Indice

1 Curve Piane **5**

1.1 Spazi euclidei 6
1.2 Curve in $\mathbb{R}^n$ 9
1.3 Lunghezza di una curva 11
1.4 Campi di vettori lungo curve 16
1.5 Curvatura di una curva piana 18
1.6 Funzione angolo tra curve piane 21
1.7 L'angolo di rotazione 23
1.8 La parabola semicubica 24
1.9 Esercizi 26

2 Ricerca di una Curva Piana. **27**

2.1 Movimenti euclidei 28
2.2 Curve e movimenti euclidei 34
2.3 Equazioni naturali di curve piane 35
2.4 Esercizi 39

3 Curve nello Spazio **41**

3.1 Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ 42
3.2 Curvatura e torsione di curve con velocità unitaria 43
3.3 Curvatura e torsione di curve con velocità arbitraria 49
3.4 Esercizi 53

4 Costruzione di Curve nello Spazio **55**

4.1 Il teorema fondamentale per le curve nello spazio 55
4.2 Curve sferiche 59
4.3 Curve di inclinazione costante 62
4.4 Lossodromiche sferiche 66

4.5 Esercizi 68

5 Calcolo Differenziale nello Spazio Euclideo 69
5.1 Vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$ 70
5.2 Vettori tangenti come derivate direzionali 71
5.3 Applicazioni tangenti 74
5.4 Campi di vettori su $\mathbb{R}^n$ 79
5.5 Derivate di campi di vettori su $\mathbb{R}^n$ 82
5.6 Le curve rivisitate 88
5.7 Esercizi 89

6 Superfici nello Spazio Euclideo 91
6.1 Superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^n$ 91
6.2 Superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$ 99
6.3 L'applicazione normale di Gauss 100
6.4 Definizione di superficie regolare in $\mathbb{R}^n$ 101
6.5 Vettori tangenti a superfici regolari in $\mathbb{R}^n$ 107
6.6 Applicazioni tra superfici 108
6.7 Superfici di livello in $\mathbb{R}^3$ 111
6.8 Esercizi 113

7 Superfici Non Orientabili 115
7.1 Orientabilità delle superfici 115
7.2 Superfici non orientabili ottenute tramite identificazioni 120
7.3 Il nastro di Möbius 122
7.4 La bottiglia di Klein 124
7.5 Un'altra bottiglia di Klein 125
7.6 Realizzazioni del piano proiettivo reale 126

8 Metriche su superfici 129
8.1 La idea intuitiva di distanza su una superficie 129
8.2 Isometrie ed applicazioni conformi tra superfici 134
8.3 L'idea intuitiva di area su una superficie 139
8.4 Esercizi 141

9 Superfici nello Spazio Tridimensionale 143
9.1 L'operatore di forma 144
9.2 Curvatura normale 147

9.3 Calcolo dell'operatore di forma 151
9.4 Gli autovalori dell'operatore di forma 154
9.5 Curvatura di Gauss e curvatura media 156
9.6 Le tre forme fondamentali 163
9.7 Esempi di calcolo manuale di curvature 165
9.8 Un teorema globale per la curvatura 169
9.9 Esercizi 170

10 Curve Asintotiche su Superfici **173**
10.1 Curve asintotiche 174
10.2 Esempi di curve asintotiche 178
10.3 Esercizi 180

11 Superfici Rigate **181**
11.1 Esempi di superfici rigate 182
11.2 Superfici rigate piatte 187
11.3 Rigate circoscritte 189

12 Superfici di Rotazione **193**
12.1 Linee di curvatura 195
12.2 Le curvature di una superficie di rotazione 197
12.3 Il catenoide 201
12.4 L'iperboloide di rotazione 203
12.5 Esercizi 204

13 Superfici a Curvatura di Gauss Costante **205**
13.1 L'integrale ellittico di seconda specie 206
13.2 Superfici di rotazione a curvatura costante positiva 206
13.3 Superfici di rotazione a curvatura costante negativa 209
13.4 Superficie di Dini 213
13.5 Superficie di Kuen 215
13.6 Esercizi 216

14 Geometria Intrinseca delle Superfici **217**
14.1 Formule intrinseche per la curvatura di Gauss 218
14.2 Il Theorema Egregium di Gauss 222
14.3 I simboli di Christoffel 224
14.4 La curvatura geodetica e la torsione geodetica 227

14.5 Esercizi 234

15 Varietà Riemanniane **235**
15.1 Derivate covarianti 235
15.2 Metriche riemanniane indefinite 241
15.3 Trattazione classica delle metriche 245
15.4 Esercizi 250

16 Superfici Astratte **251**
16.1 Metriche su superfici astratte 252
16.2 Esempi di superfici astratte 255

17 Geodetiche su Superfici **257**
17.1 Le equazioni delle geodetiche 258
17.2 Parametrizzazioni di Clairaut 266
17.3 L'applicazione esponenziale ed il lemma di Gauss 274
17.4 Proprietà minimizzanti delle geodetiche 278
17.5 Superfici astratte come spazi metrici 281
17.6 Esercizi 283

Bibliografia **285**
Indice Analitico 290
Indice dei Nomi 291
Comandi di *Mathematica* 292

Capitolo 1

Curve Piane

Prima dell'avvento del calcolo infinitesimale, in geometria venivano studiate solo le curve più semplici: le rette, le spezzate, archi di circonferenze, e poi le ellissi, le iperboli e le parabole. Sono queste le curve che stanno alla base della geometria greca. Nell'antichità si conoscevano anche altre curve (come la cissoide di Diocle e la spirale di Archimede), ma lo sviluppo della teoria generale delle curve piane ebbe inizio solo dopo l'introduzione delle coordinate cartesiane ad opera di Cartesio[1] alla fine del 1600.

Curve piane interessanti si possono osservare nella vita di ogni giorno. Ad esempio, le orbite dei pianeti (delle ellissi), la traiettoria di un proiettile (una parabola), la forma di un ponte sospeso (una catenaria) e la curva descritta da un punto di una ruota di un'auto lungo un percorso rettilineo. Questo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà locali delle curve così com'è stato sviluppato in questi ultimi secoli.

Nel Paragrafo 1.1 incominciamo col richiamare alcune delle operazioni fondamentali dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, e nel Paragrafo 1.2 diamo la definizione di curva in $\mathbb{R}^n$. Nel Paragrafo 1.3 studiamo la lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^n$ e nel Paragrafo 1.4 i campi di vettori lungo curve. Nel Paragrafo 1.5 viene definita l'importante nozione di curvatura "con segno" di una curva del piano $\mathbb{R}^2$. Nel Paragrafo 1.7 introduciamo l'angolo di rotazione di una curva piana, e dimostriamo che la sua variazione coincide con la curvatura "con segno" della curva. Nel Paragrafo 1.8 alcuni di questi concetti vengono illustrati tramite la parabola semicubica.

[1]

René du Perron Descartes (1596-1650). Matematico e filosofo francese. Cartesio sviluppò tecniche algebriche per risolvere problemi geometrici, gettando in tal modo le fondamenta della geometria analitica. Ancorché più noto come filosofo, egli portò contributi importanti anche alla fisiologia, all'ottica e alla meccanica.

I Capitoli 1–4 sono dedicati allo studio delle curve date in forma parametrica. Di conseguenza, per poter affermare che un oggetto geometrico è un invariante della traccia della curva, bisogna dimostrare che, a meno del segno, esso è indipendente dalla parametrizzazione scelta. Gli invarianti geometrici più importanti associati a una curva sono di due tipi: (1) quelli che sono indipendenti dalla parametrizzazione e (2) quelli che non cambiano per una riparametrizzazione positiva, ma che cambiano di segno per una riparametrizzazione negativa. Per esempio, nel Paragrafo 1.3 dimostriamo che la lunghezza di una curva è indipendente dalla parametrizzazione scelta. La curvatura di una curva piana, invece, è un invariante più fine perché cambia di segno si se cambia il senso di percorrenza della curva, ma altrimenti è indipendente dalla parametrizzazione. Questo fatto viene dimostrato nel Paragrafo 1.5.

1.1 Spazi euclidei

Dal momento che vogliamo studiare curve e superfici in spazi euclidei, in questo paragrafo richiamiamo brevemente alcune delle proprietà algebriche di questi ultimi.

Definizione 1.1.1. *Lo* **spazio euclideo** $\mathbb{R}^n$ *è l'insieme di tutte le n-uple di numeri reali*:

$$\mathbb{R}^n = \big\{\, (p_1 \dots p_n) \mid p_j \text{ è un numero reale per ogni } j = 1 \dots n \,\big\}.$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ *si chiamano* **vettori**. *Si scrive* $\mathbb{R}$ *invece di* $\mathbb{R}^1$, *in quanto* $\mathbb{R}^1$ *è l'insieme di tutti i numeri reali. Di solito, lo spazio* $\mathbb{R}^2$ *è detto il* **piano**.

$\mathbb{R}^n$ è un spazio vettoriale reale di dimensione n; ciò significa che sono definite in esso le operazioni **addizione** e di **moltiplicazione per uno scalare.** Quindi, se

$$\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = (q_1 \dots q_n),$$

allora $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ è l'elemento di $\mathbb{R}^n$ dato da

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1 + q_1 \dots p_n + q_n).$$

Analogamente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore $\lambda\mathbf{p}$ è definito da

$$\lambda\mathbf{p} = (\lambda p_1 \dots \lambda p_n).$$

Denoteremo poi con $\cdot$ il **prodotto scalare** di $\mathbb{R}^n$. Questa operazione assegna ad ogni coppia di vettori $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$ il numero reale

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j.$$

Le funzioni **norma** e **distanza** di $\mathbb{R}^n$ sono definite rispettivamente da

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}} \qquad \text{e} \qquad \text{distanza}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|,$$

dove $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Queste funzioni godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} &= \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}, & (\mathbf{p}+\mathbf{r})\cdot\mathbf{q} &= \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}, \\ (\lambda\mathbf{p})\cdot\mathbf{q} &= \lambda(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot(\lambda\mathbf{q}), & \|\lambda\mathbf{p}\| &= |\lambda|\,\|\mathbf{p}\|, \end{aligned}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$. Valgono inoltre la disuguaglianza di **Cauchy-Schwarz** e la disuguaglianza **triangolare** (si veda, per esempio, [MS, pagine 22–24]): cioè, per tutti i vettori $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$|\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}| \le \|\mathbf{p}\|\,\|\mathbf{q}\| \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{p}+\mathbf{q}\| \le \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\|.$$

Avremo bisogno anche della nozione di **angolo** θ tra due vettori non nulli $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Esso è definito dalla formula

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\,\|\mathbf{q}\|}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Si noti che, per vettori non nulli $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che

$$-1 \le \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\,\|\mathbf{q}\|} \le 1,$$

e quindi la definizione di angolo appena data ha senso. Vedremo comunque che in qualche caso sarà necessario trascurare la restrizione $0 \le \theta \le \pi$.

Un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è una trasformazione $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

$$A(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}) = \lambda A\mathbf{p} + \mu A\mathbf{q},$$

per $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Sinora abbiamo parlato di $\mathbb{R}^n$ per un n qualunque. Se n è uguale a 2 o a 3, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ possiede speciali strutture che sono utili per la descrizione delle curve e delle superfici. I Capitoli 1–2 sono dedicati alle curve piane, perciò ora incominciamo ad occuparci di $\mathbb{R}^2$; la discussione delle proprietà algebriche di $\mathbb{R}^3$ viene rinviata al Paragrafo 3.1.

Uno strumento essenziale per studiare la geometria differenziale delle curve piane è la **struttura complessa** di $\mathbb{R}^2$. Questa struttura è l'applicazione lineare $J\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$J(p_1,p_2) = (-p_2,p_1).$$

Geometricamente, J è la rotazione di angolo $\pi/2$ in senso antiorario. È facile dimostrare che la struttura complessa J gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} J^2 &= -I, \\ (J\mathbf{p}) \cdot (J\mathbf{q}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \\ (J\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} &= 0, \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, dove $I \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è l'applicazione identità. Utilizzeremo la struttura complessa J di $\mathbb{R}^2$ per definire la curvatura "con segno" di una curva piana.

Un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ può essere considerato come un numero complesso a causa dell'isomorfismo canonico

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) \longleftrightarrow p_1 + i\, p_2 = \mathfrak{Re}(\mathbf{p}) + i\, \mathfrak{Im}(\mathbf{p}), \tag{1.1}$$

dove $\mathfrak{Re}(\mathbf{p})$ e $\mathfrak{Im}(\mathbf{p})$ denotano rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di $\mathbf{p}$. Sia $\overline{\mathbf{p}} = \mathfrak{Re}(\mathbf{p}) - i\, \mathfrak{Im}(\mathbf{p})$ il coniugato di $\mathbf{p}$. Nel lemma seguente si esprimono il prodotto scalare $\cdot$ e la struttura complessa J per mezzo dei numeri complessi. La dimostrazione è molto elementare e perciò viene tralasciata.

Lemma 1.1.1. *Identifichiamo il piano $\mathbb{R}^2$ con l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, e siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Si ha allora:*

$$J\mathbf{p} = i\mathbf{p}, \qquad |\mathbf{p}| = \|\mathbf{p}\| \qquad e \qquad \mathbf{p}\,\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + i(\mathbf{p} \cdot J\mathbf{q}). \tag{1.2}$$

L'angolo tra vettori di $\mathbb{R}^n$ non tiene conto dell'ordine dei vettori, ma per l'angolo tra vettori di $\mathbb{R}^2$ esiste una nozione più fine.

Lemma 1.1.2. *Siano $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ vettori non nulli in $\mathbb{R}^2$. Esiste un unico numero reale θ con le seguenti proprietà*:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\,\|\mathbf{q}\|}, \qquad \sin\theta = \frac{\mathbf{p} \cdot J\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\,\|\mathbf{q}\|}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi. \tag{1.3}$$

Si dice che θ è **l'angolo orientato** *da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$.*

Dimostrazione. Dal momento che $(\mathbf{p}\,\overline{\mathbf{q}})/(|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|)$ è un numero complesso di modulo 1, esso si trova sulla circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$; quindi esiste un unico θ con $0 \le \theta < 2\pi$ tale che

$$\frac{\mathbf{p}\,\overline{\mathbf{q}}}{|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|} = e^{i\theta}. \tag{1.4}$$

Ma allora la 1.2 e la 1.4 implicano che

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + i(\mathbf{p}\cdot J\mathbf{q}) = e^{i\theta}|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|\cos\theta + i\,|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|\sin\theta. \tag{1.5}$$

Se nella (1.5) si prendono la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario si ha la (1.3). □

1.2 Curve in $\mathbb{R}^n$

Nel paragrafo precedente sono state richiamate alcune delle proprietà algebriche di $\mathbb{R}^n$. Occorre andare oltre e studiare la differenziazione. In questo capitolo, e in generale in tutto il libro, verrà utilizzata la parola "differenziabile" per significare "possiede derivate o derivate parziali continue di tutti gli ordini". Incominciamo con lo studio delle funzioni di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un'applicazione, dove* (a,b) *è un intervallo aperto in* $\mathbb{R}$. *Scriviamo*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(a_1(t)\ldots a_n(t)\big),$$

dove ogni a_j *è una funzione reale di variabile reale. Si dice che* $\boldsymbol{\alpha}$ *è* **differenziabile** *se* a_j *è differenziabile per ogni* $j = 1\ldots n$. *Analogamente,* $\boldsymbol{\alpha}$ *è* **differenziabile a tratti** *se* a_j *è differenziabile a tratti per ogni* $j = 1\ldots n$.

