribuito e il peso proprio dell'elemento, le lunghezze sono influenzate dall'area  $A$  attraverso tale coefficiente e al crescere di  $A$  diventa sempre più prevalente il peso proprio  $(\delta g) \cdot A$  sul sovraccarico  $p$ , e l'addendo  $\frac{p}{(\delta g) \cdot A}$  si riduce, cosicché si riduce  $c$  e si attenua la penalizzazione prodotta da  $c$  sulle lunghezze  $\frac{L_u}{c}$ .

Il risultato sarà tanto migliore quanto più è grande l'area  $A$ , mentre la forma della sezione non ha interesse e può quindi essere qualsiasi.

Nel caso dell'esempio  $c = 1 + \frac{p}{(\delta g) \cdot A} = 1 + \frac{1000}{10} = 101$ ,  $L_u$  valore tabellato per acciai medio-alti, nella formula viene inserito il coefficiente di sicurezza  $\gamma$

$$\bar{L} = \frac{L_u}{\gamma \cdot c} = \frac{7640 \text{ m}}{2,5 \cdot 101} = 30,26 \text{ m.}$$

Le lunghezze vengono indicate con due soprassegni per evidenziare che esse contengono sia il fattore di sicurezza che il coefficiente di utilizzo  $c$ .

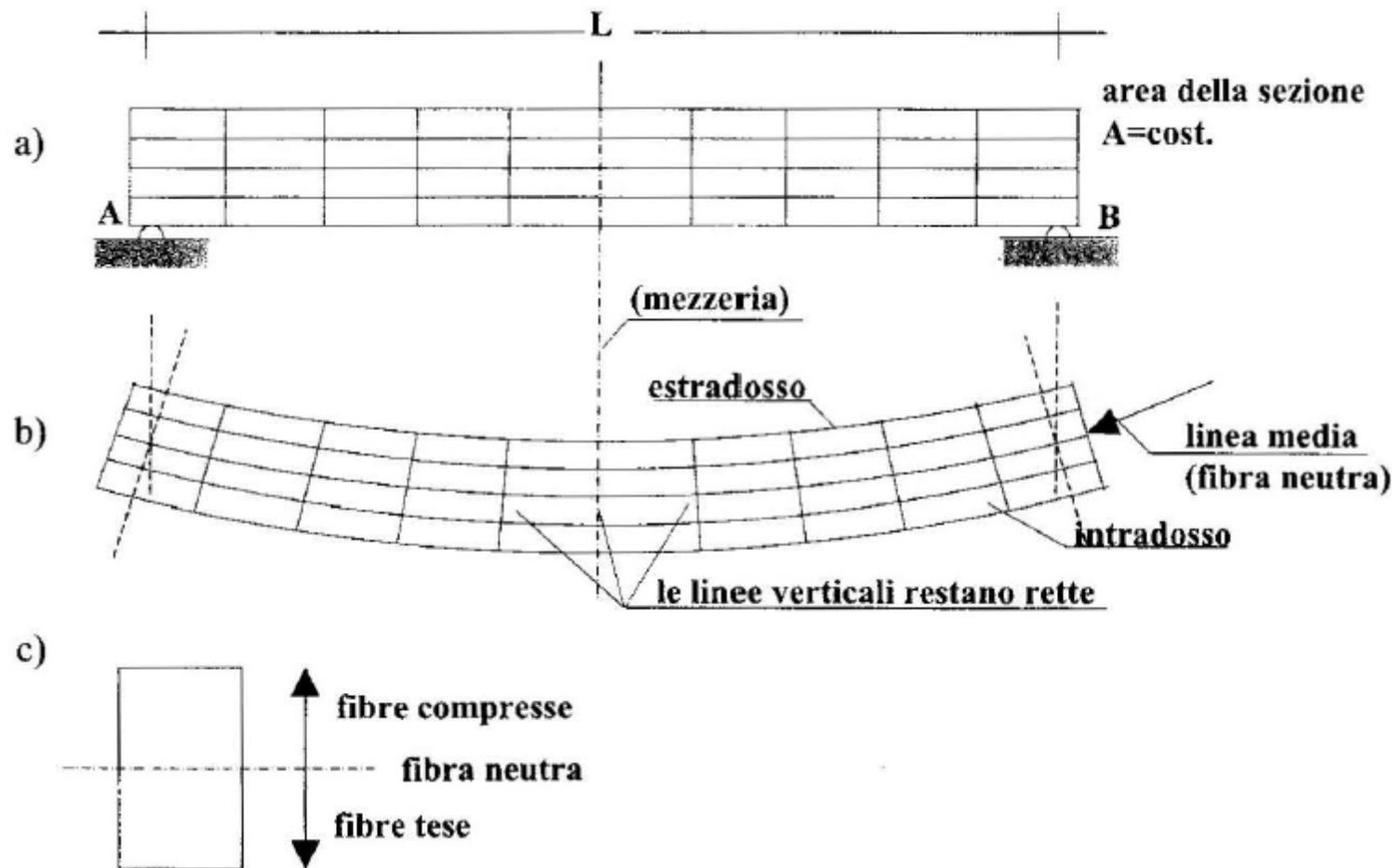
Un tondo in acciaio avente un diametro di circa 4 cm può sopportare, oltre al peso proprio, un sovraccarico teorico complessivo di circa 30t.

$$P = \bar{\bar{L}} \cdot p = 30,26 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg/m} = 30260 \text{ kg}$$





# Le luci di resistenza limite per gli elementi inflessi



Trave inflessa soggetta al suo peso proprio

$$V=L \cdot A$$

$$M=V \cdot \delta$$

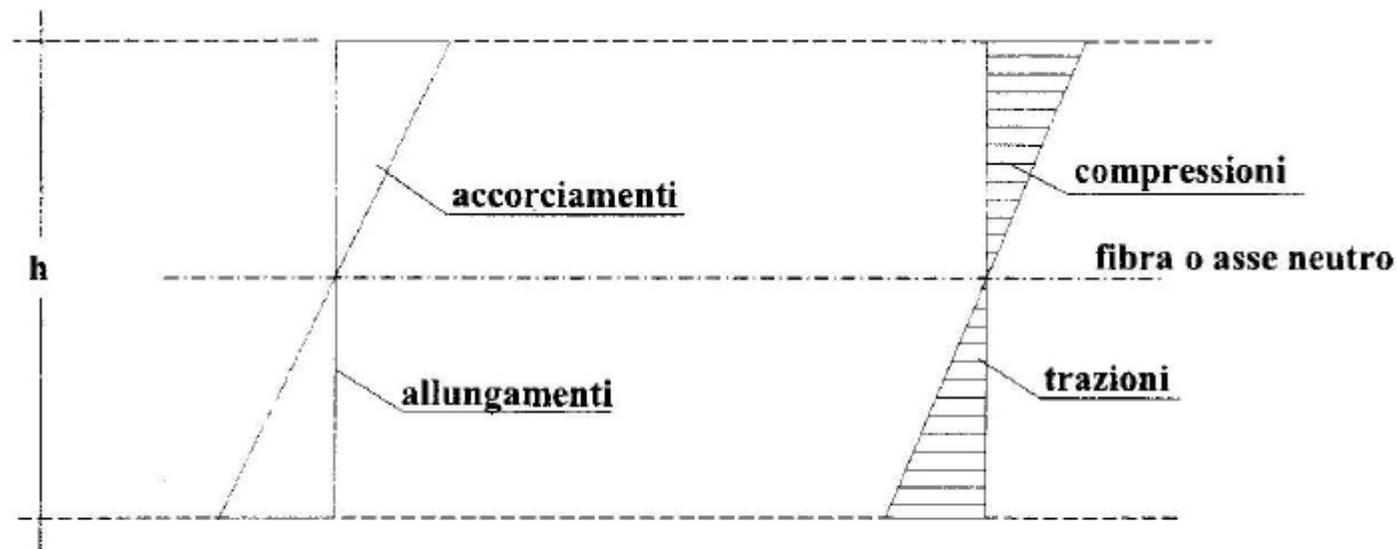
massa totale della trave

Peso totale della trave  $G= M \cdot g$  da cui  $G= L \cdot A \cdot \delta \cdot g$

Questo peso fa inflettere la trave verso il basso (fig. b).

In conseguenza dell'inflessione, la fibra superiore (estradosso) si accorcia, quella inferiore (intradosso) si allunga, mentre una fibra intermedia mantiene la sua lunghezza originaria. Questa fibra viene anche detta fibra neutra, proprio perché l'inflessione non ne fa variare la lunghezza.

Invece, le fibre al di sopra della fibra neutra sono compresse e si accorciano, quelle al di sotto sono tese e si allungano (fig. c).