Definizione 1.2.2. *Una* **curva** (**parametrizzata**) *in* $\mathbb{R}^n$ *è una applicazione differenziabile a tratti*

$$\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dove (a,b) *è un intervallo aperto in* $\mathbb{R}$. *Uno o entrambi gli estremi dell'intervallo possono essere all'infinito. Se* I *è un qualunque altro sottoinsieme di* $\mathbb{R}$, *si dice che*

$$\boldsymbol{\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è una **curva (parametrizzata)**, *se esiste un intervallo aperto* (a,b) *contenente* I *tale che* $\boldsymbol{\alpha}$ *si può estendere a una applicazione differenziabile a tratti da* (a,b) *in* $\mathbb{R}^n$.

È importante distinguere tra una curva parametrizzata $\boldsymbol{\alpha}$, che è una applicazione, e l'insieme dei punti della sua immagine. All'insieme dei punti dell'immagine di $\boldsymbol{\alpha}$ si dà il nome di **traccia** di $\boldsymbol{\alpha}$: esso si indica con $\boldsymbol{\alpha}\big((a,b)\big)$ (o, in generale, con $\boldsymbol{\alpha}(I)$). Si dice che un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ è **parametrizzato da** $\boldsymbol{\alpha}$ se esiste un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{\alpha}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva per la quale $\boldsymbol{\alpha}(I) = S$.

Definizione 1.2.3. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva con* $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(a_1(t)\dots a_n(t)\big)$. *Allora il* **vettore velocità** (*o* **vettore tangente**) *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *nel punto corrispondente al parametro* t *è il vettore* $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ *dato da*

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = \big(a_1'(t)\dots a_n'(t)\big).$$

La funzione v *definita da* $v(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$, *per* $a < t < b$, *si chiama la* **velocità** *di* $\boldsymbol{\alpha}$. **Il vettore accelerazione** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *è* $\boldsymbol{\alpha}''$.

Alcune curve si comportano meglio di altre, nel senso che ora precisiamo.

Definizione 1.2.4. *Una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *si dice* **regolare** *se è differenziabile e se la sua velocità è diversa da zero in ogni punto. Se* $\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| = 1$, *per* $a < t < b$, *allora si dice che* $\boldsymbol{\alpha}$ *ha* **velocità unitaria**.

L'esempio più semplice di curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ è la **retta** per due punti distinti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; la sua parametrizzazione più naturale è

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}(t) = (1-t)\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{1.6}$$

In $\mathbb{R}^2$, dopo la retta, l'esempio più semplice di curva parametrizzata è la **circonferenza** di raggio a e centro il punto $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Essa ammette la seguente parametrizzazione:

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (p_1 + a\cos t, p_2 + a\sin t), \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

Le rette e le circonferenze possono avere parametrizzazioni con velocità unitaria più complicate:

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \frac{\big(\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| - s\big)\mathbf{p} + s\,\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\gamma}(s) = \Big(p_1 + a\cos\Big(\frac{s}{a}\Big),\, p_2 + a\sin\Big(\frac{s}{a}\Big)\Big).$$

La definizione data di curva in $\mathbb{R}^n$ si dice **forma parametrica** di una curva. Invece, la **forma non parametrica** di una curva è costituita da un sistema di $n-1$ equazioni

$$F_1(p_1\dots p_n) = \cdots = F_{n-1}(p_1\dots p_n) = 0.$$

Sebbene in generale sia più facile trattare con la forma parametrica di una curva, a volte questa presenta qualche svantaggio; per esempio, parametrizzazioni distinte possono avere la stessa traccia. Per questo è importante conoscere quando due curve apparentemente diverse sono invece, a meno di un cambiamento di variabile o di parametro, la stessa curva.

Definizione 1.2.5. *Siano* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *e* $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *due curve differenziabili. Si dice che* $\boldsymbol{\beta}$ *è una* **riparametrizzazione positiva** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *se esiste una funzione differenziabile* $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ *tale che* $h'(u) > 0$ *per ogni* $c < u < d$*, e* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$*.*

Analogamente, si dice che $\boldsymbol{\beta}$ *è una* **riparametrizzazione negativa** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *se esiste una funzione differenziabile* $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ *tale che* $h'(u) < 0$ *per ogni* $c < u < d$*, e* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$*.*

Si dice che $\boldsymbol{\beta}$ *è una* **riparametrizzazione** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *se essa è una riparametrizzazione positiva o negativa di* $\boldsymbol{\alpha}$*.*

Cerchiamo ora il legame tra il vettore velocità di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ e il vettore velocità di una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$.

Lemma 1.2.1. (Regola della catena per curve) *Sia* $\boldsymbol{\beta}$ *una riparametrizzazione di* $\boldsymbol{\alpha}$ *con* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$*, dove* $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ *è una funzione differenziabile. Si ha allora*

$$\boldsymbol{\beta}'(u) = h'(u)\boldsymbol{\alpha}'\big(h(u)\big), \tag{1.7}$$

per ogni $c < u < d$*.*

Dimostrazione. Se si pone $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(a_1(t) \dots a_n(t)\big)$ e $\boldsymbol{\beta}(u) = \big(b_1(u) \dots b_n(u)\big)$, allora $b_j(u) = a_j\big(h(u)\big)$ per $j = 1 \dots n$. L'ordinaria regola di derivazione delle funzione composte (detta anche regola della catena) implica che $b_j'(u) = a_j'\big(h(u)\big)h'(u)$ per $j = 1 \dots n$, da cui si ottiene la (1.7). □

1.3 Lunghezza di una curva

Tra le quantità geometriche associate ad una curva, forse la più semplice e importante è la sua lunghezza.

Definizione 1.3.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva, che supponiamo definita su un intervallo contenente l'intervallo* (a,b)*, in modo che* $\boldsymbol{\alpha}$ *sia definita e differenziabile in* a *e in* b*. Allora la* **lunghezza** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *nell'intervallo* $[a,b]$ *è data da*

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}][\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] = \int_a^b \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| dt.$$

Intuitivamente è chiaro che la lunghezza non dipende dalla parametrizzazione della curva. Questo fatto viene dimostrato nel teorema seguente.

Teorema 1.3.1. *Sia* $\boldsymbol{\beta}$ *una riparametrizzazione di* $\boldsymbol{\alpha}$*. Si ha allora*

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{Length}[\boldsymbol{\beta}].$$

Dimostrazione. Consideriamo innanzi tutto il caso di una riparametrizzazione positiva. Sia $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$, dove $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ è tale che $h'(u) > 0$ per $c < u < d$. Allora per il Lemma 1.2.1 si ha

$$\big\|\boldsymbol{\beta}'(t)\big\| = \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)h'(t)\big\| = \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)\big\|\,|h'(t)| = \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)\big\|h'(t).$$

Quindi, tenendo conto della formula del cambiamento di variabile negli integrali, si ottiene

$$\begin{aligned}\textbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] &= \int_a^b \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|dt = \int_c^d \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(u)\big)\big\|h'(u)du \\ &= \int_c^d \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(u)\big)h'(u)\big\|du = \int_c^d \big\|\boldsymbol{\beta}'(u)\big\|du = \textbf{Length}[\boldsymbol{\beta}].\end{aligned}$$

Nel caso di una riparametrizzazione negativa si ha

$$\lim_{u\to c} h(u) = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{u\to d} h(u) = a.$$

Inoltre

$$\big\|\boldsymbol{\beta}'(t)\big\| = \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)h'(t)\big\| = \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)\big\|\,|h'(t)| = -\big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)\big\|h'(t).$$

e quindi

$$\begin{aligned}\textbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] &= \int_a^b \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|dt = \int_d^c \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(u)\big)\big\|h'(u)du \\ &= -\int_c^d \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(u)\big)\big\|h'(u)du = \int_c^d \big\|\boldsymbol{\beta}'(u)\big\|du = \textbf{Length}[\boldsymbol{\beta}]\end{aligned}$$

□

La traccia di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ si può approssimare mediante una linea poligonale formata da una serie di segmenti i cui estremi sono punti della traccia di $\boldsymbol{\alpha}$. Intuitivamente, la lunghezza di questa poligonale tende alla lunghezza di $\boldsymbol{\alpha}$ quando questi segmenti sono molto piccoli. Ciò è effettivamente vero; per spiegare in modo rigoroso quello che succede, si considera una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e un intervallo chiuso $[a,b] \subset (c,d)$. Per ogni partizione

$$P = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b \,\}$$

dell'intervallo $[a,b]$, siano

$$|P| = \max_{1\le i\le N}(t_i - t_{i-1}) \qquad \text{e} \qquad \ell(\boldsymbol{\alpha}, P) = \sum_{j=1}^{N} \big\|\boldsymbol{\alpha}(t_j) - \boldsymbol{\alpha}(t_{j-1})\big\|.$$

Geometricamente, $\ell(\boldsymbol{\alpha}, P)$ è la lunghezza della linea poligonale in $\mathbb{R}^n$ con vertici $\boldsymbol{\alpha}(t_i)$, $i = 1 \dots n$. Allora **Length[$\boldsymbol{\alpha}$]** è il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte, nel senso del seguente

Teorema 1.3.2. *Dato $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che*

$$|P| < \delta \qquad \textit{implica} \qquad |\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] - \ell(\boldsymbol{\alpha}, P)| < \epsilon. \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Sia $P = \{\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b \,\}$ una partizione di $[a, b]$ e sia $\boldsymbol{\alpha} = (a_1 \dots a_n)$. Per ogni i il teorema del valor medio del calcolo differenziale implica che per $1 \le j \le N$ esiste $t_j^{(i)}$ con $t_{j-1} < t_j^{(i)} < t_j$ tale che

$$a_i(t_j) - a_i(t_{j-1}) = a_i'(t_j^{(i)})(t_j - t_{j-1}).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \big\|\boldsymbol{\alpha}(t_j) - \boldsymbol{\alpha}(t_{j-1})\big\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(t_j) - a_i(t_{j-1})\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i'(t_j^{(i)})^2 (t_j - t_{j-1})^2 \\ &= (t_j - t_{j-1})^2 \sum_{i=1}^{n} a_i'(t_j^{(i)})^2. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\big\|\boldsymbol{\alpha}(t_j) - \boldsymbol{\alpha}(t_{j-1})\big\| = (t_j - t_{j-1}) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i'(t_j^{(i)})^2} = (t_j - t_{j-1})(A_j + B_j),$$

dove

$$A_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i'(t_j)^2} = \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t_j)\big\| \qquad \text{e} \qquad B_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i'(t_j^{(i)})^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i'(t_j)^2}.$$

La disuguaglianza triangolare implica che

$$\begin{aligned} |B_j| &= \Big| \big\| \big(a_1'(t_j^{(1)}) \dots a_n'(t_j^{(n)})\big) \big\| - \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t_j)\big\| \Big| \\ &\le \big\| \big(a_1'(t_j^{(1)}) \dots a_1'(t_j^{(n)})\big) - \boldsymbol{\alpha}'(t_j) \big\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \big(a_i'(t_j^{(i)}) - a_i'(t_j)\big)^2 \right)^{1/2} \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \big| a_i'(t_j^{(i)}) - a_i'(t_j) \big|. \end{aligned}$$

Sia $\epsilon > 0$. Dal momento che $t \longmapsto \boldsymbol{\alpha}'(t)$ è continua, esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$|u - v| < \delta_1 \qquad \text{implica} \qquad |a_i'(u) - a_i'(v)| < \frac{\epsilon}{2N(b-a)}$$

per $i = 1 \dots n$. Allora $|P| < \delta_1$ implica che

$$|B_j| < \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

per cui

$$\left| \sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{j-1}) B_j \right| \leq \sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{j-1}) \frac{\epsilon}{2(b-a)} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\big|\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] - \ell(\boldsymbol{\alpha}, P)\big| &\leq \left| \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] - \sum_{j=1}^{N} \big\|\boldsymbol{\alpha}(t_j) - \boldsymbol{\alpha}(t_{j-1})\big\| \right| \\
&= \left| \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] - \sum_{j=1}^{N} (A_j + B_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \\
&\leq \left| \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] - \sum_{j=1}^{N} A_j (t_j - t_{j-1}) \right| + \left| \sum_{j=1}^{N} B_j (t_j - t_{j-1}) \right| \\
&\leq \left| \int_a^b \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| dt - \sum_{j=1}^{N} \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t_j)(t_j - t_{j-1})\big\| \right| + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ma

$$\sum_{j=1}^{N} \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t_j)(t_j - t_{j-1})\big\|$$

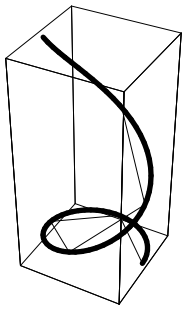
è l'approssimazione di Riemann di

$$\int_a^b \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| dt.$$

Quindi esiste $\delta_2 > 0$ tale che $|P| < \delta_2$ implica che

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t_j)(t_j - t_{j-1})\big\| - \int_a^b \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Di conseguenza, se prendiamo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, otteniamo la (1.8). □



Una approssimazione poligonale della curva

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t, t^{2.7})$$

È importante sapere come varia la lunghezza di una curva quando si modificano gli estremi di integrazione.

Definizione 1.3.2. *Sia c un numero fissato con $a < c < b$.* **L'ascissa curvilinea** s_α *o* **funzione lunghezza d'arco** *di una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a partire da c è data da*

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \big\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\big\| du,$$

per $c \leq t \leq b$. Si scriverà semplicemente s invece di s_α quando non ci sia pericolo di confusione.

Si osservi che

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{d}, \boldsymbol{f}](\boldsymbol{\alpha}) = s_\alpha(f) - s_\alpha(d).$$

Teorema 1.3.3. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Allora esiste una riparametrizzazione $\boldsymbol{\beta}$ di $\boldsymbol{\alpha}$ con velocità unitaria.*

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione ascissa curvilinea s di $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfa alla condizione

$$\frac{ds}{dt}(t) = s'(t) = \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|.$$

Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva regolare, $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ non si annulla mai; di conseguenza la derivata ds/dt è sempre positiva. Il teorema della funzione inversa implica allora che $t \longmapsto s(t)$ ha un'inversa $s \longmapsto t(s)$, e che

$$\left.\frac{dt}{ds}\right|_{s(t)} = \frac{1}{\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t(s)}}.$$

Definiamo ora $\boldsymbol{\beta}$ mediante $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}\big(t(s)\big)$. Allora per il Lemma 1.2.1 risulta che $\boldsymbol{\beta}'(s) = (dt/ds)\boldsymbol{\alpha}'\big(t(s)\big)$. Pertanto,

$$\big\|\boldsymbol{\beta}'(s)\big\| = \left\|\frac{dt}{ds}\boldsymbol{\alpha}'\big(t(s)\big)\right\| = \frac{dt}{ds}\big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(t(s)\big)\big\| = \frac{dt}{ds}(s)\frac{ds}{dt}\big(t(s)\big) = 1$$

□

Se s è l'ascissa curvilinea con punto iniziale in c di una curva $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con velocità unitaria si ha

$$s = s(t) = \int_c^t \big\|\boldsymbol{\beta}'(u)\big\| du = t - c.$$

Pertanto la funzione s misura di fatto le lunghezze degli archi di $\boldsymbol{\beta}$ a partire da c. Per questo motivo si dice che le curve con velocità unitaria sono **parametrizzate dall'ascissa curvilinea**.

Concludiamo questo paragrafo dimostrando che le curve con velocità unitaria sono determinate in modo univoco una volta che ne siano noti il punto iniziale e il senso di percorrenza.

Lemma 1.3.1. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva con velocità unitaria, e sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$ tale che $\boldsymbol{\beta}$ abbia anch'essa velocità unitaria. Si ha allora*

$$\boldsymbol{\beta}(u) = \boldsymbol{\alpha}(\pm u + u_0),$$

per qualche numero reale u_0.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una funzione differenziabile $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ tale che $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$ e $h'(u) \neq 0$, per $c < u < d$. Allora il Lemma 1.2.1 implica che

$$1 = \big\|\boldsymbol{\beta}'(t)\big\| = \big\|\boldsymbol{\alpha}'\big(h(t)\big)\big\|\, |h'(t)| = |h'(t)|.$$

Da queste uguaglianze segue che $h'(u) = \pm 1$ per ogni u. Dal momento che h' è continua su un insieme aperto e connesso, il suo segno è costante; quindi esiste una costante u_0 tale che $h(u) = \pm u + u_0$ per $c < u < d$. □

1.4 Campi di vettori lungo curve

Abbiamo già visto esempi di campi di vettori lungo una curva; per esempio, $\boldsymbol{\alpha}'$ e $\boldsymbol{\alpha}''$, e tali sono anche le derivate di $\boldsymbol{\alpha}$ di ordine superiore. Diamo ora la definizione generale.

Definizione 1.4.1. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Un* **campo di vettori lungo** *$\boldsymbol{\alpha}$ è un'applicazione $\mathbf{Y}$ che assegna a ogni t, con $a < t < b$, un vettore $\mathbf{Y}(t)$ nel punto $\boldsymbol{\alpha}(t)$.*

Per il momento non distingueremo tra un vettore applicato in $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ed il vettore ad esso parallelo uscente dall'origine, anche se più avanti sarà necessario fare questa distinzione (si veda, per esempio, il Paragrafo 5.6). Questo significa che un campo di vettori $\mathbf{Y}$ lungo una curva $\boldsymbol{\alpha}$ è in realtà una n-upla di funzioni:

$$\mathbf{Y}(t) = \big(y_1(t) \dots y_n(t)\big).$$

Pertanto la differenziabilità di $\mathbf{Y}$ significa che ognuna delle funzioni $y_1 \dots y_n$ è differenziabile; la differenziabilità a tratti si definisce in modo analogo. Se $\mathbf{Y}$ è un campo di vettori differenziabile lungo una curva, allora la sua derivata $\mathbf{Y}'$ è il campo di vettori definito da

$$\mathbf{Y}'(t) = \big(y_1'(t) \dots y_n'(t)\big).$$

L'addizione, il prodotto per un numero reale e il prodotto scalare di campi di vettori lungo una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si definiscono in modo naturale. Inoltre è possibile moltiplicare un campo di vettori $\mathbf{Y}$ lungo una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ per una funzione $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Infatti basta definire il campo di vettori $f\mathbf{Y}$ ponendo $(f\mathbf{Y})(t) = f(t)\mathbf{Y}(t)$. Infine, se $n = 2$ e $\mathbf{X}$ è un campo di vettori lungo una curva, allora anche $J\mathbf{X}$ lo è. Inoltre, la derivazione e queste operazioni sono legate dal seguente

Lemma 1.4.1. *Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ campi di vettori differenziabili lungo una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, e sia $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Si ha allora*:

(i) $(f\mathbf{Y})' = f'\mathbf{Y} + f\mathbf{Y}'$;

(ii) $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})' = \mathbf{X}' + \mathbf{Y}'$;

(iii) $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})' = \mathbf{X}' \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}'$;

(iv) $(J\mathbf{Y})' = J\mathbf{Y}'$ (*per* $n = 2$).

Dimostrazione. Dimostriamo soltanto la (i), in quanto le altre identità si dimostrano in modo simile. Si ha

$$\begin{aligned}(f\mathbf{Y})' &= ((fy_1)' \dots (fy_n)') = (f'y_1 + fy_1' \dots f'y_n + fy_n') \\ &= (y_1 \dots y_n)f' + (y_1' \dots y_n')f = f'\mathbf{Y} + f\mathbf{Y}'\end{aligned}$$

□

1.5 Curvatura di una curva piana

Intuitivamente, la curvatura di una curva misura di quanto la curva si discosta dall'essere una retta. Più il campo di vettori velocità $\boldsymbol{\alpha}'$ vira lungo la curva $\boldsymbol{\alpha}$, maggiore è la curvatura.[2]

Nel Capitolo 3 si definirà la curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{R}^n$, per n arbitrario. Nel caso particolare $n = 2$ esiste di $\boldsymbol{\kappa}$ una versione più fine che denoteremo con $\boldsymbol{\kappa 2}$, di cui ci occupiamo in questo paragrafo. Innanzi tutto diamo la definizione di curvatura che è più utile per i calcoli e poi, nel Paragrafo 1.7, dimostriamo che la curvatura si può interpretare come la derivata di un angolo di rotazione.

Definizione 1.5.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva regolare. La* **curvatura** $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]$ *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *è data dalla formula*

$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t) \cdot J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\right\|^3}. \tag{1.9}$$

$1/\left|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]\right|$ *si chiama* **raggio di curvatura** *di* $\boldsymbol{\alpha}$.

Osserviamo che la curvatura può assumere valori sia positivi che negativi. A volte $\boldsymbol{\kappa 2}$ viene detta la **curvatura "con segno"**, per distinguerla dalla curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ che verrà definita nel Capitolo 3. Si può anche parlare della curvatura di una curva piana $\boldsymbol{\alpha}$ che è differenziabile soltanto a tratti. Quando $\boldsymbol{\alpha}'(t) = 0$ o $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ non esiste, $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t)$ non è definita; analogamente, il raggio di curvatura $1/\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]$ non è definito per quelle t per le quali $\boldsymbol{\alpha}'(t)$, o $\boldsymbol{\alpha}''(t)$, si annulla o non è definito.

Quando l'accelerazione di una curva è nulla, si annulla anche la curvatura. In particolare, quella della retta parametrizzata dalla (1.6) è uguale a zero in tutti i punti. È facile dimostrare che la circonferenza di raggio $a > 0$, definita nel Paragrafo 1.2, ha curvatura costante $1/a > 0$.

Vogliamo ora ottenere una formula per la curvatura che si può trovare nella maggior parte dei libri di analisi matematica e poi dimostrare una formula per la curvatura in cui si fanno intervenire i numeri complessi.

[2] La nozione di curvatura di una curva piana appare per la prima volta nelle opere di Apollonio di Perga (262-180 a.C. circa). Newton fu il primo a studiare in modo sistematico la curvatura delle curve piane. A lui si deve, in particolare, la formula (1.10).

Lemma 1.5.1. *Se* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *è una curva regolare con* $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, *allora la curvatura* $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]$ *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *è data da*

$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\big(x'^2(t) + y'^2(t)\big)^{3/2}} \tag{1.10}$$

$$= \frac{\mathfrak{Re}\big(\boldsymbol{\alpha}''(t)\overline{i\boldsymbol{\alpha}'(t)}\big)}{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^3}. \tag{1.11}$$

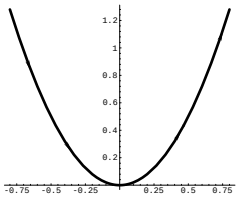
Dimostrazione. È chiaro che $\boldsymbol{\alpha}''(t) = \big(x''(t), y''(t)\big)$ e che $J\boldsymbol{\alpha}'(t) = \big(-y'(t), x'(t)\big)$. Pertanto,

$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \frac{\big(x''(t), y''(t)\big)\cdot\big(-y'(t), x'(t)\big)}{\big(x'^2(t) + y'^2(t)\big)^{3/2}} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\big(x'^2(t) + y'^2(t)\big)^{3/2}},$$

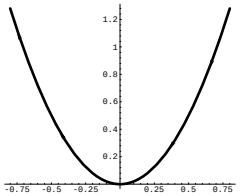
ciò che dimostra la (1.10).

L'equazione (1.11) è conseguenza immediata della definizione di $\boldsymbol{\kappa 2}$ e del Lemma 1.1.1. □

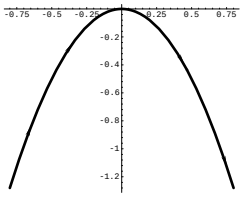
Per comprendere cosa significa che la curvatura di una curva piana è positiva o negativa, è molto utile avere a disposizione alcune rappresentazioni grafiche. Illustriamo i quattro casi che si presentano tramite una parabola.



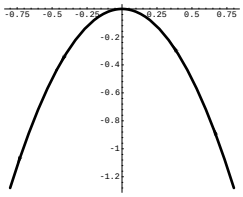
(a) **La parabola** $t \longmapsto (t, 2t^2)$ $\boldsymbol{\kappa 2} > 0$



(b) **Parabola** $t \longmapsto (-t, 2t^2)$ $\boldsymbol{\kappa 2} < 0$



(a) **La parabola** $t \longmapsto (t, -2t^2)$ $\boldsymbol{\kappa 2} < 0$



(b) **Parabola** $t \longmapsto (-t, -2t^2)$ $\boldsymbol{\kappa 2} > 0$

Come la funzione $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}]$, anche la curvatura $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]$ è un invariante geometrico associato alla curva $\boldsymbol{\alpha}$. Perciò dovrà essere, a meno del segno, indipendente dalla parametrizzazione della curva $\boldsymbol{\alpha}$. Nel seguente teorema si dimostra che ciò è vero. (Si ricordi che se a è un numero reale diverso da zero, allora $\operatorname{sign} a = a/|a|$.)

Teorema 1.5.1. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare, e sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$. Sia $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$, dove $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ è una funzione differenziabile. Si ha allora*

$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}](t) = \big(\operatorname{sign} h'(t)\big)\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]\big(h(t)\big), \tag{1.12}$$

ogniqualvolta $\operatorname{sign} h'(t)$ è definito. Pertanto, la curvatura di una curva piana è, a meno del segno, indipendente dalla parametrizzazione.

Dimostrazione. Dal momento che $\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\alpha}' \circ h)h'$, si ha che $J\boldsymbol{\beta}' = \big(J(\boldsymbol{\alpha}' \circ h)\big)h'$, e

$$\boldsymbol{\beta}'' = (\boldsymbol{\alpha}'' \circ h)h'^2 + (\boldsymbol{\alpha}' \circ h)h''. \tag{1.13}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}] &= \frac{\big((\boldsymbol{\alpha}'' \circ h)h'^2 + (\boldsymbol{\alpha}' \circ h)h''\big) \cdot \big(J(\boldsymbol{\alpha}' \circ h)\big)h'}{\big\|(\boldsymbol{\alpha}' \circ h)h'\big\|^3} \\ &= \left(\frac{h'^3}{|h'|^3}\right)\frac{(\boldsymbol{\alpha}'' \circ h) \cdot J(\boldsymbol{\alpha}' \circ h)}{\big\|(\boldsymbol{\alpha}' \circ h)\big\|^3}. \end{aligned}$$

da cui segue la (1.12). □

La formula di $\boldsymbol{\kappa 2}$ si semplifica per le curve con velocità unitaria.

Lemma 1.5.2. *Sia $\boldsymbol{\beta}$ una curva piana con velocità unitaria. Allora*

$$\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}]J\boldsymbol{\beta}'. \tag{1.14}$$

Dimostrazione. Derivando $\boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\beta}' = 1$, si ottiene $\boldsymbol{\beta}'' \cdot \boldsymbol{\beta}' = 0$. Pertanto $\boldsymbol{\beta}''$ deve essere un multiplo di $J\boldsymbol{\beta}'$. Inoltre, segue facilmente dalla (1.9) che questo multiplo è $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}]$, per cui si ha la (1.14). □

Diamo infine una semplice caratterizzazione delle rette e delle circonferenze tramite la curvatura.

Teorema 1.5.2. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare.*

(i) *$\boldsymbol{\alpha}$ è parte di una retta se e solo se $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}] \equiv 0$.*

(ii) $\boldsymbol{\alpha}$ *è parte di una circonferenza di raggio* $a > 0$ *se e solo se* $\big|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]\big| \equiv 1/a$.

Dimostrazione. È facile dimostrare che la curvatura di una retta è uguale a zero, e che la curvatura di una circonferenza di raggio a è $+1/a$ per una circonferenza percorsa in senso antiorario e $-1/a$ per una circonferenza percorsa in senso orario (si veda l'esercizio 3).

Per dimostrare il reciproco, possiamo supporre senza ledere la generalità che $\boldsymbol{\alpha}$ sia una curva con velocità unitaria. Supponiamo che $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) \equiv 0$. Il Lemma 1.5.2 implica che $\boldsymbol{\alpha}''(t) = 0$ per $a < t < b$. Quindi esistono due vettori costanti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ tali che

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{p}\, t + \mathbf{q}$$

per $a < t < b$; perciò $\boldsymbol{\alpha}$ è parte di una retta.

Supponiamo poi che $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) \equiv 1/a$. Definiamo una curva $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ponendo

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + a\, J\boldsymbol{\alpha}'(t).$$

Il Lemma 1.5.2 implica che $\boldsymbol{\gamma}'(t) = 0$ per $a < t < b$. Pertanto esiste $\mathbf{q}$ tale che $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{q}$ per $a < t < b$. Allora

$$\big\|\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{q}\big\| = \big\|a\, J\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| = a.$$

Quindi $\boldsymbol{\alpha}(t)$ è contenuta in una circonferenza di raggio a con centro in $\mathbf{q}$.