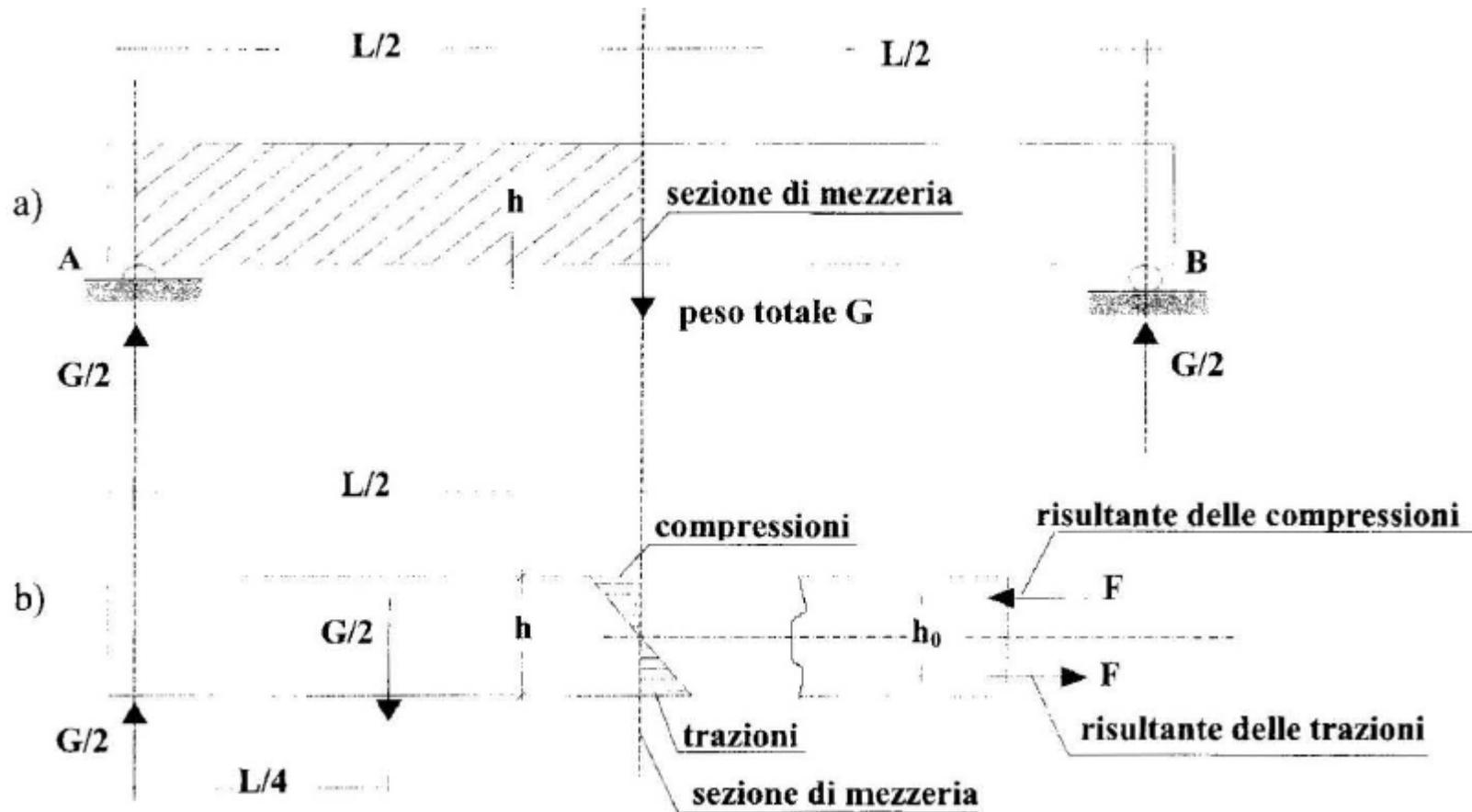


a) andamento delle  $\varepsilon$

b) andamento delle  $\sigma$  con  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Distribuzione delle deformazioni  $\varepsilon$  delle tensioni  $\sigma$  sull'altezza  $h$  della sezione.

Ritenendo valida la legge di elasticità lineare  $\sigma = \varepsilon \cdot E$  sono distribuite linearmente le tensioni normali.



Consideriamo la trave di sezione e peso unitario.

La metà trave di sinistra risulta caricata dalla reazione  $G/2$  (verso l'alto) in corrispondenza dell'appoggio A e dal peso proprio  $G/2$  (verso il basso) agente ad una distanza  $(1/2) \cdot L/2 = L/4$  da tale appoggio. L'equilibrio alla traslazione in direzione verticale è assicurato.

Tuttavia, questi due carichi  $G/2$  non hanno la stessa linea d'azione, ma sono posti ad una distanza mutua  $L/4$ , cioè presentano un "braccio di leva" che farebbe ruotare la metà trave di sinistra in senso orario.

### Come assicurare l'equilibrio alla rotazione?

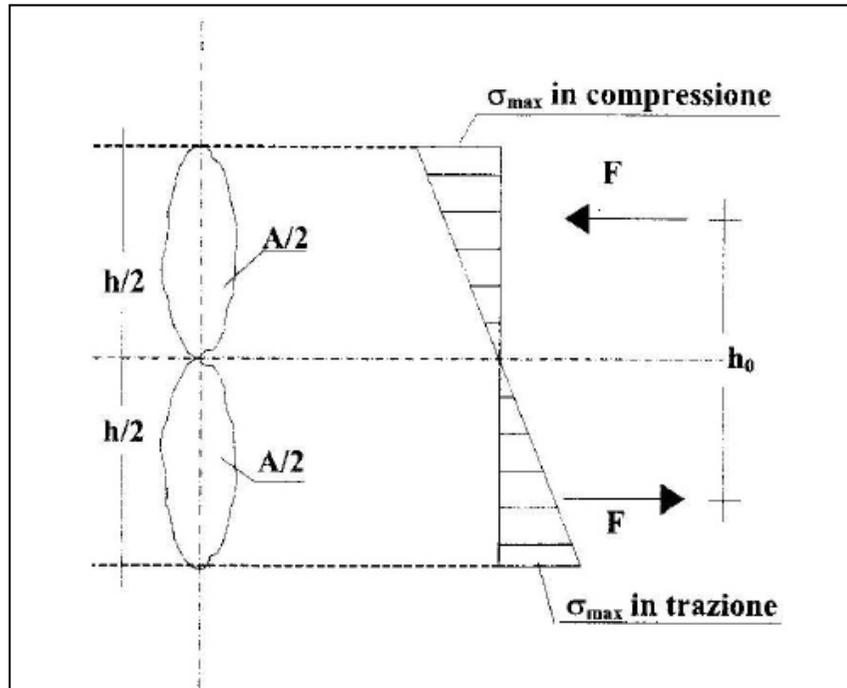


Sulla sezione di mezzeria agiscono le tensioni normali  $\sigma$ , di compressione al di sopra della fibra neutra e di trazione al di sotto. Le risultanti di tali compressioni e di tali trazioni devono essere uguali fra loro (e le indicheremo entrambe con  $F$ ), affinché sia assicurato l'equilibrio della metà trave alla traslazione in direzione orizzontale.

Affinché venga assicurato l'equilibrio alla rotazione deve risultare:

$$(G/2) \cdot (L/4) = F \cdot h_0$$



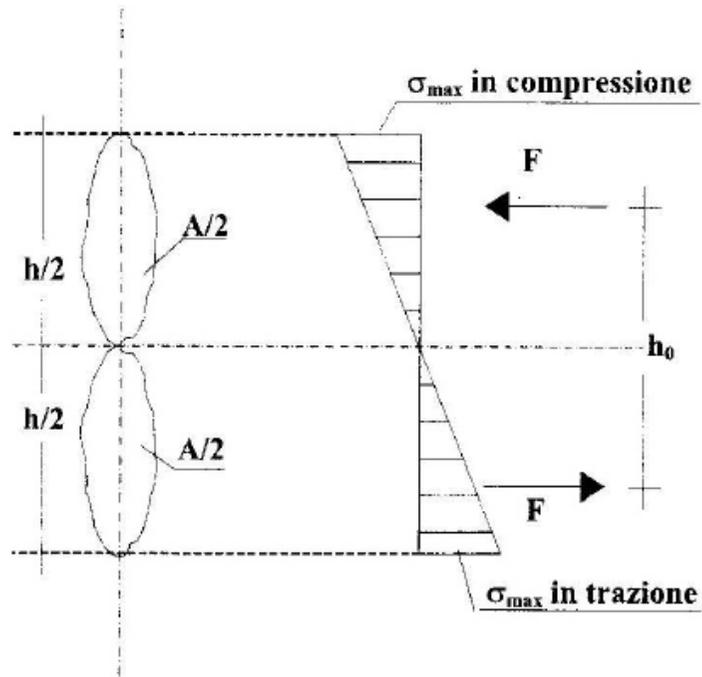


Per la sezione di mezzeria della trave che stiamo considerando:

$$F = \sigma^* \cdot (A/2) = \phi_1 \sigma_{\max} \cdot (A/2)$$

$$h_0 = \phi_2 \cdot h \quad \sigma^* = \phi_1 \sigma_{\max}$$

$\sigma^*$  valore medio della tensione  $\sigma$  sull'area  $A/2$ , valore medio esprimibile quale frazione  $\phi_1$  della tensione massima  $\sigma_{\max}$ , ed avendo altresì espresso  $h_0$  quale frazione  $\phi_2$  dell'altezza totale  $h$  della sezione.