Allo stesso modo $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) \equiv -1/a$ implica ancora che $\boldsymbol{\alpha}$ è parte di una circonferenza di raggio a (si veda l'esercizio 4) □

1.6 Funzione angolo tra curve piane

Nel Paragrafo 1.1 abbiamo definito la nozione di angolo orientato tra vettori in $\mathbb{R}^2$; vogliamo ora definire una nozione analoga per le curve. Ovviamente possiamo calcolare l'angolo orientato tra i corrispondenti vettori velocità. Questo angolo orientato θ soddisfa alla condizione $0 \le \theta < 2\pi$, ma per le curve questa restrizione non è conveniente. Il fatto è che le due curve possono attorcigliarsi e girare in modo che alla fine l'angolo che esse formano esce fuori dall'intervallo $0 \le \theta < 2\pi$. Per arrivare alla definizione più appropriata abbiamo bisogno del seguente utile lemma di O'Neill [ON1].

Lemma 1.6.1. *Siano* $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *due funzioni differenziabili tali che* $f^2+g^2 = 1$. *Fissiamo un* t_0 *con* $a < t_0 < b$ *e supponiamo che* θ_0 *sia tale che* $f(t_0) = \cos\theta_0$ *e* $g(t_0) = \sin\theta_0$. *Allora esiste un'unica funzione* $\vartheta\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che*

$$\vartheta(t_0) = \theta_0, \quad f(t) = \cos\vartheta(t) \qquad e \qquad g(t) = \sin\vartheta(t) \tag{1.15}$$

per $a < t < b$.

Dimostrazione. Sia $h = f + i\,g$; allora $h\,\overline{h} = 1$. Definiamo

$$\vartheta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} h'(s)\overline{h(s)}ds. \tag{1.16}$$

Allora

$$\frac{d}{dt}(h\,e^{-i\vartheta}) = e^{-i\vartheta}(h' - i\,h\,\vartheta') = e^{-i\vartheta}(h' - h\,h'\,\overline{h}) = 0.$$

Quindi $h\,e^{-i\vartheta} = c$ per qualche costante c. Dal momento che $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, risulta che

$$c = h(t_0)e^{-i\vartheta(t_0)} = 1.$$

Pertanto $h(t) = e^{i\vartheta(t)}$, e quindi si ha la (1.15).

Sia $\hat{\vartheta}$ un'altra funzione continua tale che

$$\hat{\vartheta}(t_0) = \theta_0, \quad f(t) = \cos\hat{\vartheta}(t) \qquad \text{e} \qquad g(t) = \sin\hat{\vartheta}(t)$$

per $a < t < b$. Allora $e^{i\vartheta(t)} = e^{i\hat{\vartheta}(t)}$ per $a < t < b$. Dal momento che sia ϑ che $\hat{\vartheta}$ sono continue, esiste un intero n tale che

$$\vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t) = 2\pi\,n$$

per $a < t < b$. Ma $\vartheta(t_0) = \hat{\vartheta}(t_0)$, per cui $n = 0$. Quindi ϑ e $\hat{\vartheta}$ coincidono. □

Ora applichiamo questo lemma per dedurre l'esistenza e l'unicità di una funzione angolo differenziabile tra curve in $\mathbb{R}^2$.

Corollario 1.6.1. *Siano $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ due curve regolari in $\mathbb{R}^2$ definite sullo stesso intervallo (a, b), e sia $a < t_0 < b$. Scegliamo θ_0 in modo che*

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\cdot\boldsymbol{\beta}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t_0)\|} = \cos\theta_0 \qquad e \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\cdot J\boldsymbol{\beta}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t_0)\|} = \sin\theta_0.$$

Allora esiste un'unica funzione differenziabile $\vartheta\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\vartheta(t_0) = \theta_0$,

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\beta}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|} = \cos\vartheta(t) \qquad e \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot J\boldsymbol{\beta}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|} = \sin\vartheta(t)$$

per $a < t < b$. Chiamiamo ϑ la **funzione angolo** *tra α e β determinata da θ_0.*

Dimostrazione. Basta mettere

$$f(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\beta}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot J\boldsymbol{\beta}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|}$$

nel Lemma 1.6.1. □

1.7 L'angolo di rotazione

Intuitivamente è chiaro che il campo dei vettori velocità di una curva piana molto curva cambia rapidamente la sua direzione. Questa idea si può precisare matematicamente.

Lemma 1.7.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva regolare e fissiamo* t_0 *con* $a < t_0 < b$. *Sia* θ_0 *un numero tale che*

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|} = (\cos\theta_0, \sin\theta_0).$$

Allora esiste un'unica funzione differenziabile $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che* $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t_0) = \theta_0$ *e*

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} = \big(\cos\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t), \sin\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t)\big) = e^{i\theta[\alpha](t)}. \tag{1.17}$$

per $a < t < b$. *L'angolo* $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]$ *viene detto* **l'angolo di rotazione** *determinato da* θ_0.

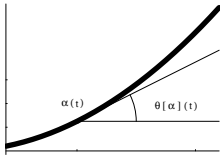
Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\beta}(t) = (t, 0)$; allora $\boldsymbol{\beta}$ parametrizza una retta orizzontale e $\boldsymbol{\beta}'(t) = (1, 0)$ per ogni t. Scriviamo $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(a_1(t), a_2(t)\big)$; allora

$$\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\beta}'(t) = a_1'(t) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot J\boldsymbol{\beta}'(t) = a_2'(t).$$

Il Corollario 1.6.1 comporta l'esistenza di un'unica funzione $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t_0) = \theta_0$ e

$$\begin{cases} \cos\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\beta}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|} = \dfrac{a_1'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}, \\ \sin\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot J\boldsymbol{\beta}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|} = \dfrac{a_2'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Allora la (1.18) è equivalente alla (1.17). □



L'angolo di rotazione

Geometricamente l'angolo di rotazione $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t)$ è l'angolo tra l'asse orizzontale e $\boldsymbol{\alpha}'(t)$. Ora vogliamo ricavare una relazione (messa in evidenza per la prima volta da Kästner[3]) tra l'angolo di rotazione e la curvatura di una curva piana.

[3] Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800). Matematico tedesco, professore a Leipzig ed a Göttingen. I contemporanei tedeschi di Kästner tennero in grande considerazione le sue capacità matematiche e didattiche. Solo Gauss trovava che le sue lezioni fossero troppo elementari, tanto da dichiarare che Kästner era il primo matematico tra i poeti ed il primo poeta tra i matematici.

Lemma 1.7.2. *L'angolo di rotazione e la curvatura di una curva piana regolare* $\boldsymbol{\alpha}$ *sono legati dalla formula*

$$\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]'(t) \ = \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t). \tag{1.19}$$

Dimostrazione. La derivata del primo membro della (1.17) è

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}''(t)}{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|} + \boldsymbol{\alpha}'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|}\right). \tag{1.20}$$

Inoltre, per la regola della catena (Lemma 1.2.1) si ha che la derivata del secondo membro della (1.17) è

$$\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]'(t)\big(-\sin\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t), \cos\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}](t)\big) = \boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]'(t)\frac{J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\big\|J\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|}. \tag{1.21}$$

Se si uguagliano la (1.21) e la (1.20) e si prende il prodotto scalare con $J\boldsymbol{\alpha}'(t)$, si ottiene

$$\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\alpha}]'(t)\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t)\cdot J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|} = \big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^2\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t). \tag{1.22}$$

Allora la (1.19) risulta immediatamente dalla (1.22). □

Corollario 1.7.1. *L'angolo di rotazione e la curvatura di una curva piana con velocità unitaria* $\boldsymbol{\beta}$ *sono legate dalla*

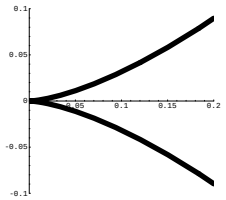
$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}](s) = \frac{d\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\beta}](s)}{ds}.$$

Pertanto le variazioni dell'angolo di rotazione di una curva sono misurate dalla curvatura della curva.

1.8 La parabola semicubica

Per calcolare la lunghezza e la curvatura di una curva piana si possono naturalmente utilizzare pacchetti informatici come *Mathematica* . Tuttavia risulta istruttivo il calcolo manuale di queste quantità geometriche in alcuni casi semplici. Per esempio, consideriamo la parabola semicubica definita parametricamente da

$$\mathbf{sc}(t) = (t^2, t^3).$$



La parabola semicubica
$t \longrightarrow (t^2, t^3)$

La forma non parametrica di **sc** è ovviamente

$$x^3 = y^2.$$

La parabola semicubica occupa un posto speciale nella storia delle curve: essa fu la prima curva algebrica, diversa da una retta, di cui si trovò che la funzione ascissa curvilinea è algebrica. Si veda [Lock, pagine 3–11] per una trattazione più esauriente.

Un semplice calcolo mostra che

$$\mathbf{sc}'(t) = (2t, 3t^2), \quad J\mathbf{sc}'(t) = (-3t^2, 2t), \quad \mathbf{sc}''(t) = (2, 6t),$$

per cui

$$\boldsymbol{\kappa}\mathbf{2}[\mathbf{sc}](t) = \frac{(2, 6t) \cdot (-3t^2, 2t)}{\left\|(2t, 3t^2)\right\|^3} = \frac{6}{|t|(4 + 9t^2)^{3/2}}.$$

Inoltre, la lunghezza di **sc** nell'intervallo $[0, t]$ è

$$s_{\mathbf{sc}}(t) = \int_0^t \left\|\mathbf{sc}'(u)\right\| du = \int_0^t u\sqrt{4 + 9\,u^2}\, du = \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, e sia $a < t_0 < b$. La regolarità di $\boldsymbol{\alpha}$ in t_0 può dipendere dalla particolare parametrizzazione. Ad esempio, una retta orizzontale, se parametrizzata da $t \longmapsto (t^3, 0)$, non è regolare in $t_0 = 0$. In tal caso basta cambiare parametrizzazione. Talvolta però non è possibile trovare una parametrizzazione regolare di una curva in un intorno di un punto.

Definizione 1.8.1. *Diciamo che una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *è* **regolare** *in* t_0 *se è possibile estendere la funzione*

$$t \longmapsto \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\right\|}$$

ad una funzione differenziabile in t_0*. Diversamente* $\boldsymbol{\alpha}$ *si dice* **singolare** *in* t_0*.*

È facile vedere che le definizioni di regolarità e di singolarità in qualche t_0 sono indipendenti dalla parametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$. La nozione di curva regolare $\boldsymbol{\alpha}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com'è stata data a pagina 10, implica la regolarità qualunque sia t_0 per $a < t_0 < b$, ma è più forte, in quanto $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$ non deve annullarsi.

Non è difficile dimostrare:

Lemma 1.8.1. *Una curva* $\boldsymbol{\alpha}$ *è regolare in* t_0 *se e solo se esiste una parametrizzazione con velocità unitaria di* $\boldsymbol{\alpha}$ *in un intorno di* t_0*.*

Per esempio, effettuando i calcoli si trova che

$$\frac{\mathbf{sc}'(t)}{\big\|\mathbf{sc}'(t)\big\|} = \frac{(2t, 3t^2)}{\sqrt{t^2(4+9t^2)}},$$

e questa è una funzione discontinua nell'origine in quanto

$$(1,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{(2t,3t^2)}{\sqrt{t^2(4+9t^2)}} \neq \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{(2t,3t^2)}{\sqrt{t^2(4+9t^2)}} = (-1,0).$$

Questo spiega la singolarità di $t \longmapsto \mathbf{sc}(t)$ in 0.

1.9 Esercizi

1. Per ognuna delle seguenti curve piane, si trovino la funzione ascissa curvilinea e la curvatura. Inoltre, si rappresenti graficamente ognuna di queste curve:

   (a) $t \longmapsto a(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$.

   (b) $t \longmapsto \big(a\cosh(t/a), t\big)$

   (c) $t \longmapsto a(\cos^3 t, \sin^3 t)$

   (d) $t \longmapsto a(2t, t^2)$

2. Si dimostri che il vettore velocità di una curva differenziabile $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è dato dalla formula
$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t) - \boldsymbol{\alpha}(t)}{\Delta t}.$$

3. Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una circonferenza di raggio $a > 0$ e centro $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$. Utilizzando il fatto che $\big\|\boldsymbol{\beta}(s) - \mathbf{q}\big\| = a$ per ogni s, si dimostri che $\boldsymbol{\beta}$ ha curvatura costante, cioè che si ha $\big|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}](s)\big| = a^{-1}$ per ogni s.

4. Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva con velocità unitaria la cui curvatura soddisfa $|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}](s)| = a^{-1}$ per ogni s, dove $a > 0$ è una costante. Si dimostri che $\boldsymbol{\beta}$ è una circonferenza di raggio a con centro in qualche punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$.

5. Si dimostri il Lemma 1.1.1.

6. Si dimostri che la curvatura di una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ è data da
$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \frac{\mathfrak{Im}\big(\boldsymbol{\alpha}''(t)\overline{\boldsymbol{\alpha}'(t)}\big)}{\big|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big|^3}.$$

7. Si trovi una parametrizzazione con velocità unitaria della parabola semicubica $t \longmapsto (t^2, t^3)$ per $t > 0$.

Capitolo 2

Ricerca di una Curva Piana di Curvatura Assegnata

In questo capitolo vogliamo dare una risposta alla seguente domanda: in qual misura la curvatura determina una curva piana? Tale questione si compone di due parti: quando due curve hanno la stessa curvatura, e quando può una curva essere individuata assegnando la sua curvatura?

Per rispondere alla prima parte incominciamo col chiederci: quali trasformazioni di $\mathbb{R}^2$ conservano la curvatura? Abbiamo visto (Teorema 1.5.1) che la curvatura di una curva piana è indipendente, a meno del segno, dalla parametrizzazione. Quindi senza ledere la generalità possiamo supporre in questo capitolo che tutte le curve abbiano velocità unitaria.

È intuitivamente chiaro che l'immagine di una curva piana $\boldsymbol{\alpha}$ tramite una rotazione o una traslazione di $\mathbb{R}^2$ ha la stessa curvatura di $\boldsymbol{\alpha}$. Rotazioni e traslazioni sono esempi di movimenti euclidei di $\mathbb{R}^2$, le applicazioni di $\mathbb{R}^2$ in sé che non modificano le distanze. Noi ci occupiamo dapprima dei movimenti euclidei in generale nel Paragrafo 2.1. Le funzioni in *Mathematica* per traslare, ruotare e riflettere curve vengono poi date nel Paragrafo 2.2.

L'invarianza della curvatura rispetto ai movimenti euclidei viene stabilita nel Paragrafo 2.3. Nel Paragrafo 2.3 dimostriamo anche il *Teorema fondamentale delle curve piane*; questo importante teorema afferma che due curve con velocità unitaria che hanno la stessa curvatura differiscono solo per un movimento euclideo.