$$F = \sigma^* \cdot (A/2) = \phi_1 \sigma_{\max} \cdot (A/2)$$

$$h_0 = \phi_2 \cdot h \quad \sigma^* = \phi_1 \sigma_{\max}$$

$$(G/2) \cdot (L/4) = F \cdot h_0$$

$$\left(\frac{G}{2}\right) \cdot (L/4) = F \cdot h_0 = (\phi_1 \sigma_{\max} \cdot (A/2)) \cdot (\phi_2 \cdot h)$$

$$\frac{L \cdot A \cdot \delta \cdot g}{2} \cdot (L/4) = \phi_1 \sigma_{\max} \cdot (A/2) \cdot \phi_2 \cdot h$$

Semplificando per A

Risolvendo rispetto ad  $L^2$

$$L^2 = 4 \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\delta \cdot g} \cdot h$$

# Il rendimento sezionale elastico $\psi$ e i limiti delle luci per gli elementi inflessi.

$$L^2 = 4 \cdot \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\delta \cdot g} \cdot h$$

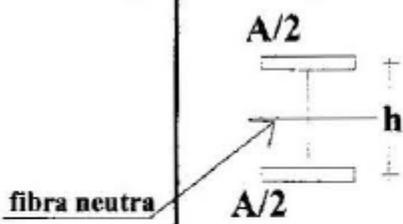
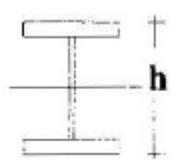
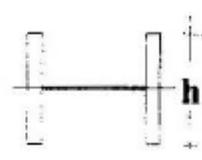
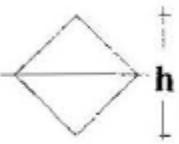
$$L^2 = 4 \cdot \psi \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\delta \cdot g} \cdot h$$

Questo parametro  $\psi$  che ovviamente conviene sia il più grande possibile dicesi **rendimento sezionale** e dipende dalla disposizione più o meno intelligente del materiale che forma la sezione.

Il rendimento sezionale cresce allontanando il materiale dalla fibra neutra: infatti, se le due aree  $A/2$  della figura (slide precedente) potessero considerarsi concentrate ad una mutua distanza uguale all'altezza  $h$  della sezione (sezione ideale a doppio T limite), si avrebbe ovviamente  $\sigma^* = \sigma_{\max}$  ed  $h_0 = h$ , e quindi  $\phi_1 = 1$ ,  $\phi_2 = 1$  e  $\psi = 1$ .

A mano a mano che le aree  $A/2$  si distribuiscono sull'altezza  $h/2$  della sezione, la tensione media  $\sigma^*$  si riduce rispetto al valore massimo  $\sigma_{\max}$ , e pure si riduce il braccio  $h_0$  della coppia interna, cosicché  $\phi_1$  e  $\phi_2$  saranno sempre più piccoli e più piccolo sarà il rendimento sezionele  $\psi$ .

### Valori di $\psi$

sezione	doppio T limite	profilati ad ali larghe	rettangolare	circolare	a rombo	
						
rendimento sezionele $\psi$	1	$0,75 \div 0,72$	$\cong 1/3$ del valore a lato a sinistra	$1/3 \cong 0,333$	$1/4 = 0,250$	$1/6 \cong 0,167$

Per quanto riguarda la limitazione delle luci ricordando che

$L = \frac{\sigma_{\max}}{\delta \cdot g}$  esprime il valore della lunghezza  $L$  di un elemento teso

con  $\sigma_{\max}$  il valore della tensione normale, per un elemento inflesso invece

$$L_f^2 = 4 \cdot \psi \cdot L \cdot h$$

$$L_f = \sqrt{4 \cdot \psi} \sqrt{L \cdot h}$$

poiché  $h$  è di un ordine di grandezza nettamente inferiore a quello di  $L$ , la luce  $L_f$  sarà pure nettamente inferiore rispetto alla lunghezza  $L$ .

$$L_{fu} = \sqrt{4 \cdot \psi} \sqrt{L_u \cdot h}$$

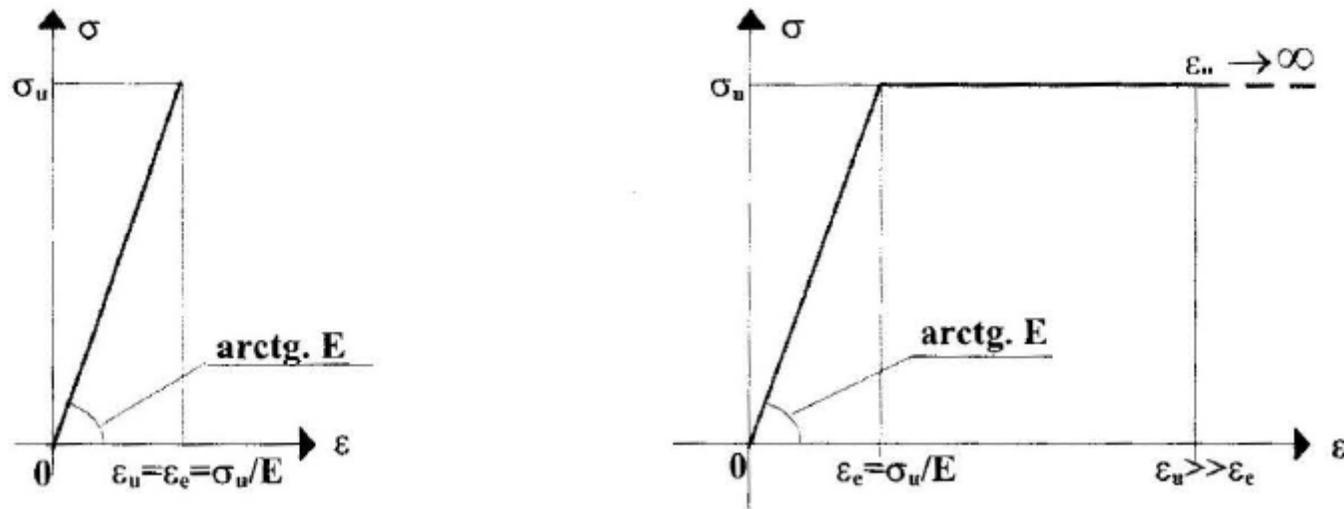
la luce di resistenza specifica

$$\sigma_{\max} = \sigma_u$$

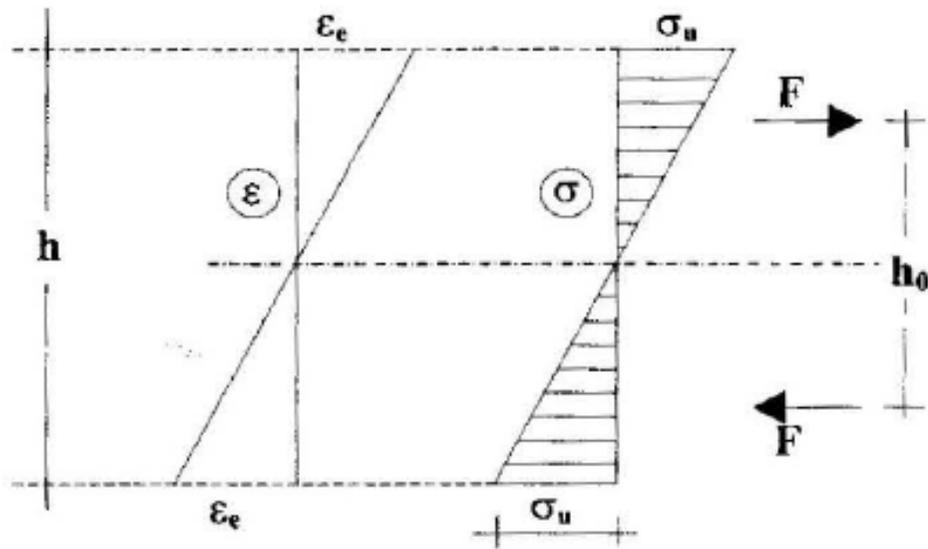
f= flessione; u= ultima

si può confermare il concetto che le limitazioni dimensionali risultano molto più severe in flessione di quanto non sia per un elemento teso (o compresso)

# Materiali fragili e materiali duttili: il guadagno plastico sezionele per elementi inflessi.



Schemi di comportamento ideali per un materiale fragile e per uno duttile



## Materiale fragile

$\varepsilon$  raggiunge al max il valore

$$\varepsilon_e = \sigma_u / E$$

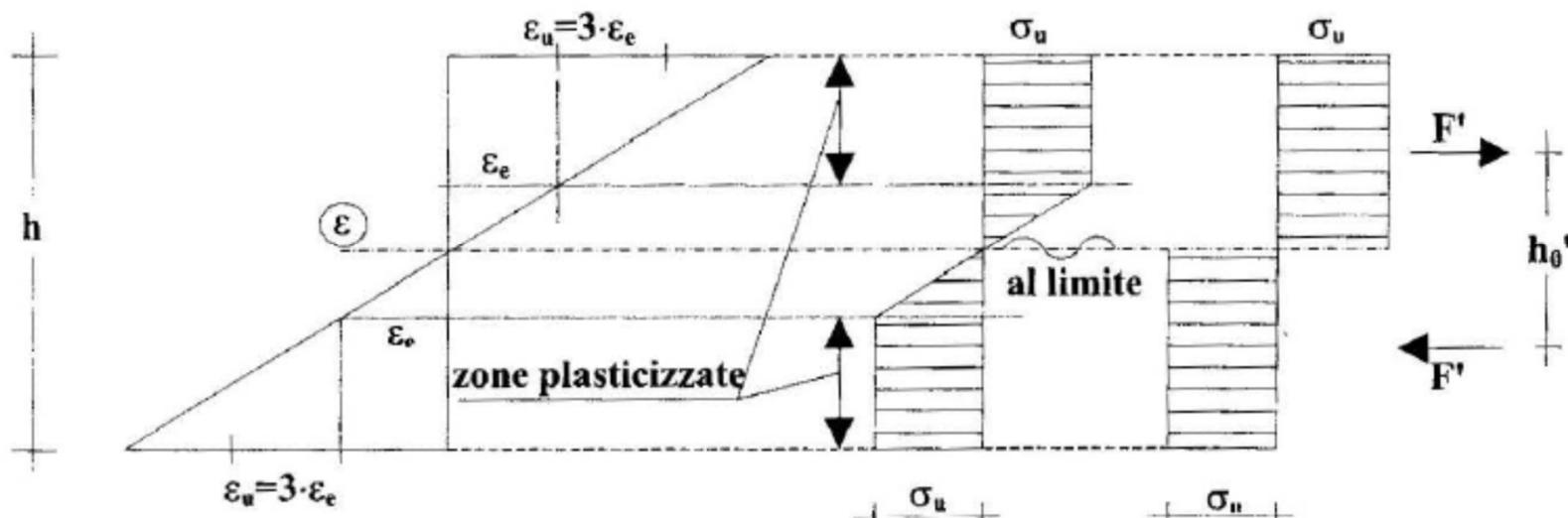
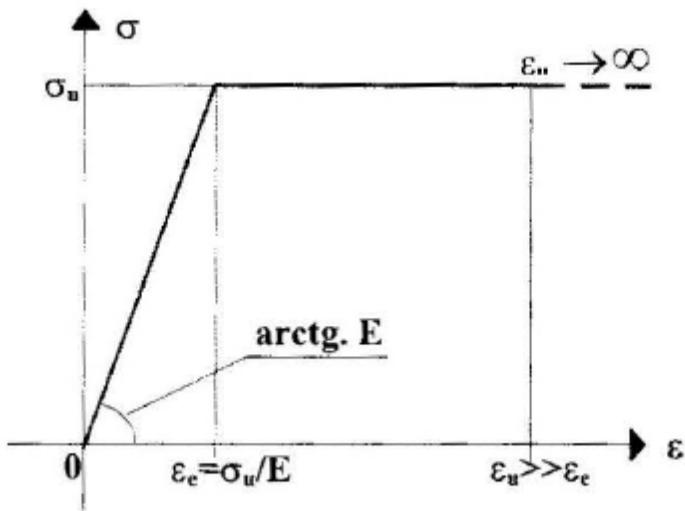
in questo caso si può affermare che la tensione di rottura in flessione  $\sigma_{fu}$  risulta un poco maggiore della corrispondente tensione di rottura  $\sigma_u$  a compressione o a trazione semplici

$\sigma_{fu} = k \cdot \sigma_u$  k coefficiente maggiore dell'unità, ad esempio di valore compreso fra 1,2 e 1,3.

$L_{fu}^2 = 4 \cdot \psi \cdot k \cdot L_u \cdot h$  dove  $L_u$  è la minore delle due lunghezze di resistenza specifica (a compressione o a trazione) del materiale.

## Materiale duttile ( $k \cong 1$ )

$\sigma_{max} = \sigma_u$  non avviene la rottura, le fibre più esterne possono ulteriormente deformarsi e quindi la tensione  $\sigma_u$  può essere raggiunta anche nelle fibre più interne, che possono proseguire a deformarsi elasticamente.  $\varepsilon_u$  illimitata



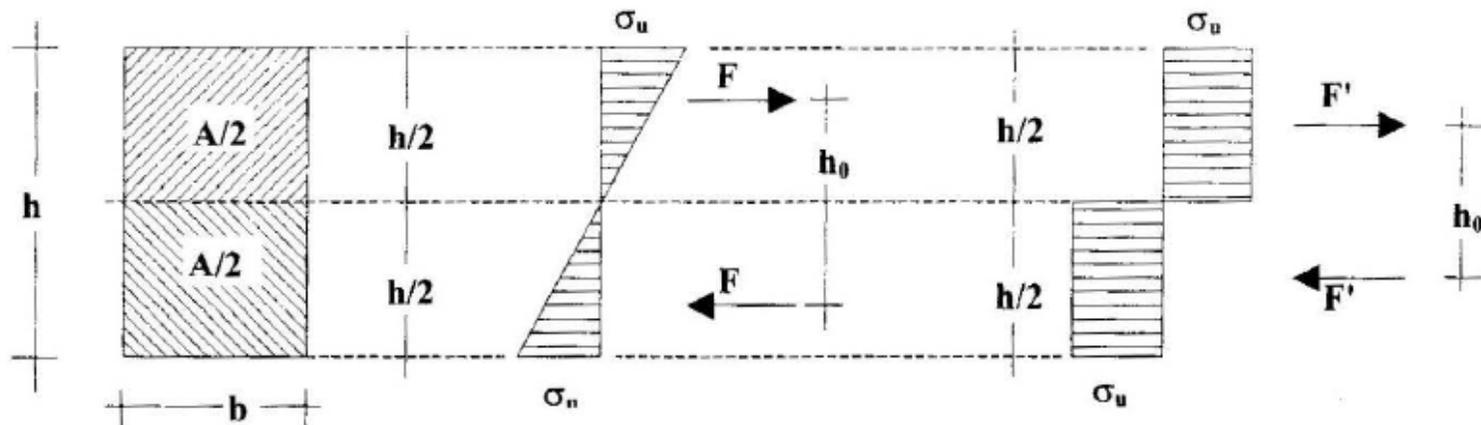
# Rendimento sezioneale $\psi$ in campo elastico e in campo plastico

## Caso sezione Rettangolare

$$\sigma^* = \phi_1 \sigma_{\max}$$

$$h_0 = \phi_2 \cdot h$$

$$K = \psi / \psi' \text{ Guadagno plastico} = 1,5$$



$$\sigma^* = \sigma_{\max} / 2, \text{ onde } \phi_1 = 1/2$$

$$h_0 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2}, \text{ onde } \phi_2 = 2/3$$

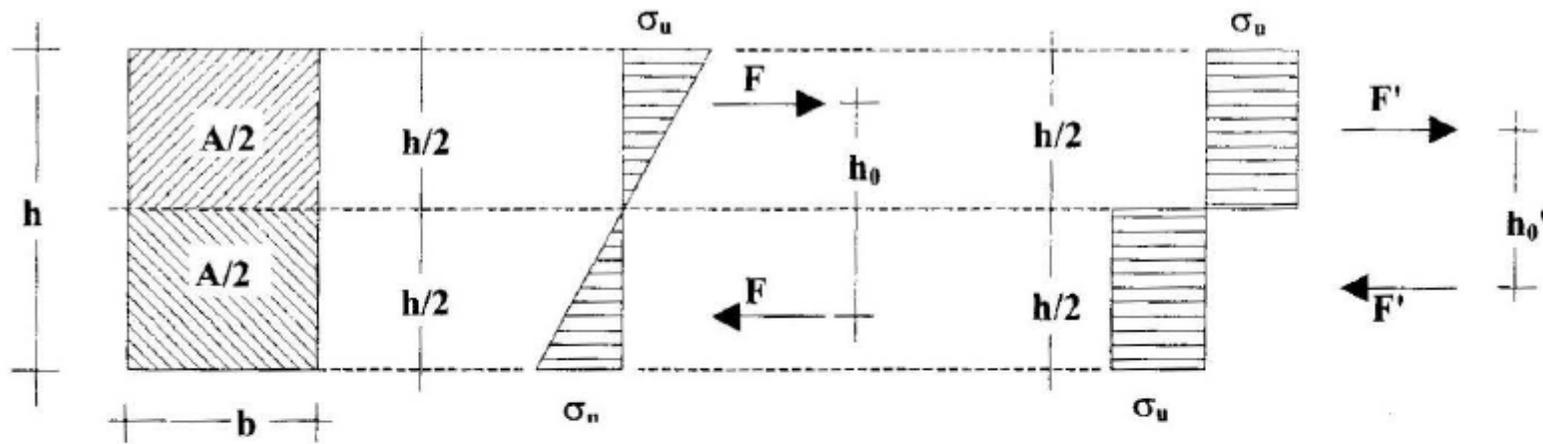
$$(\psi = \phi_1 \cdot \phi_2 = 1/3)$$

$$\sigma^* = \sigma_{\max}, \text{ onde } \phi'_1 = 1$$

$$h_0' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{2}, \text{ onde } \phi'_2 = 1/2$$