Veniamo ora alla seconda parte della nostra questione: può una curva unitaria

essere determinata, a meno di un movimento euclideo, dalla sua curvatura? Nel Paragrafo 2.3 noi diamo di fatto in modo esplicito un sistema di equazioni differenziali che permette di individuare una curva piana una volta assegnata la sua curvatura. In casi semplici questo sistema può essere risolto esplicitamente, ma nel caso generale solo una soluzione numerica è possibile. Comunque la risposta alla seconda domanda è affermativa.

2.1 Movimenti euclidei

Al fine di studiare l'invarianza della curvatura delle curve piane rispetto alle rotazioni e alle traslazioni, dobbiamo precisare il significato di invarianza. Occorre perciò prendere in esame i vari tipi di applicazioni di $\mathbb{R}^2$ in sé. Incominciamo con il definire diverse classi di applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in sé prima di passare al caso speciale di $\mathbb{R}^2$.

Innanzi tutto definiamo alcuni importanti tipi di applicazioni lineari. La proprietà di linearità ($A(a\,\mathbf{p} + b\,\mathbf{q}) = a\,A\mathbf{p} + b\,A\mathbf{q}$) implica che ognuna di queste applicazioni trasforma l'origine nell'origine.

Definizione 2.1.1. *Sia* $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una applicazione lineare non singolare.*

(i) *Diciamo che* A **conserva l'orientazione** *se* $\det(A)$ *è positivo, e che* **inverte l'orientazione** *se* $\det(A)$ *è negativo.*

(ii) A *è detta una* **trasformazione ortogonale** *se*

$$A\mathbf{p} \cdot A\mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

per ogni $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

(iii) *Una* **rotazione** *di* $\mathbb{R}^n$ *è una trasformazione ortogonale che conserva l'orientazione.*

(iv) *Una* **riflessione** *di* $\mathbb{R}^n$ *è una trasformazione ortogonale della forma* $S_{\mathbf{q}}$, *dove* $\mathbf{q} \neq 0$ *e*

$$S_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \frac{2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|^2}\mathbf{q}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.1.1. *Sia* $B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una trasformazione ortogonale. Allora*

$$\det(B) = \pm 1.$$

Dimostrazione. Se $B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare, denotiamo con ${}^tB$ la trasposta di B. Per definizione $({}^tB\mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot (B\mathbf{q})$. La matrice di ${}^tB$ rispetto a una qualunque base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ è (a_{ji}), dove (a_{ij}) è la matrice di B; di conseguenza, $\det({}^tB) = \det(B)$. Ora supponiamo che B sia ortogonale. Allora ${}^tBB$ è la trasformazione identità I. Quindi

$$1 = \det I = \det({}^tBB) = \det({}^tB)\det(B) = \det(B)^2$$

□

Lemma 2.1.2. *Sia* $S_{\mathbf{q}}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una riflessione, dove* $\mathbf{q} \neq 0$. *Allora* $\det(S_{\mathbf{q}}) = -1$. *Inoltre,* $S_{\mathbf{q}}$ *si comporta come l'applicazione identità su un iperpiano* $\boldsymbol{P}$ *(che è un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $n-1$*) e inverte le direzioni sul complemento ortogonale di* $\boldsymbol{P}$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{P}$ il complemento ortogonale di $\mathbf{q}$, cioè,

$$\boldsymbol{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0\}.$$

Chiaramente $\dim(\boldsymbol{P}) = n - 1$, ed è facile verificare che $S_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ per ogni $\mathbf{p} \in \boldsymbol{P}$. Essendo $S_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$, risulta che $S_{\mathbf{q}}$ inverte le direzioni sul complemento ortogonale di $\boldsymbol{P}$.

Per mostrare che $\det(S_{\mathbf{q}}) = -1$, scegliamo una base $\{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{n-1}\}$ di $\mathbf{P}$; allora si verifica facilmente che $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{n-1}\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$. Poiché la matrice di $S_{\mathbf{q}}$ rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

segue che $\det(S_{\mathbf{q}}) = -1$ □

Ora definiamo diversi tipi di applicazione che possono non trasformare l'origine nell'origine.

Definizione 2.1.2. *Sia* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

(i) *Una* **trasformazione affine** *di* $\mathbb{R}^n$ *è un'applicazione* $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *della forma*

$$F(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + \mathbf{q}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$*, dove* A *è una trasformazione lineare di* $\mathbb{R}^n$*. Chiamiamo* A *la* **parte lineare** *della trasformazione affine* F*. Una trasformazione affine* F **conserva l'orientazione** *se* $\det(A)$ *è positivo, oppure* **inverte l'orientazione** *se* $\det(A)$ *è negativo.*

(ii) *Una* **traslazione** *di* $\mathbb{R}^n$ *è un'applicazione affine* $T_{\mathbf{q}} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *della forma*

$$T_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$*.*

(iii) *Un* **movimento euclideo** *di* $\mathbb{R}^n$ *è una trasformazione affine la cui parte lineare è una trasformazione ortogonale.*

(iv) *Una* **isometria** *di* $\mathbb{R}^n$ *è un'applicazione* $F \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *che conserva le distanze; cioè,*

$$\|F(\mathbf{p}_1) - F(\mathbf{p}_2)\| = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$$

per ogni $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$*. È facile vedere che un'isometria deve essere un'applicazione biiettiva.*

Richiamiamo le seguenti importanti nozioni di algebra astratta.

Definizione 2.1.3. *Un* **gruppo** *è un insieme non vuoto* $\mathcal{G}$ *con una moltiplicazione*

$$\circ \colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

che gode delle seguenti proprietà.

(i) *Esiste un* **elemento neutro** $\mathbf{1} \in \mathcal{G}$ *tale che*

$$a \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ a = a$$

per ogni $a \in \mathcal{G}$*.*

(ii) *La moltiplicazione è* **associativa**, *cioè,*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

per ogni $a, b, c \in \mathcal{G}$*.*

(iii) *Ogni elemento* $a \in \mathcal{G}$ *ha un unico* inverso, *cioè, per ogni* $a \in \mathcal{G}$ *esiste un elemento* $a^{-1} \in \mathcal{G}$ *tale che*

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \mathbf{1}.$$

Definizione 2.1.4. *Un* **sottogruppo** *di un gruppo $\mathcal{G}$ è un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{S}$ di $\mathcal{G}$ chiuso rispetto alla moltiplicazione e al passaggio all'inverso, cioè,*

$$a \circ b \in \mathcal{S} \qquad e \qquad a^{-1} \in \mathcal{S}$$

per ogni $a, b \in \mathcal{S}$.

È facile verificare che un sottogruppo di un gruppo è esso stesso un gruppo. Ulteriori dettagli sui gruppi si possono trovare in un qualunque libro di algebra astratta, ad esempio in [Scott] oppure in [NiSh].

Molti insiemi di applicazioni hanno la struttura di gruppo. Ricordiamo che se $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sono applicazioni, la **composizione** $(G \circ F)\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ è definita da

$$(G \circ F)(\mathbf{p}) = G\big(F(\mathbf{p})\big)$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$. Denotiamo con $\mathbf{GL}(n)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari non singolari di $\mathbb{R}^n$ in sé. È facile verificare che $\mathbf{GL}(n)$ è un gruppo rispetto alla composizione. Allo stesso modo si ottengono i seguenti gruppi:

- il gruppo $\mathbf{Affine}(\mathbb{R}^n)$ delle applicazioni affini di $\mathbb{R}^n$;
- il gruppo $\mathbf{O}(n)$ delle trasformazioni ortogonali di $\mathbb{R}^n$;
- il gruppo $\mathbf{Translation}(\mathbb{R}^n)$ delle traslazioni di $\mathbb{R}^n$;
- il gruppo $\mathbf{Isometry}(\mathbb{R}^n)$ delle isometrie di $\mathbb{R}^n$;
- il gruppo $\mathbf{Euclidean}(\mathbb{R}^n)$ dei movimenti euclidei di $\mathbb{R}^n$;

La verifica che ognuno di questi insiemi è un gruppo è facile. Inoltre:

Teorema 2.1.1. *Un'applicazione $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria di $\mathbb{R}^n$ se e solo se essa è la composizione di una traslazione e di una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$. Quindi il gruppo dei movimenti euclidei $\mathbf{Euclidean}(\mathbb{R}^n)$ coincide con il gruppo $\mathbf{Isometry}(\mathbb{R}^n)$ delle isometrie di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. È facile verificare che ogni trasformazione ortogonale o traslazione di $\mathbb{R}^n$ conserva la funzione distanza. Quindi anche la composizione di una trasformazione ortogonale e di una traslazione conserva la funzione distanza. Ciò mostra che $\mathbf{Euclidean}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbf{Isometry}(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, sia $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria, e definiamo $G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $G(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) - F(0)$. Allora G è un'isometria e $G(0) = 0$. Per far vedere che G conserva il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$, calcoliamo

$$\begin{aligned} -2G(\mathbf{p}) \cdot G(\mathbf{q}) &= \|G(\mathbf{p}) - G(\mathbf{q})\|^2 - \|G(\mathbf{p}) - G(0)\|^2 - \|G(\mathbf{q}) - G(0)\|^2 \\ &= \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p} - 0\|^2 - \|\mathbf{q} - 0\|^2 \\ &= -2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Per mostrare che G è lineare, sia $\{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Allora anche $\{G(\mathbf{e}_1) \dots G(\mathbf{e}_n)\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Quindi per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$G(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n} \big(G(\mathbf{p}) \cdot G(\mathbf{e}_j)\big) G(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_j) G(\mathbf{e}_j).$$

Dal momento che ogni $\mathbf{p} \longmapsto (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_j)$ è lineare, tale è anche G. Quindi G è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, e perciò F è la composizione della trasformazione ortogonale G e della traslazione $T_{F(0)}$. Abbiamo così dimostrato che $\mathbf{Isometry}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbf{Euclidean}(\mathbb{R}^n)$. Dal momento che abbiamo già dimostrato l'inclusione nell'altro senso, risulta che $\mathbf{Isometry}(\mathbb{R}^n)$ coincide con $\mathbf{Euclidean}(\mathbb{R}^n)$ □

Ora rivolgiamo la nostra attenzione al caso particolare di $\mathbb{R}^2$. Diamo innanzi tutto una caratterizzazione delle trasformazioni di $\mathbb{R}^2$ che conservano l'orientazione e di quelle che la invertono in termini della struttura complessa J di $\mathbb{R}^2$.

Lemma 2.1.3. *Sia A una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$A\,J = \varepsilon J\,A, \tag{2.1}$$

$$\det(A) = \varepsilon, \tag{2.2}$$

dove

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ se } A \text{ conserva l'orientazione}, \\ -1 \text{ se } A \text{ inverte l'orientazione}. \end{cases}$$

Inoltre, $\det(A) = -1$ *se e solo se A è una riflessione.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ un vettore non nullo. Allora $J\,A\mathbf{p} \cdot A\mathbf{p} = 0$; siccome A è ortogonale,

$$A\,J\mathbf{p} \cdot A\mathbf{p} = J\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Quindi sia $A\,J\mathbf{p}$ che $J\,A\mathbf{p}$ sono perpendicolari ad $A\mathbf{p}$, e quindi per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $A\,J\mathbf{p} = \lambda J\,A\mathbf{p}$. Dal momento che sia A che J sono trasformazioni ortogonali, è facile vedere che $|\lambda| = 1$.

Calcoliamo la matrice di A rispetto alla base $\{\mathbf{p}, J\mathbf{p}\}$ di $\mathbb{R}^2$. Poniamo

$$A\mathbf{p} = a_{11}\mathbf{p} + a_{12}J\mathbf{p}.$$

Allora

$$A\,J\mathbf{p} = \lambda J\,A\mathbf{p} = \lambda J(a_{11}\mathbf{p} + a_{12}J\mathbf{p}) = \lambda(-a_{12}\mathbf{p} + a_{11}J\mathbf{p}),$$

per cui la matrice di A è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\lambda\,a_{12} & \lambda\,a_{11} \end{pmatrix}.$$

Quindi $\varepsilon = \det(A) = \lambda(a_{11}^2 + a_{12}^2)$. Inoltre, per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ non nullo si ha

$$\|\mathbf{p}\|^2(a_{11}^2 + a_{12}^2) = \|A\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2,$$

e quindi $(a_{11}^2 + a_{12}^2) = 1$. Pertanto $\lambda = \varepsilon$, e si ottengono sia la (2.1) che la (2.2).

Il Lemma 2.1.2 implica che il determinante di una riflessione di $\mathbb{R}^2$ vale -1. Reciprocamente, una trasformazione ortogonale $A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\det(A) = -1$ deve avere 1 e -1 come autovalori. Sia $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ tale che $A(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$ e $\|\mathbf{q}\| = 1$. Allora $A = S_{\mathbf{q}}$ □

Il seguente teorema si deve a Chasles.[1]

Teorema 2.1.2. *Ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è la composizione di traslazioni, di riflessioni e di rotazioni.*

Dimostrazione. Il Teorema 2.1.1 implica che un'isometria F di $\mathbb{R}^2$ è un movimento euclideo. Esistono quindi una trasformazione ortogonale $A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ed un punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ tali che $F(\mathbf{p}) = A(\mathbf{p}) + \mathbf{q}$. In altri termini,

$$F = T_{\mathbf{q}} \circ A.$$

Dal Lemma 2.1.3 sappiamo che A è una rotazione se $\det(A) = 1$ oppure una riflessione se $\det(A) = -1$ □

La dimostrazione del lemma seguente si riduce ad un semplice calcolo.

[1]

Michel Chasles (1793–1880). Storico della matematica e geometra francese. Si occupò di geometria algebrica e proiettiva.

Lemma 2.1.4. *Sia A una rotazione di $\mathbb{R}^2$. Allora*

$$\mathbf{p} \longmapsto \frac{A\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^2} \qquad e \qquad \mathbf{p} \longmapsto \frac{AJ\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^2}$$

sono funzioni costanti.

Definizione 2.1.5. *Sia A una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che conserva l'orientazione.* **L'angolo di rotazione** *di A è quell'unico numero θ tale che $0 \leq \theta < 2\pi$ e*

$$\cos\theta = \frac{A\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^2}, \qquad \sin\theta = \frac{AJ\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^2}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ non nullo. Quindi mediante l'identificatione (1.1) di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ possiamo scrivere

$$A\mathbf{p} = \cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta J\mathbf{p} = e^{i\theta}\mathbf{p}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

2.2 Curve e movimenti euclidei

È intuitivamente chiaro che un'applicazione di $\mathbb{R}^2$ in sé trasforma una curva in un'altra curva. Ecco la definizione esatta.