$$(\psi' = \phi'_1 \cdot \phi'_2 = 1/2)$$

a) sezione rettangolare  $k = \psi' / \psi = 1.5$



$$\sigma^* = \sigma_{\max}/2, \text{ onde } \varphi_1 = 1/2$$

$$h_0 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2}, \text{ onde } \varphi_2 = 2/3$$

$$(\psi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = 1/3)$$

$$\sigma^* = \sigma_{\max}, \text{ onde } \varphi'_1 = 1$$

$$h_0' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{2}, \text{ onde } \varphi'_2 = 1/2$$

$$(\psi' = \varphi'_1 \cdot \varphi'_2 = 1/2)$$

a) sezione rettangolare  $k = \psi'/\psi = 1.5$

nel campo plastico, per la sezione rettangolare sono sfruttabili in plasticità le fibre più interne, il che dà luogo ad un guadagno plastico di valore 1,5

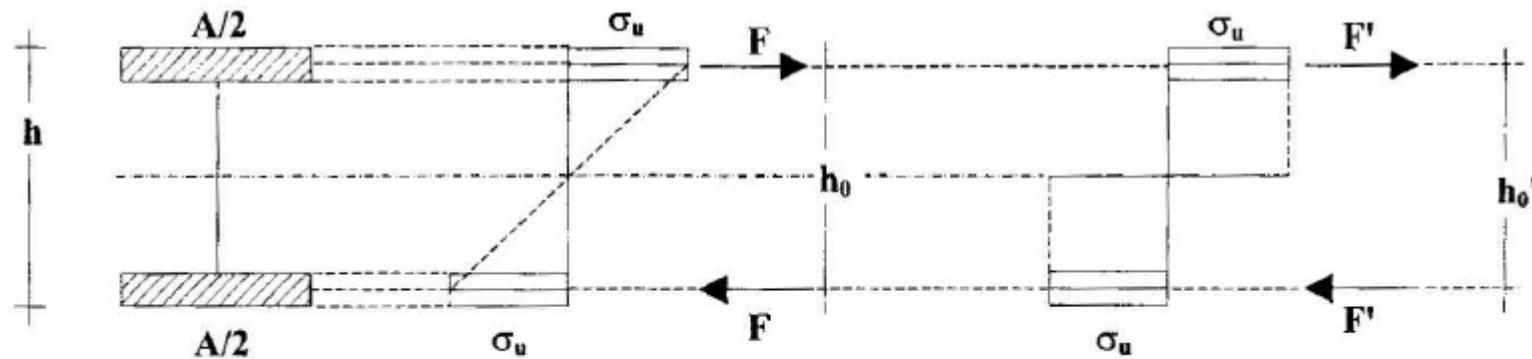
Rendimento sezioneale  $\psi$  in campo elastico e in campo plastico

Caso sezione a doppio T

$$\sigma^* = \phi_1 \sigma_{\max}$$

$$h_0 = \phi_2 \cdot h$$

$K = \psi / \psi'$  Guadagno plastico = **1**



$$\sigma^* = \sigma_{\max}, \quad \text{onde } \phi_1 = 1$$

$$h_0 \cong h, \quad \text{onde } \phi_2 = 1$$

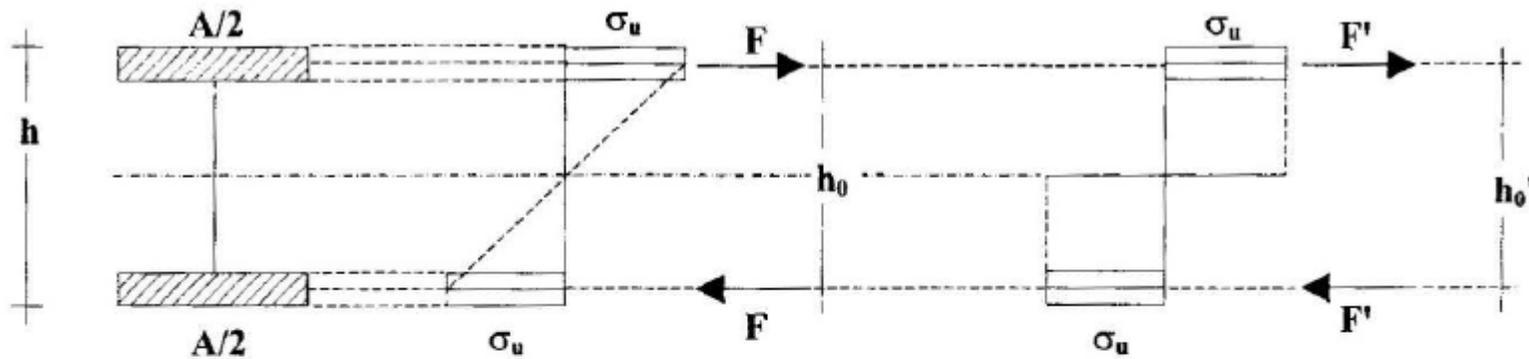
$$(\psi = \phi_1 \cdot \phi_2 = 1)$$

$$\sigma^* = \sigma_{\max}, \quad \text{onde } \phi'_1 = 1$$

$$h_0' \cong h, \quad \text{onde } \phi'_2 = 1$$

$$(\psi' = \phi'_1 \cdot \phi'_2 = 1)$$

b) sezione a doppio T limite  $k = \psi' / \psi = 1$



$$\sigma^* = \sigma_{\max}, \quad \text{onde } \varphi_1 = 1$$

$$h_0 \cong h, \quad \text{onde } \varphi_2 = 1$$

$$(\psi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = 1)$$

$$\sigma^* = \sigma_{\max}, \quad \text{onde } \varphi'_1 = 1$$

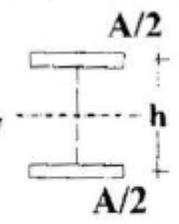
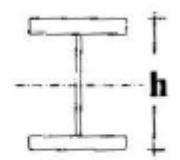
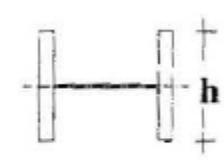
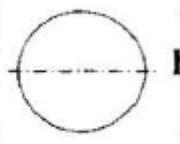
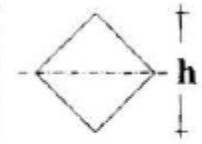
$$h_0' \cong h, \quad \text{onde } \varphi'_2 = 1$$

$$(\psi' = \varphi'_1 \cdot \varphi'_2 = 1)$$

b) sezione a doppio T limite  $k = \psi'/\psi = 1$

Una volta che si sia arrivati alla tensione  $\sigma_u$  sulle aree  $A/2$ , poste da un lato e dall'altro della fibra neutra, non vi può essere alcun incremento del momento interno, dato che non si hanno altre fibre di materiale più interne da sfruttare.

## $K = \psi / \psi'$ Guadagno plastico e rendimento sezionele $\psi$

sezione	doppio T limite	profilati ad ali larghe		rettangolare	circolare	a rombo
						
k	1	1,06÷1,09	1,42	1,5	1,7	2
$\psi' = k\psi$	1	0,80÷0,78	$\cong 1/2$ del valore a lato a sinistra	0,50	0,42	0,33

$$L_{fu}^2 = 4 \cdot \psi \cdot k \cdot L_u \cdot h$$

k è un coefficiente che esprime per i materiali di natura fragile, la maggiorazione di resistenza in flessione rispetto alla resistenza in compressione o in trazione semplici e, per i materiali duttili, il guadagno plastico sezionele.