Definizione 2.2.1. *Sia $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva.* **L'immagine di $\boldsymbol{\alpha}$ tramite** *F è la curva $F \circ \boldsymbol{\alpha}$.*

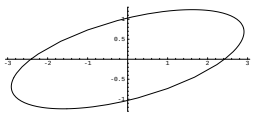
È facile traslare, ruotare o riflettere curve piane mediante *Mathematica* con le funzioni di traslazione **tl**, di rotazione **rt** e di riflessione **rf** definite nel modo seguente:

```
tl[p_,alpha_][t_]:= p + alpha[t]

rt[theta_,alpha_][t_]:=
   {Cos[theta]alpha[t][[1]] - Sin[theta]alpha[t][[2]],
    Sin[theta]alpha[t][[1]] + Cos[theta]alpha[t][[2]]}

rf[alpha_][t_]:= {alpha[t][[1]],-alpha[t][[2]]}
```

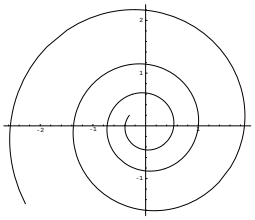
Per esempio, possiamo utilizzare **rt** per ruotare un'ellisse:



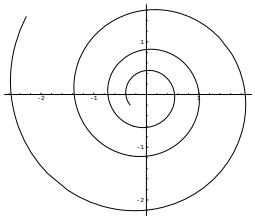
Ellisse ruotata

```
ParametricPlot[rt[Pi/12,
ellipse[3,1]][t]//Evaluate,{t,0,2Pi},
AspectRatio->Automatic];
```

Una spirale logaritmica riflessa si avvolge nell'altro senso:



Spirale logaritmica



Spirale logaritmica riflessa

2.3 Equazioni naturali di curve piane

Dal momento che un movimento euclideo F di $\mathbb{R}^2$ conserva le distanze, esso non può né stirare, né contrarre, né deformare in alcun modo una curva piana. Vogliamo ora far vedere che F conserva la curvatura a meno del segno.

Teorema 2.3.1. *Il valore assoluto della curvatura e la derivata dell'ascissa curvilinea di una curva sono invarianti per movimenti euclidei di* $\mathbb{R}^2$*. La curvatura* $\boldsymbol{\kappa 2}$ *viene conservata da un movimento euclideo che conserva l'orientazione di* $\mathbb{R}^2$ *e cambia segno se sottoposta a un movimento euclideo che inverte l'orientazione.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva, e sia $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un movimento euclideo. Sia A la parte lineare di F, cosicché per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ si ha $F(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + F(0)$. Definiamo una curva $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $\boldsymbol{\gamma} = F \circ \boldsymbol{\alpha}$; allora per $a < t < b$ si ha

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = A\boldsymbol{\alpha}(t) + F(0).$$

Quindi $\boldsymbol{\gamma}'(t) = A\boldsymbol{\alpha}'(t)$ e $\boldsymbol{\gamma}''(t) = A\boldsymbol{\alpha}''(t)$. Siano s_α ed s_γ le funzioni lunghezza d'arco rispetto ad $\boldsymbol{\alpha}$ e a $\boldsymbol{\gamma}$. Dal momento che A è una trasformazione ortogonale si ha

$$s'_\gamma(t) = \big\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\big\| = \big\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| = s'_\alpha(t).$$

Calcoliamo la curvatura di $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\gamma}](t) &= \frac{\boldsymbol{\gamma}''(t)\cdot J\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{A\boldsymbol{\alpha}''(t)\cdot J\,A\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}\\ &= \varepsilon\frac{A\boldsymbol{\alpha}''(t)\cdot A\,J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}\\ &= \varepsilon\frac{\boldsymbol{\alpha}''(t)\cdot J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} = \varepsilon\,\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](t)\end{aligned}$$

□

Dimostriamo ora il reciproco del Teorema 2.3.1.

Teorema 2.3.2. (Teorema fondamentale delle curve piane) *Siano $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ curve regolari in $\mathbb{R}^2$ con velocità unitaria definite sullo stesso intervallo (a,b). Supponiamo che $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ abbiano la stessa curvatura con segno. Allora esiste un movimento euclideo F di $\mathbb{R}^2$ che conserva l'orientazione e che trasforma $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\gamma}$.*

Dimostrazione. Fissiamo $s_0 \in (a,b)$. Ovviamente esiste una traslazione di $\mathbb{R}^2$ che porta $\boldsymbol{\alpha}(s_0)$ in $\boldsymbol{\gamma}(s_0)$. Inoltre, possiamo trovare una rotazione di $\mathbb{R}^2$ che applica $\boldsymbol{\alpha}'(s_0)$ su $\boldsymbol{\gamma}'(s_0)$. Quindi esiste un movimento euclideo F di $\mathbb{R}^2$ che conserva l'orientazione tale che

$$F\big(\boldsymbol{\alpha}(s_0)\big) = \boldsymbol{\gamma}(s_0) \qquad \text{e} \qquad F\big(\boldsymbol{\alpha}'(s_0)\big) = \boldsymbol{\gamma}'(s_0).$$

Per dimostrare che $F\circ\boldsymbol{\alpha}$ coincide con $\boldsymbol{\gamma}$, introduciamo una funzione a valori reali f tramite

$$f(s) = \big\|(F\circ\boldsymbol{\alpha})'(s) - \boldsymbol{\gamma}'(s)\big\|^2$$

per $a < s < b$. La derivata di f si calcola facilmente:

$$\begin{aligned}f'(s) &= 2\big((F\circ\boldsymbol{\alpha})''(s) - \gamma''(s)\big)\cdot\big((F\circ\boldsymbol{\alpha})'(s) - \gamma'(s)\big)\\ &= 2\big((F\circ\boldsymbol{\alpha})''(s)\cdot(F\circ\boldsymbol{\alpha})'(s) + \boldsymbol{\gamma}''(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(s)\\ &\qquad -(F\circ\boldsymbol{\alpha})''(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(s) - (F\circ\boldsymbol{\alpha})'(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}''(s)\big).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Essendo sia $F\circ\boldsymbol{\alpha}$ che $\boldsymbol{\gamma}$ con velocità unitaria, segue che

$$(F\circ\boldsymbol{\alpha})''(s)\cdot(F\circ\boldsymbol{\alpha})'(s) = \boldsymbol{\gamma}''(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(s) = 0.$$

Quindi la (2.3) si riduce a

$$f'(s) = -2\big((F\circ\boldsymbol{\alpha})''(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(s) + (F\circ\boldsymbol{\alpha})'(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}''(s)\big). \tag{2.4}$$

Denotiamo con A la parte lineare di F. Dal momento che $(F \circ \boldsymbol{\alpha})'(s) = A\boldsymbol{\alpha}'(s)$ e $(F \circ \boldsymbol{\alpha})''(s) = A\boldsymbol{\alpha}''(s)$, possiamo riscrivere la (2.4) nella forma

$$f'(s) = -2\big(A\boldsymbol{\alpha}''(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) + A\boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}''(s)\big). \tag{2.5}$$

Ora facciamo intervenire l'ipotesi $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\gamma}]$ e la (2.5) per ottenere

$$\begin{aligned} f'(s) &= -2\big(\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](s)A\,J\boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) + A\boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot \boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\gamma}](s)J\boldsymbol{\gamma}'(s)\big) \\ &= -2\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}](s)\big(J\,A\boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(s) + A\boldsymbol{\alpha}'(s) \cdot J\boldsymbol{\gamma}'(s)\big) = 0. \end{aligned}$$

Ma essendo $f(s_0) = 0$, risulta che $f(s) = 0$ per ogni s. Quindi $(F \circ \boldsymbol{\alpha})'(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)$ per ogni s, e perciò esiste $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$(F \circ \boldsymbol{\alpha})(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{q}$$

per ogni s. Di fatto $\mathbf{q} = 0$ in quanto $F(\boldsymbol{\alpha}(s_0)) = \boldsymbol{\gamma}(s_0)$. Quindi il movimento euclideo F porta $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\gamma}$ □

Ora torniamo al problema della ricerca delle equazioni esplicite di una curva piana supponendo data la sua curvatura.

Teorema 2.3.3. *Una curva con velocità unitaria $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cui curvatura è una data funzione $k\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua a tratti è parametrizzata da*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}(s) &= \left(\displaystyle\int \cos\boldsymbol{\theta}(s)ds + c, \int \sin\boldsymbol{\theta}(s)ds + d\right), \\ \boldsymbol{\theta}(s) &= \displaystyle\int k(s)ds + \boldsymbol{\theta}_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

dove c, d, $\boldsymbol{\theta}_0$ sono costanti di integrazione.

Dimostrazione. Definiamo $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\theta}$ tramite le (2.6); ne segue che

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}'(s) &= \big(\cos\boldsymbol{\theta}(s), \sin\boldsymbol{\theta}(s)\big), \\ \boldsymbol{\theta}'(s) &= k(s). \end{cases} \tag{2.7}$$

Dunque $\boldsymbol{\beta}$ ha velocità unitaria, e quindi segue dal Corollario 1.7.1, a pagina 24, che la curvatura di $\boldsymbol{\beta}$ è k. □

Un modo classico per descrivere una curva piana $\boldsymbol{\alpha}$ è costituito da una **equazione naturale** (o **intrinseca**) che è un'equazione della forma

$$F\big(\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}], s\big) = 0, \tag{2.8}$$

dove s denota l'ascissa curvilinea di $\boldsymbol{\alpha}$. Ancorché questa equazione possa non essere l'equazione più utile dal punto di vista dei calcoli, essa mostra chiaramente come la curvatura cambia con la lunghezza dell'arco ed è ovviamente invariante per traslazioni e rotazioni. Per trovare l'equazione naturale di una curva $t \longmapsto \boldsymbol{\alpha}(t)$, uno prima calcola la curvatura e l'ascissa curvilinea in funzione di t e quindi elimina t. Ecco alcuni esempi:

Curva	**Equazione naturale**
Retta	$\boldsymbol{\kappa 2} = 0$
Circonferenza di raggio a	$\boldsymbol{\kappa 2} = \dfrac{1}{a_a}$
catenary[c]	$\boldsymbol{\kappa 2} = -\dfrac{}{a^2 + s^2}$
clothoid[n,a]	$\boldsymbol{\kappa 2} = -\dfrac{s^n}{a^{n+1}}$
logspiral[a,b]	$\boldsymbol{\kappa 2} = \dfrac{1}{b s}$
evoluta[circle[a]]	$\boldsymbol{\kappa 2} = \dfrac{1}{\sqrt{a\, s}}$

Reciprocamente, l'equazione ordinaria si può trovare (almeno in teoria) risolvendo la (2.8) e tenendo conto del Teorema 2.3.3.

Le equazioni naturali furono prese in considerazione per la prima volta da Eulero[2] nel 1736 ([Euler1]). Eccellenti esposizioni sulle equazioni naturali si trovano in [Melz, volume 2, pagine 33–41] ed in [Ces]. Il libro [Ces] di Cesàro[3] prende le equazioni naturali come punto di partenza; vi sono contenuti molti disegni (assai sorprendenti per un libro pubblicato alla fine del diciannovesimo secolo) di curve piane date tramite le loro equazioni naturali.

---

[2]

Leonhard Euler (1707-1783). Matematico svizzero. Eulero fu un geometra nel senso lato in cui questo termine veniva usato ai suoi tempi. Egli non solo contribuì enormemente allo sviluppo e alla sistemazione dell'analisi –in particolare fondando il calcolo delle variazioni e le teorie delle equazioni differenziali, delle funzioni di variabili complesse, e delle funzioni speciali– ma gettò anche le basi della teoria dei numeri come disciplina rigorosa. Inoltre, egli si interessò alle applicazioni della matematica ai campi più disparati come il giuoco del lotto, i sistemi idraulici, le costruzioni navali e la navigazione, la scienza attuariale, la demografia, la meccanica dei fluidi, l'astronomia e la balistica.

[3]

Ernesto Cesàro (1859-1906). Matematico napoletano che svolse la sua attività prevalentemente a Palermo ed a Roma. Nonostante il suo contributo più importante sia stato probabilmente la monografia **Lezioni di Geometria Intrinseca**, egli è ricordato soprattutto per i suoi risultati sulle serie divergenti.

Per esempio, cerchiamo l'equazione naturale della catenaria definita da

$$\textbf{catenary[a]}(t) = \left(a\cosh\left(\frac{t}{a}\right), t\right). \tag{2.9}$$

Con un calcolo diretto si trova che la curvatura e l'ascissa curvilinea sono date da

$$\boldsymbol{\kappa 2}(t) = -\frac{\operatorname{sech}(t/a)^2}{a} \qquad \text{e} \qquad s(t) = a\sinh(t/a). \tag{2.10}$$

Allora la (2.10) implica che

$$(s^2 + a^2)\boldsymbol{\kappa 2} = -a. \tag{2.11}$$

Sebbene la (2.9) e la (2.11) descrivano entrambe una catenaria, la (2.11) può essere considerata più naturale in quanto essa non dipende dalla scelta della parametrizzazione della catenaria.

2.4 Esercizi

1. Sia $\{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che un vettore arbitrario $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ammette la decomposizione

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n.$$

2. **Un'omotetia** di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ per la quale esiste una costante $\lambda \neq 0$ tale che

$$\|F(\mathbf{p}_1) - F(\mathbf{p}_2)\| = \lambda\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$$

   per ogni $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che una omotetia è un'applicazione lineare biiettiva.

3. Una **curva algebrica** è una curva data in modo implicito nella forma $P(x, y) = 0$, dove P è un polinomio in x e y. **L'ordine** di una curva algebrica è il grado del polinomio P. Si dimostri che una trasformazione affine conserva l'ordine di una curva algebrica.

4. Si dimostri che l'equazione naturale di una trattrice è

$$(\boldsymbol{\kappa 2})^2 = \frac{1}{a\sqrt{e^{2s/a} - 1}}.$$

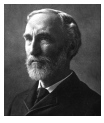
Capitolo 3

Curve nello Spazio

Nei Capitoli 1–2 abbiamo visto che la curvatura $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]$ di una curva piana $\boldsymbol{\alpha}$ misura di quanto $\boldsymbol{\alpha}$ si discosta dall'essere una retta. In questo capitolo definiamo una curvatura analoga $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ per le curve di $\mathbb{R}^n$; anche questa misura di quanto una curva differisce da una retta. $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ si riduce al valore assoluto di $\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\alpha}]$ quando $n = 2$. Per le curve in $\mathbb{R}^3$ possiamo anche misurare di quanto una curva si discosta dall'essere piana mediante un'altra funzione denotata con $\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\alpha}]$ e chiamata la torsione di $\boldsymbol{\alpha}$.

Per studiare le curve in $\mathbb{R}^3$ ci serviremo del prodotto vettoriale di Gibbs[1], uno strumento di importanza simile a quella della struttura complessa nello studio delle curve in $\mathbb{R}^2$. Nel Paragrafo 3.1 vengono richiamate la definizione ed alcune delle proprietà del prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Curvatura e torsione vengono definite nel Paragrafo 3.2. Nel Paragrafo 3.2 definiamo anche tre campi di vettori unitari ortogonali lungo una curva nello spazio; essi costituiscono il campo di riferimenti di Frenet della curva. La curvatura e la torsione rappresentano una misura delle rotazioni e degli avvitamenti che il campo di riferimenti di Frenet compie lungo la curva. Di fatto, le formule di Frenet fanno intervenire la curvatura e la torsione nella espressione delle derivate dei tre campi di vettori del campo di riferimenti di Frenet in funzione dei campi di vettori stessi. Le formule di Frenet per una curva nello spazio con velocità unitaria vengono

[1]



Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Fisico americano. Nel tentativo di utilizzare i quaternioni di Hamilton, si accorse che era più utile scomporre la moltiplicazione quaternionica in una parte scalare e in una parte vettoriale, da considerare come moltiplicazioni separate. Nonostante questo abbia causato grande costernazione fra i seguaci di Hamilton, il formalismo di Gibbs alla fine ha avuto la meglio; nel 1900 incominciarono ad apparire libri di fisica e di ingegneria che lo adottavano. Gibbs ebbe anche un ruolo importante nel riattualizzare il calcolo vettoriale di Hermann Grassmann.

ricavate nel Paragrafo 3.2, e quelle per una curva nello spazio con velocità arbitraria nel Paragrafo 3.3.

3.1 Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Ricordiamo la nozione di prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Innanzi tutto, conveniamo di adottare le notazioni

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \qquad \mathbf{j} = (0,1,0), \qquad \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ possiamo scrivere o $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ oppure $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.

Definizione 3.1.1. *Siano* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *due vettori in* $\mathbb{R}^3$*. Allora il* **prodotto vettoriale** *di* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *è dato da*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

oppure, in modo più esplicito,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{k}.$$

Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ gode delle ben note proprietà seguenti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{c} &= -\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \\
(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \\
(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{c} &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{c}), \\
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \qquad (3.1) \\
\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \qquad (3.2) \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \qquad (3.3) \\
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. La (3.1) è in genere nota come **identità di Lagrange**[2]. Dati tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ definiamo il **prodotto misto** $(\mathbf{abc})$ con

$$(\mathbf{abc}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

dove $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, e così di seguito. Il prodotto misto è legato al prodotto scalare e al prodotto vettoriale dalle formule

$$(\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{3.5}$$

Si osservi infine la seguente conseguenza della (3.2):

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sin\theta \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|, \tag{3.6}$$

dove θ è l'angolo θ con $0 \leq \theta \leq \pi$ tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Come conseguenza immediata si ha che $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. L'equazione (3.6) può essere interpretata geometricamente: essa dice che $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ è uguale all'area del parallelogramma generato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

3.2 Curvatura e torsione di curve in $\mathbb{R}^3$ con velocità unitaria

Innanzi tutto definiamo la nozione di curvatura di una curva con velocità unitaria in $\mathbb{R}^n$ per n qualunque. (Le curve con velocità arbitraria verranno trattate nel Paragrafo 3.3)

Definizione 3.2.1. *Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva con velocità unitaria. Poniamo*

$$\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](s) = \|\boldsymbol{\beta}''(s)\|.$$

Allora la funzione $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta la **curvatura** *di $\boldsymbol{\beta}$.*

Abbrevieremo $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]$ con $\boldsymbol{\kappa}$ quando non vi sia pericolo di confusione.

Intuitivamente la curvatura misura di quanto una curva si discosta dall'essere una retta. Più precisamente, una retta in $\mathbb{R}^n$ è caratterizzata dal fatto che la sua curvatura è nulla, come risulta dal seguente lemma.

[2]

Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Nato a Torino, fu a Berlino che egli divenne un eminente matematico cui si devono importanti contributi alla meccanica, al calcolo delle variazioni e alle equazioni differenziali, oltre che alla geometria differenziale. Intorno al 1790 egli si occupò del sistema metrico e sostenne l'opportunità dell'adozione di un sistema a base decimale.

Lemma 3.2.1. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva con velocità unitaria. Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) $\boldsymbol{\kappa} \equiv 0$;

(ii) $\boldsymbol{\beta}'' \equiv 0$;

(iii) $\boldsymbol{\beta}$ *è una retta.*

Dimostrazione. È chiaro che la (i) e la (ii) sono equivalenti. Per dimostrare che lo sono anche la (ii) e la (iii) , supponiamo che $\boldsymbol{\beta}'' \equiv 0$. L'integrazione di questa n-upla di equazioni differenziali dà

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{u}s + \mathbf{v}, \tag{3.7}$$

dove $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sono vettori costanti con $\|\mathbf{u}\| = 1$. Questa è una parametrizzazione con velocità unitaria di una retta in $\mathbb{R}^n$. Reciprocamente, ogni retta in $\mathbb{R}^n$ ammette una parametrizzazione della forma (3.7), e dalla (3.7) è chiaro che $\boldsymbol{\beta}'' \equiv 0$ □

La curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ di una curva piana è legata in modo semplice alla curvatura $\boldsymbol{\kappa 2}$ definita nel Capitolo 1.

Lemma 3.2.2. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva con velocità unitaria. Allora*

$$\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}] = \big|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}]\big|.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 1.5.2 discende

$$\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}] = \|\boldsymbol{\beta}''\| = \big\|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}] J\boldsymbol{\beta}'\big\| = \big|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}]\big|\,\|\boldsymbol{\beta}'\| = \big|\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}]\big|.$$

□

Diversamente dalla curvatura con segno $\boldsymbol{\kappa 2}$, la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ è sempre non negativa.

Definizione 3.2.2. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva con velocità unitaria. Allora*

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\beta}'$$

è chiamato il **campo unitario tangente** *a* $\boldsymbol{\beta}$.

Dobbiamo ricordare una proprietà di cui godono i campi di vettori lungo curve. (La definizione di campo di vettori lungo una curva è stata introdotta nel Paragrafo 1.4)

Lemma 3.2.3. *Se* $\mathbf{F}$ *è un campo di vettori di lunghezza unitaria lungo una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *allora* $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F} = 0$.

Dimostrazione. Si ha

$$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t) = 1 \tag{3.8}$$

per ogni t. Quando deriviamo la (3.8) otteniamo $2\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}'(t) = 0$ □

Se si pone $\mathbf{F} = \mathbf{T}$ nel Lemma 3.2.3, si vede che $\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = 0$. Per definire la torsione ed i campi di vettori $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$, ci limitiamo a considerare curve in $\mathbb{R}^3$ la cui curvatura è strettamente positiva. Questo implica che $\mathbf{T}' = \boldsymbol{\beta}''$ non si annulla mai.

Definizione 3.2.3. *Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva con velocità unitaria e con $\boldsymbol{\kappa}(s) > 0$ per $c < s < d$. Il campo di vettori*

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\boldsymbol{\kappa}}$$

è chiamato il **campo di vettori normale principale** *e $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ è chiamato il* **campo di vettori binormale**. *La terna $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ è chiamata il* **campo di riferimenti di Frenet**[3] *su $\boldsymbol{\beta}$.*

Siamo ora in grado di ricavare le formule di Frenet per le curve nello spazio; esse costituiscono uno degli strumenti fondamentali per lo studio della geometria differenziale delle curve nello spazio.

Teorema 3.2.1. *Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva con velocità unitaria con $\boldsymbol{\kappa}(s) > 0$ per $c < s < d$. Allora:*

(i) $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{B}\| = 1$, *e* $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$.

(ii) *Ogni campo di vettori $\mathbf{F}$ lungo $\boldsymbol{\beta}$ si può esprimere nella forma*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}. \tag{3.9}$$

(iii) *Valgono le* **formule di Frenet***:*

$$\begin{cases} \mathbf{T}' &= & \boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= -\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{T} & +\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= & -\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{N}. \end{cases} \tag{3.10}$$

La funzione $\boldsymbol{\tau}$ è chiamata la **torsione** *della curva $\boldsymbol{\beta}$.*

[3] Jean Frédéric Frenet (1816-1900). Matematico francese. Fu professore a Tolosa e a Lione.

Dimostrazione. Per definizione $\|\mathbf{T}\| = 1$; inoltre

$$\|\mathbf{N}\| = \left\| \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{T}' \right\| = \frac{\|\boldsymbol{\beta}''\|}{|\boldsymbol{\kappa}|} = 1,$$

e per il Lemma 3.2.3 si ha $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$. Quindi, per l'identità di Lagrange (3.1) risulta

$$\|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{T} \times \mathbf{N}\|^2 = \|\mathbf{T}\|^2 \|\mathbf{N}\|^2 - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{N})^2 = \|\mathbf{T}\|^2 \|\mathbf{N}\|^2 = 1.$$

Infine, la (3.5) implica che $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0$. Questo completa la dimostrazione della (i) .

Dal momento che $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ sono mutuamente ortogonali, essi formano una base per i campi di vettori lungo $\boldsymbol{\beta}$. Quindi esistono delle funzioni λ, μ e ν tali che

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{N} + \nu \mathbf{B}. \tag{3.11}$$

Se si moltiplicano scalarmente per $\mathbf{T}$ entrambi i membri della (3.11) e si tiene conto della (i) , si ha che $\lambda = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Allo stesso modo si trova che $\mu = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ e $\nu = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}$, e quindi si ha la (ii) .

Per la (iii) osserviamo innanzi tutto che la prima delle equazioni (3.10) è vera in virtù della definizione di $\mathbf{N}$. Per dimostrare la terza equazione delle (3.10), deriviamo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$, e otteniamo $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = 0$; allora

$$\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\kappa}\, \mathbf{N} = 0.$$

Il Lemma 3.2.3 implica che $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} = 0$. Dal momento che $\mathbf{B}'$ è perpendicolare a $\mathbf{T}$ e a $\mathbf{B}$, esso deve essere un multiplo di $\mathbf{N}$. Questo significa che possiamo definire la torsione $\boldsymbol{\tau}$ di $\boldsymbol{\beta}$ tramite l'equazione

$$\mathbf{B}' = -\boldsymbol{\tau}\, \mathbf{N}.$$

Abbiamo ricavato la prima e la terza formula di Frenet. Per dimostrare la seconda, ci serviamo dell'espressione di $\mathbf{N}'$ rispetto a $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, e $\mathbf{B}$, cioè,

$$\mathbf{N}' = (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}. \tag{3.12}$$

I coefficienti che appaiono nella (3.12) sono facili da trovare. Prima di tutto, derivando $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ otteniamo

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\kappa}\, \mathbf{N} = -\boldsymbol{\kappa}.$$

Il fatto che sia $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{N} = 0$ segue dal Lemma 3.2.3. Infine,

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = -\mathbf{N} \cdot (-\boldsymbol{\tau}\, \mathbf{N}) = \boldsymbol{\tau}.$$

Quindi la (3.12) si riduce alla seconda formula di Frenet □

La prima trattazione sistematica delle curve nello spazio si trova nelle **Recherches sur les courbes à double courbure** di Clairaut[4]. Da quel momento, il termine "courbe à double courbure" divenne un termine tecnico per indicare una curva nello spazio. La teoria delle curve nello spazio non ha però avuto una sistemazione soddisfacente sino alla scoperta da parte di Frenet nel 1847 delle formule che portano il suo nome. Serret[5] trovò le formule indipendentemente nel 1851, e per questa ragione esse sono talvolta chiamate le formule di Frenet-Serret (vedi [Frenet] e [Serret1].) Nonostante la loro semplicità ed utilità, dovettero trascorrere molti anni prima che esse diventassero di uso comune presso i matematici. Di fatto però le formule di Frenet vennero ricavate per la prima volta intorno al 1831 da Senff[6] e dal suo insegnante Bartels.[7] Inutile dirlo, l'isolamento di Senff e Bartels a Dorpat, che allora faceva parte della Russia, impedì che i loro risultati venissero conosciuti e diffusi. (Si veda [Reich] per ulteriori notizie in proposito.)

C'è una versione delle formule di Frenet (3.10) per una retta parametrizzata come una curva con velocità unitaria $\boldsymbol{\beta}$. In questo caso $\mathbf{T}$ è un campo di vettori costante, e la curvatura di $\boldsymbol{\beta}$ si annulla. Prendiamo come $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ due campi arbitrari di vettori costanti lungo $\boldsymbol{\beta}$, e poniamo per definizione uguale a zero la torsione di $\boldsymbol{\beta}$. Allora le formule (3.10) continuano a valere. (Si veda l'esercizio 3 per i dettagli.)

Il seguente lemma mostra che la torsione misura di quanto una curva si discosta dal giacere in un piano.

Lemma 3.2.4. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria con* $\boldsymbol{\kappa}(s) > 0$ *per* $c < s < d$. *Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

---

[4]

Alexis Claude Clairaut (1713-1765). Matematico ed astronomo francese, che all'età di 18 anni venne eletto membro dell'Accademia Francese delle Scienze per il suo lavoro sulla teoria delle curve. I suoi calcoli precisi permisero una predizione quasi perfetta del passaggio della cometa di Halley nel 1759.

[5]

Joseph Alfred Serret (1819-1885). Matematico francese. Serret insieme con altri matematici di Parigi contribuì moltissimo allo sviluppo del calcolo differenziale nel periodo 1840-1865. Serret si occupò anche di teoria dei numeri e di meccanica. Un altro Serret (Paul Joseph (1827-1898)) scrisse anche lui un libro **Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure** dedicato alle curve nello spazio.

[6]Karl Eduard Senff (1810-1849). Professore tedesco all'Università di Dorpat (oggi Tartu) in Estonia.

[7]Johann Martin Bartels (1769-1836). Professore tedesco all'Università di Dorpat (oggi Tartu) in Estonia. Bartels fu il primo insegnante di Gauss (a Brunswick); egli rimase in contatto con Gauss per molti anni.

(i) $\boldsymbol{\beta}$ *è una curva piana*;

(ii) $\boldsymbol{\tau} \equiv 0$.

Quando la (i) *e la* (ii) *si verificano,*

$$\mathbf{N} = \pm J\mathbf{T}, \tag{3.13}$$

ed il campo binormale $\mathbf{B}$ *è perpendicolare al piano contenente* $\boldsymbol{\beta}$.

Dimostrazione. Un piano $\boldsymbol{\Pi}$ in $\mathbb{R}^3$ può essere descritto come l'insieme di tutte le rette perpendicolari ad una data retta $\boldsymbol{L}$. Se $\boldsymbol{\Pi}$ è un piano per $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{q} \neq 0$ è un vettore perpendicolare a $\boldsymbol{\Pi}$, allora la curva $\boldsymbol{\beta}$ giace in $\boldsymbol{\Pi}$ se e solo se

$$(\boldsymbol{\beta}(s) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} \equiv 0. \tag{3.14}$$

Derivando la (3.14) si ottiene

$$\boldsymbol{\beta}'(s) \cdot \mathbf{q} \equiv \boldsymbol{\beta}''(s) \cdot \mathbf{q} \equiv 0.$$

Quindi sia $\mathbf{T}$ che $\mathbf{N}$ sono perpendicolari a $\mathbf{q}$. Dal momento che $\mathbf{B}$ è anche perpendicolare a $\mathbf{T}$ e a $\mathbf{N}$, si ha $\mathbf{B}(s) = \pm\mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ per ogni s. Quindi $\mathbf{B}' \equiv 0$, e dalla definizione di torsione segue che $\boldsymbol{\tau} \equiv 0$.