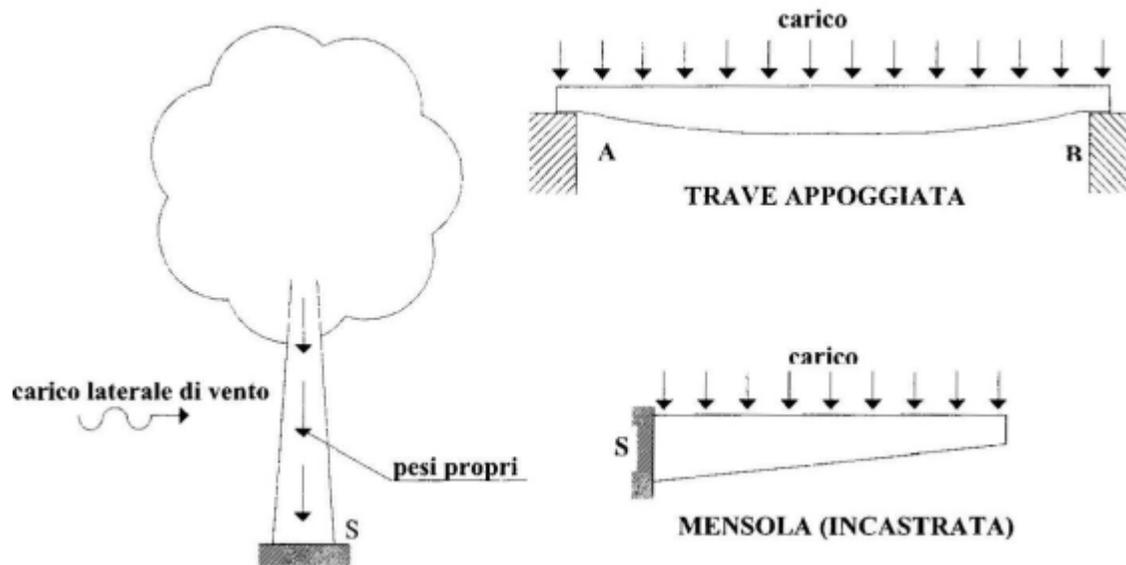
# Conclusioni

Poiché la flessione è penalizzante nei riguardi delle dimensioni delle luci, la scelta della forma della sezione risulta essenziale, in quanto migliora il rendimento elastico  $\psi$  che, ad esempio nel caso dei profilati a doppio T reali, può arrivare a valori 2; 2,5 volte superiore a quello di una sezione rettangolare.

Inoltre, non va sottovalutato il beneficio prodotto dal guadagno plastico: esso sembra proprio premiare quelle sezioni che hanno un rendimento elastico minore, in conseguenza del fatto che il materiale risulta poco allontanato dalla fibra neutra.

Infatti, tali sezioni, presentano molte fibre interne che possono essere sfruttate in plasticità, col risultato di avere un grande valore del loro guadagno plastico. In tal modo, si può dire che il comportamento plastico del materiale mitiga un poco l'infelice scelta della forma della sezione cosicché, se il materiale è duttile, la ricerca di una forma intelligente per la sezione può diventare non così tanto essenziale. Ma il materiale deve essere duttile.

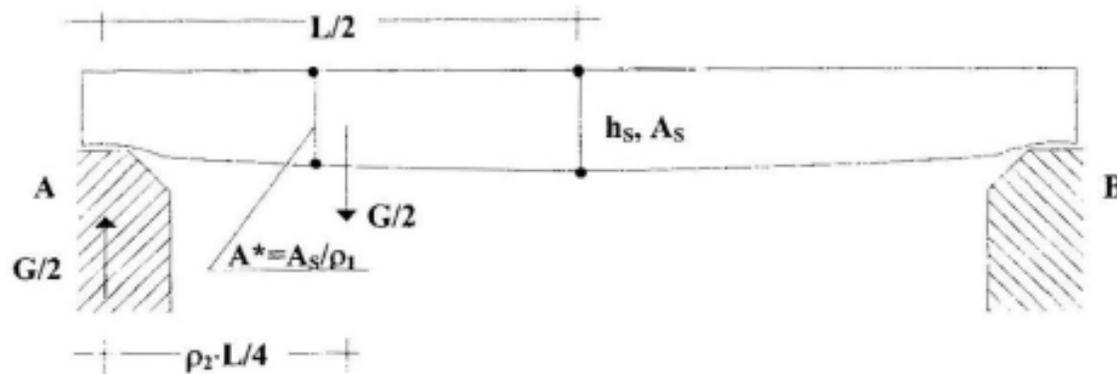
# Il rendimento strutturale $\chi$ per gli elementi inflessi e l'effetto dei sovraccarichi $p$



Profilazioni di elementi per un migliore rendimento strutturale

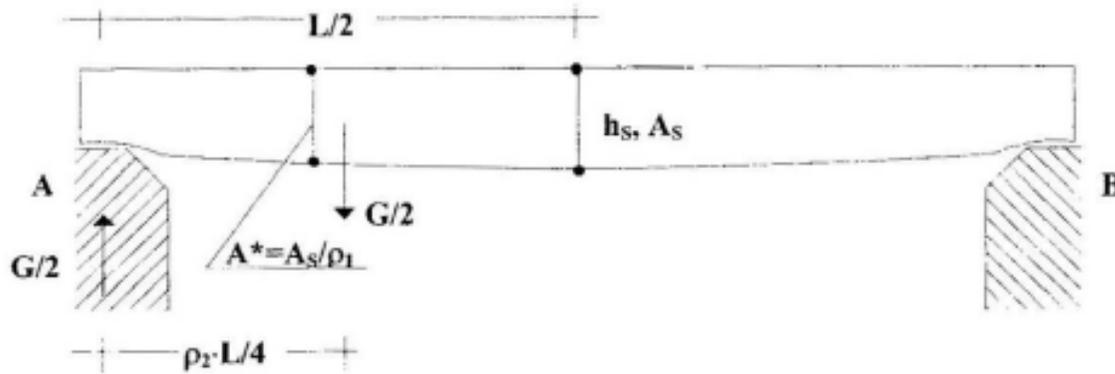
le sezioni possono convenientemente variare lungo l'asse dell'elemento: nella trave appoggiata aumentando verso la mezzzeria, nella mensola andando verso l'incastro, così come accade per l'albero verso il suo piede.

## Elemento inflesso profilato con sezione variabile



- peso di metà trave =  $G/2 = (L/2) \cdot A^* \cdot \delta g$   
 $A^* = A_s / \rho_1$  il valore medio dell'area A sul tratto di metà trave  $L/2$ ,  
valore medio espresso quale frazione  $1 / \rho_1$  dell'area  $A_s$  di  
mezzeria che è la massima, di valore appunto  $A_s = \rho_1 A^*$ , con  
 $\rho_1 > 1$  ;
- braccio di leva dei due carichi  $G/2$  (peso di metà trave e reazione  
dell'appoggio) =  $\rho_2 \cdot L/4$   
con  $\rho_2 > 1$ , giacché la sezione aumenta verso la mezzeria e  
quindi il peso di metà trave non è collocato a metà della  
lunghezza  $L/2$ , cioè a  $L/4$  dell'appoggio A, ma è più vicino alla  
mezzeria;

## Elemento inflesso profilato con sezione variabile



- altezza della sezione di mezzeria =  $h_s = \rho_3 h^*$   
avendo indicato con  $h^* = h_s / \rho_3$  il valore medio dell'altezza  $h$  sul tratto di metà trave  $L/2$ , valore medio espresso quale frazione  $1/\rho_3$  dell'altezza  $h_s$  di mezzeria che è la massima e quindi con  $\rho_3 > 1$ .

RIEPILOGANDO:

$$G/2 = (L/2) \cdot A^* \cdot \delta g$$

$$\text{braccio} = \rho_2 \cdot L/4$$

$$h_s = \rho_3 h^*$$

$$L^2 = 4 \cdot \psi \cdot K \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\delta g} \cdot h$$

$$G/2 = (L/2) \cdot A^* \cdot \delta g$$

$$\text{braccio} = \rho_2 \cdot L/4$$

$$h_s = \rho_3 h^*$$

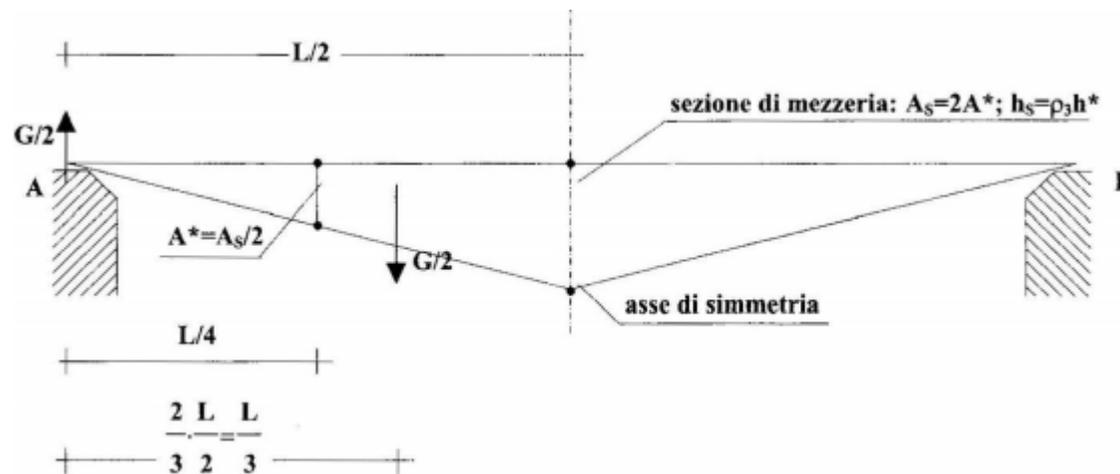
$$L_{fu}^2 = 4 \cdot \chi \cdot \psi \cdot K \cdot L_u \cdot h^*$$

luce di resistenza specifica

$$\bar{L}_f^2 = 4 \chi \psi k \cdot \bar{L} h^*$$

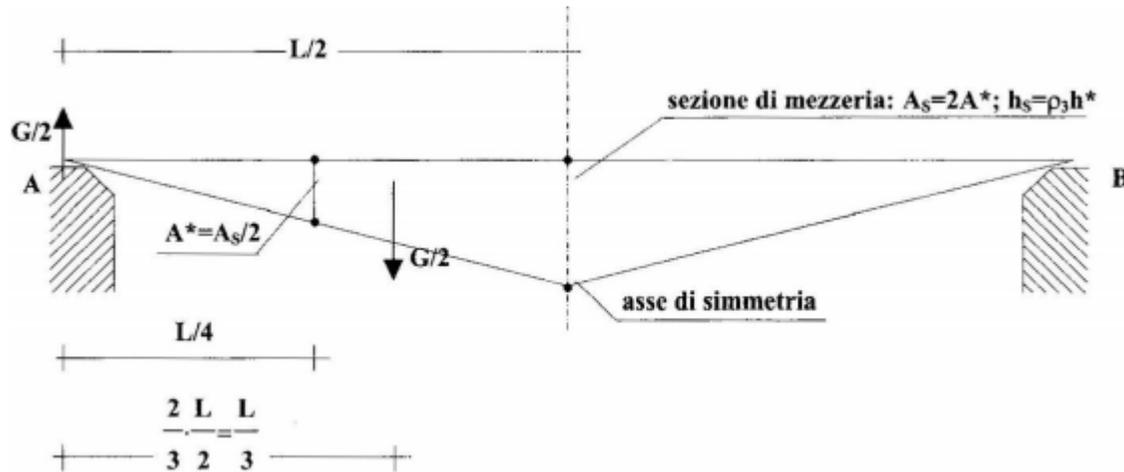
luce ammissibile

La trave limite semplicemente appoggiata.



## La trave limite semplicemente appoggiata

presenta una variazione lineare dell'area  $A$  dal valore  $A_s$  in mezzeria al valore nullo agli appoggi



$$\chi = 1,5 \cdot 2$$

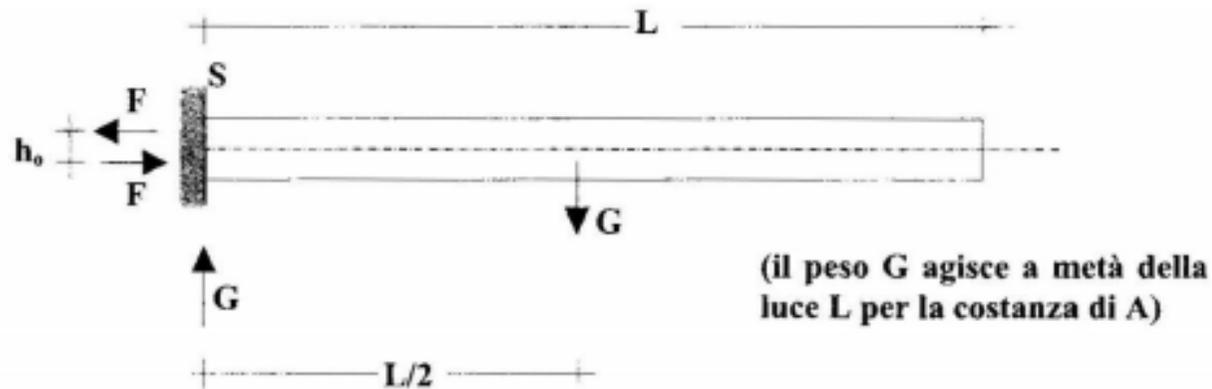
$\rho_1 = 2$ , perché l'area  $A^*$  è metà di quella  $A_s$  di mezzeria

$\rho_2 = 4/3$ , perché la distanza fra i due carichi  $G/2$  (peso di metà trave e reazione dell'appoggio) vale  $2/3$  della metà luce  $L/2$ , e quindi il coefficiente  $\rho_2$  da applicare ad  $L/4$  (che sarebbe stata la mutua distanza dei carichi  $G/2$  a sezione costante) per ottenere  $L/3$  è proprio  $4/3$  (infatti,  $(4/3)L/4 = L/3$ ).

$\chi = \frac{\rho_1 \cdot \rho_3}{\rho_2} = \frac{2 \cdot \rho_3}{4/3}$  nel caso particolare di sezioni rettangolari di larghezza  $b = \text{cost}$ ,  $\rho_3 = 2$ , poiché l'altezza  $h^*$  è metà di quella  $h_s$  di mezzeria

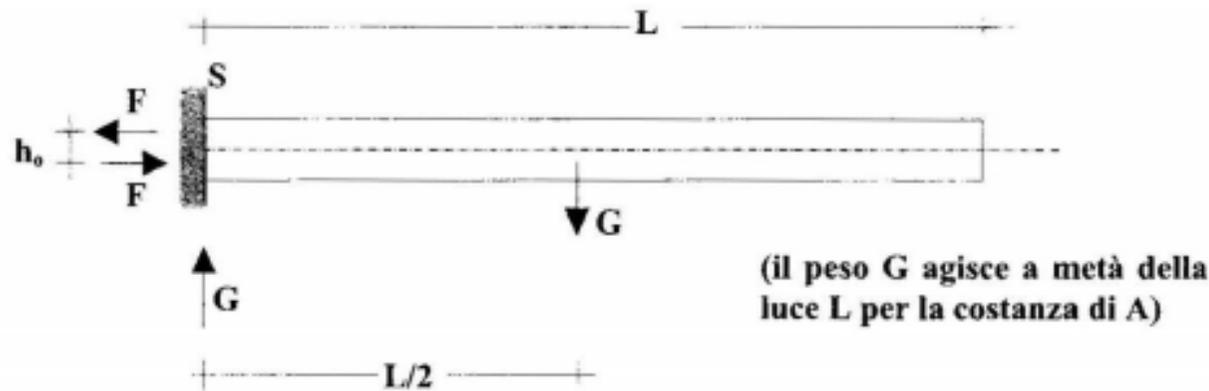
$$\chi = 1,5 \rho_3$$

La mensola limite avente una sezione  $A$  costante.



- peso trave =  $G = L \cdot A \cdot \delta g$

Il carico  $G$  è equilibrato dal solo vincolo d'incastro  $S$ , che fornisce la reazione verticale  $G$ ; il braccio di leva di questi due carichi  $G$  vale  $L/2$ , a causa della costanza dell'area  $A$  e quindi del peso proprio per unità di lunghezza.



I due carichi G farebbero ruotare la mensola in senso orario. Vi si oppongono le tensioni normali  $\sigma$  agenti nella sezione S d'incastro per le quali si può scrivere:

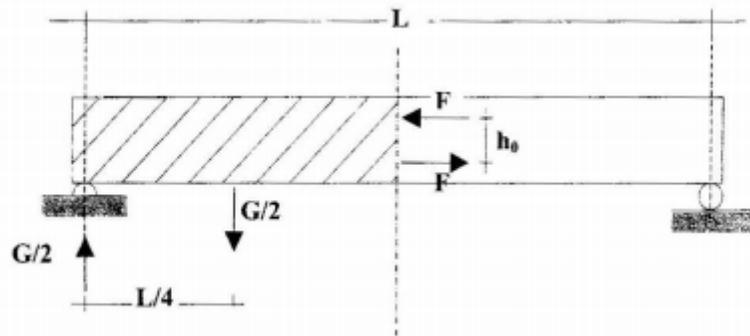
- Risultante  $F = \phi_1 \cdot \sigma_{\max} \cdot A/2$
- Braccio di leva  $h_0 = \phi_2 \cdot h$ , h altezza della sezione.

$$L \cdot A \cdot \delta g \cdot L/2 = \phi_1 \phi_2 \cdot \sigma_{\max} \cdot A/2 \cdot h$$

Semplificando per A e risolvendo rispetto ad  $L^2$  si ottiene questa volta (introducendo al solito il pedice  $f$ =flessione ):

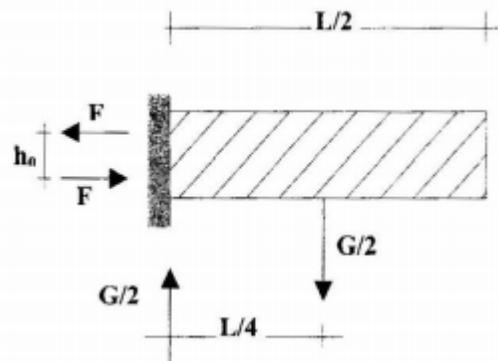
$$L_f^2 = \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\delta g} \cdot h = \phi_1 \cdot \phi_2 L_u h = \psi L_u h$$

## Confronto tra risultati.



trave appoggiata  
di luce L

$$L_f^2 = 4 \cdot \psi \cdot L_u \cdot h$$

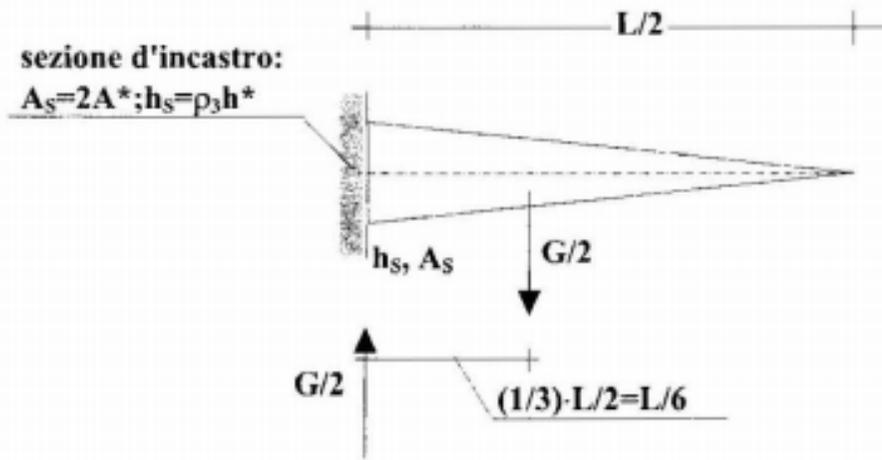


mensola di  
luce L/2

$$L_f^2 = \phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\delta g} \cdot h = \phi_1 \cdot \phi_2 L_u h = \psi L_u h$$

pedice m per le grandezze relative alla mensola e il pedice t per la trave appoggiata

- il confronto dei risultati mostra che  $L_{ft}^2 = 4 \cdot L_{fm}^2$  e quindi, estraendo la radice quadrata dei due membri, risulta  $L_{fm} = (1/2)L_{ft}$ ;
- i risultati ottenuti sono esattamente coincidenti, se si assume che la luce della mensola sia la metà di quella della trave appoggiata.



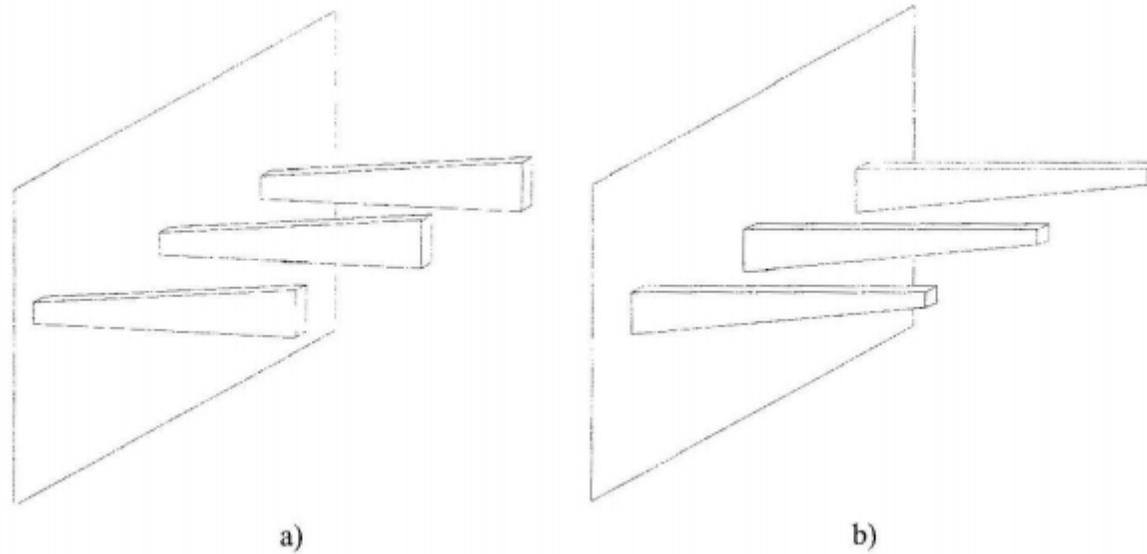
per una mensola si possono avere rendimenti strutturali maggiori di quelli ottenibili per una trave appoggiata

$\rho_1 = 2$ , essendo la sezione  $A^*$  ancora la metà di quella  $A_s$  di vincolo (che prende il posto della sezione di mezzeria della trave appoggiata),

$\rho_2 = 2/3$ , perché la distanza fra i due carichi  $G/2$  relativi alla mensola vale  $1/3$  della distanza  $L/2$ , ossia vale  $(1/3) \cdot L/2 = L/6$ , e quindi il coefficiente da applicare ad  $L/4$  (che sarebbe la mutua distanza dei carichi  $G/2$  per una mensola a sezione costante di luce  $L/2$ ) per ottenere  $L/6$  è proprio  $2/3$ , (infatti,  $(2/3) \cdot L/4 = L/6$ ).

$$\chi = \frac{\rho_1 \cdot \rho_3}{\rho_2} = \frac{2 \cdot \rho_3}{4/3} = 3 \cdot \rho_3 \text{ e con } \rho_3 = 2 \text{ (sezioni rettangolari di larghezza } b = \text{cost.)},$$

$$\chi = 6$$



Per concludere, a parte il valore del rendimento strutturale, è abbastanza ovvio che nessuno si sognerebbe di realizzare mensole di sostegno di una pensilina con la forma indicata nella figura a), mentre è veramente spontaneo attribuire ad esse la "profilazione" segnata nello schema b) della stessa figura. Ciò a parte le possibili questioni di formalismo estetico e di leggerezza costruttiva.









Phoenix University Stadium  
Peter Eisenman - HOK Sport



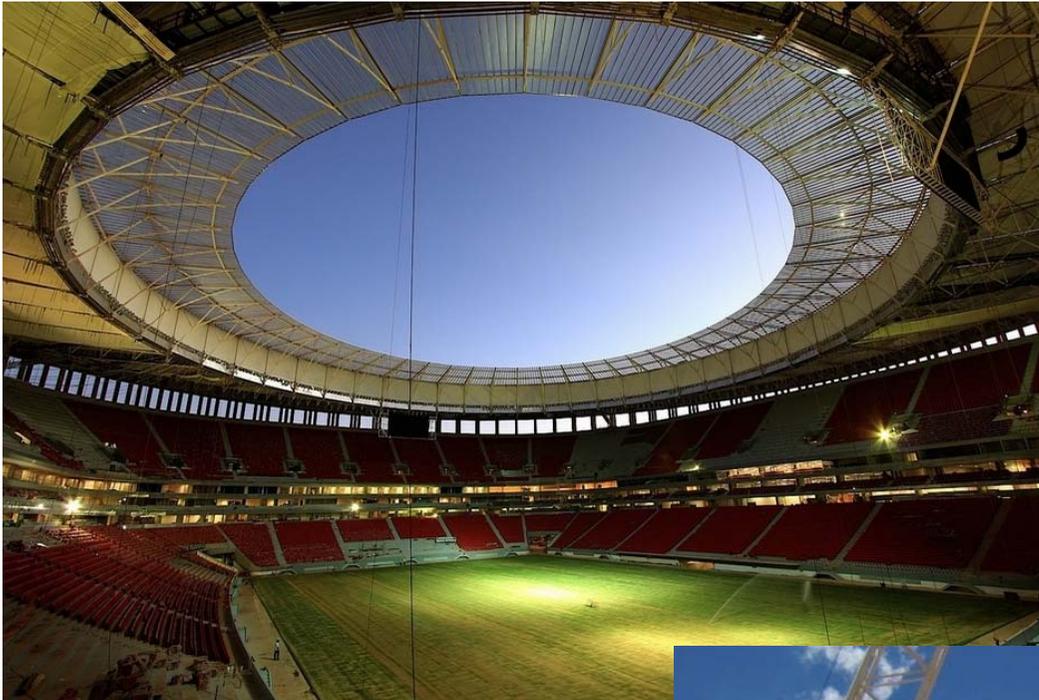


San Francisco International Airport  
SOM



San Francisco International Airport  
*SOM*





*Manuel Garrincha Stadium – Brasilia*  
Schlaich Bergermann & Partner