Reciprocamente, supponiamo che $\boldsymbol{\tau} \equiv 0$; allora la (3.10) implica che $\mathbf{B}' \equiv -\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} \equiv 0$. Quindi $s \longmapsto \mathbf{B}(s)$ è una curva costante; esiste cioè un vettore unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{B} \equiv \mathbf{u}$. Scegliamo t_0 con $c < t_0 < d$ e consideriamo la funzione a valori reali $f\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(s) = \big(\boldsymbol{\beta}(s) - \boldsymbol{\beta}(t_0)\big) \cdot \mathbf{u}.$$

Allora $f(t_0) = 0$ e $f'(s) \equiv \boldsymbol{\beta}'(s) \cdot \mathbf{u} \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \equiv 0$, per cui f è identicamente nulla. Pertanto $\big(\boldsymbol{\beta}(s) - \boldsymbol{\beta}(t_0)\big) \cdot \mathbf{u} \equiv 0$, e di conseguenza $\boldsymbol{\beta}$ giace nel piano perpendicolare ad $\mathbf{u}$ che passa per $\boldsymbol{\beta}(t_0)$ □

Esempio: Curvatura e torsione di un'elica

L'elica (circolare) è una curva in $\mathbb{R}^3$ che ha la forma di una molla. La sua parametrizzazione usuale è

$$\mathbf{helix}[\mathbf{a},\mathbf{b}](t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t), \tag{3.15}$$

dove a è il raggio e b è l'inclinazione dell'elica. L'elica è una delle poche curve per le quali è facile trovare una parametrizzazione con velocità unitaria. Infatti, una parametrizzazione con velocità unitaria dell'elica è data da

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b\,s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Ci serviamo del Teorema 3.2.1 per calcolare $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ per $\boldsymbol{\beta}$. Per comodità supponiamo $a > 0$. Allora calcoliamo

$$\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\beta}'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), b\right),$$

e

$$\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0\right).$$

Pertanto $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$, e quindi $\boldsymbol{\beta}$ è di fatto una curva con velocità unitaria. Inoltre,

$$\boldsymbol{\kappa}(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \frac{a}{a^2+b^2},$$

e

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0\right).$$

Dalla formula $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ otteniamo

$$\mathbf{B}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -b\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\right).$$

Infine, per calcolare la torsione osserviamo innanzi tutto che

$$\mathbf{B}'(s) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), b\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0\right).$$

Quando confrontiamo le espressioni di $\mathbf{B}'(s)$ e di $\mathbf{N}(s)$ e teniamo conto della formula di Frenet $\mathbf{B}' = -\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{N}$, vediamo che

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Pertanto sia la curvatura che la torsione di un'elica sono costanti.

3.3 Curvatura e torsione di curve in $\mathbb{R}^3$ con velocità arbitraria

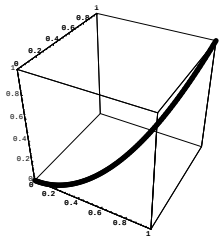
Anche se sappiamo che ogni curva regolare ha una parametrizzazione con velocità unitaria, in pratica questa è in genere molto difficile da trovare. Per esempio, consideriamo la **cubica sghemba** definita da

$$\mathbf{twicubic}(t) = (t, t^2, t^3).$$

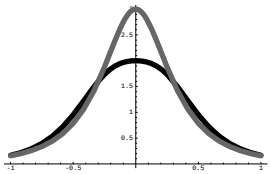
L'ascissa curvilinea di questa curva è

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}\, du.$$

L'inversa di $s(t)$, che serve per trovare la parametrizzazione unitaria, è una funzione ellittica; in altri termini, troppo complicata per poter essere utilizzata. Ecco una rappresentazione grafica di **twicubic** ed i grafici, nella stessa figura, della curvatura e della torsione di **twicubic**; faremo vedere fra poco come si calcolano queste quantità.



(a) **La cubica sghemba** $t \longmapsto (t, t^2, t^3)$



(b) **La curvatura e la torsione di** $t \longmapsto (t, t^2, t^3)$

La linea nera rappresenta la curvatura e la linea grigia rappresenta la torsione di **twicubic**.

Per il calcolo effettivo della curvatura e della torsione di una curva con velocità arbitraria abbiamo bisogno di formule che aggirino il problema di trovare una parametrizzazione con velocità unitaria. Anche se definiremo la curvatura e la torsione di una curva con velocità arbitraria in funzione della curvatura e della torsione della sua parametrizzazione con velocità unitaria, alla fine troveremo per queste quantità formule che non richiedono l'espressione esplicita di una parametrizzazione con velocità unitaria.

Definizione 3.3.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva regolare, e sia* $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una riparametrizzazione unitaria di* $\boldsymbol{\alpha}$*. Poniamo* $\boldsymbol{\alpha}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}\big(s(t)\big)$ *(dove* $s(t)$ *è proprio la funzione ascissa curvilinea). Denotiamo con* $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}$ *e con* $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ *rispettivamente la curvatura e la torsione di* $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$*. Sia poi* $\{\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{\mathbf{B}}\}$ *il campo di riferimenti di Frenet di* $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$*. Allora definiamo*

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}\big(s(t)\big), \qquad \boldsymbol{\tau}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\tau}}(s(t)\big),$$
$$\mathbf{T}(t) = \widetilde{\mathbf{T}}\big(s(t)\big), \quad \mathbf{N}(t) = \widetilde{\mathbf{N}}\big(s(t)\big), \quad \mathbf{B}(t) = \widetilde{\mathbf{B}}\big(s(t)\big).$$

In altri termini, la curvatura, la torsione ed il campo di riferimenti di Frenet di una curva con velocità arbitraria $\boldsymbol{\alpha}$ *sono gli stessi di una riparametrizzazione unitaria di* $\boldsymbol{\alpha}$*.*

Vogliamo ora estendere le formule di Frenet (3.10) alle curve con velocità arbitraria.

Teorema 3.3.1. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare con velocità $v = \|\boldsymbol{\alpha}'\| = s'$. Allora si hanno le seguenti generalizzazioni delle formule di Frenet:*

$$\text{(3.16)} \qquad \begin{cases} \mathbf{T}' &= & v\,\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= -v\,\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{T} & +v\,\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= & -v\,\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{N}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per la regola della catena abbiamo

$$\text{(3.17)} \qquad \begin{cases} \mathbf{T}'(t) &= s'(t)\widetilde{\mathbf{T}}'\big(s(t)\big) = v(t)\widetilde{\mathbf{T}}'\big(s(t)\big), \\ \mathbf{N}'(t) &= s'(t)\widetilde{\mathbf{N}}'\big(s(t)\big) = v(t)\widetilde{\mathbf{N}}'\big(s(t)\big), \\ \mathbf{B}'(t) &= s'(t)\widetilde{\mathbf{B}}'\big(s(t)\big) = v(t)\widetilde{\mathbf{B}}'\big(s(t)\big). \end{cases}$$

Pertanto, dalle formule di Frenet per $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ segue che

$$\mathbf{T}'(t) = v(t)\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}\big(s(t)\big)\widetilde{\mathbf{N}}\big(s(t)\big) = v(t)\boldsymbol{\kappa}(t)\mathbf{N}(t).$$

Le altre due formule di (3.17) si dimostrano in modo analogo □

Lemma 3.3.1. *La velocità $\boldsymbol{\alpha}'$ e l'accelerazione $\boldsymbol{\alpha}''$ di una curva regolare $\boldsymbol{\alpha}$ sono date da*

$$\text{(3.18)} \qquad \boldsymbol{\alpha}' = v\mathbf{T},$$

$$\text{(3.19)} \qquad \boldsymbol{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N},$$

dove v denota la velocità di $\boldsymbol{\alpha}$.

Dimostrazione. Poniamo $\boldsymbol{\alpha}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}\big(s(t)\big)$, dove $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ è una parametrizzazione con velocità unitaria di $\boldsymbol{\alpha}$. Per la regola della catena abbiamo

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'\big(s(t)\big)s'(t) = v(t)\widetilde{\mathbf{T}}\big(s(t)\big) = v(t)\mathbf{T}(t),$$

e questo dimostra la (3.18). Poi prendiamo la derivata della (3.18) e teniamo conto della prima equazione della (3.16) per ottenere

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\mathbf{T}' = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N}$$

□

Ora possiamo ricavare alcune formule utili per calcolare la curvatura e la torsione di una curva con velocità arbitraria. In queste formule non è richiesta la conoscenza esplicita di una riparametrizzazione unitaria.

Teorema 3.3.2. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva regolare con curvatura non nulla. Allora*

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|}, \tag{3.20}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}, \tag{3.21}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}, \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3}, \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' \cdot \boldsymbol{\alpha}'''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|^2}. \tag{3.24}$$

Dimostrazione. Ovviamente, la (3.20) è equivalente alla (3.18), e la (3.21) è una conseguenza algebrica della definizione di prodotto vettoriale. Inoltre, segue dalla (3.18) e dalla (3.19) che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' &= (v\,\mathbf{T}) \times \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \boldsymbol{\kappa}\, v^2 \mathbf{N}\right) \\ &= v\frac{dv}{dt}\mathbf{T} \times \mathbf{T} + \boldsymbol{\kappa}\, v^3 \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \boldsymbol{\kappa}\, v^3 \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Prendendo la norma dei due membri nella (3.25), otteniamo

$$\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\| = \|\boldsymbol{\kappa}\, v^3 \mathbf{B}\| = \boldsymbol{\kappa}\, v^3. \tag{3.26}$$

Allora la (3.26) implica la (3.23). Inoltre, la (3.25) e la (3.26) implicano che

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{v^3 \boldsymbol{\kappa}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''}{\|\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''\|},$$

e quindi la (3.22) è dimostrata.

Per dimostrare la (3.24) abbiamo bisogno di ottenere per $\boldsymbol{\alpha}'''$ una espressione analoga alla (3.18) e alla (3.19). Di fatto, ciò di cui abbiamo bisogno è la componente di $\boldsymbol{\alpha}'''$ in direzione di $\mathbf{B}$, perché vogliamo prendere il prodotto scalare di $\boldsymbol{\alpha}'''$ con

$\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}''$. Perciò calcoliamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}''' &= \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \boldsymbol{\kappa}\, v^2 \mathbf{N}\right)' \\ &= \boldsymbol{\kappa}\, v^2 \mathbf{N}' + \cdots \\ &= \boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{\tau}\, v^3 \mathbf{B} + \cdots . \end{aligned} \tag{3.27}$$

(Qui i punti rappresentano termini ininfluenti.) Segue dalla (3.25) e dalla (3.27) che

$$\boldsymbol{\alpha}' \times \boldsymbol{\alpha}'' \cdot \boldsymbol{\alpha}''' = \boldsymbol{\kappa}^2 \boldsymbol{\tau}\, v^6. \tag{3.28}$$

Ora la (3.24) segue dalla (3.28) e dalla (3.26). □

Esempio

Calcoliamo la curvatura e la torsione della curva **twicubic** definita a pagina 49. Invece di trovare una riparametrizzazione unitaria di **twicubic** utilizziamo il Teorema 3.3.2. I calcoli sono abbastanza semplici e possono essere fatti a mano:

$$\mathbf{twicubic}'(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad \mathbf{twicubic}''(t) = (0, 2, 6t),$$

$$\mathbf{twicubic}'(t) \times \mathbf{twicubic}''(t) = (6t^2, -6t, 2), \qquad \mathbf{twicubic}'''(t) = (0, 0, 6),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{twicubic}'(t)\| &= (1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}, \\ \|\mathbf{twicubic}'(t) \times \mathbf{twicubic}''(t)\| &= (4 + 36t^2 + 36t^4)^{1/2}. \end{aligned}$$

Quindi, la curvatura e la torsione di **twicubic** sono date da

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{(4 + 36t^2 + 36t^4)^{1/2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}(t) = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

3.4 Esercizi

1. Si dimostrino le seguenti identità:

   (a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{acd})\mathbf{b} - (\mathbf{bcd})\mathbf{a}$.

   (b) $\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{abc})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$.

   (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

   (d) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{abc})^2$.

2. Si calcolino curvatura e torsione delle seguenti curve:

   (a) $s \longmapsto \left(\dfrac{(1+s)^{3/2}}{3}, \dfrac{(1-s)^{3/2}}{3}, \dfrac{s}{\sqrt{2}} \right)$.

   (b) $t \longmapsto$
   $\big(\sqrt{1-0.09(\cos(10t))^2}\cos t, \sqrt{1-0.09(\cos(10t))^2}\sin t,\ 0.3\cos(10t)\big)$.

   (c) $t \longmapsto \big(0.5(1+\cos(10t))\cos t, 0.5(1+\cos(10t))\sin t, 0.5(1+\cos(10t))\big)$.

   (d) $t \longmapsto (a\cosh t, a\sinh t, b\,t)$.

   (e) $t \longmapsto \big(e^t t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\big)$.

   (f) $t \longmapsto a\big(t - \sin t, 1-\cos t, 4\cos(t/2)\big)$.

3. Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una retta parametrizzata da $\boldsymbol{\beta}(s) = s\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{q}$, dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{e}_1$ vettore unitario. Siano $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ tali che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Definiamo tre campi di vettori $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ponendo

   $$\mathbf{T}(s) = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{N}(s) = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{B}(s) = \mathbf{e}_3$$

   per $a < s < b$. Si dimostri che le formule di Frenet (3.10) sono valide se $\boldsymbol{\kappa}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) = 0$ per $a < s < b$.

4. Il **campo di vettori di Darboux**[8] lungo una curva con velocità unitaria $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è definito da

   $$\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{T} + \boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{B}.$$

   Dimostrare che $\mathbf{D}$ soddisfa alle seguenti condizioni:

   $$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{D} \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{N}' &= \mathbf{D} \times \mathbf{N}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{D} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

---

[8]

Jean Gaston Darboux (1842-1917). Matematico francese, che deve la sua fama soprattutto al suo contributo alla teoria delle superfici. La sua opera in quattro volumi **Leçons sur la théorie générale des surfaces** viene unanimemente considerata la bibbia della teoria delle superfici. Nel 1875 portò un grande contributo alla comprensione dell'integrale di Riemann, definendo prima le somme superiori e quelle inferiori e poi definendo integrabile una funzione se la differenza tra le somme superiori e quelle inferiori tende a zero quando la dimensione delle maglie della suddivisione considerata diventa infinitamente piccola.

Capitolo 4

Costruzione di curve nello spazio

L'analogo del teorema fondamentale delle curve piane (il Teorema 2.3.2) è il *teorema fondamentale delle curve nello spazio*. Questo teorema, che viene dimostrato nel Paragrafo 4.1, afferma che due curve con torsione e curvatura non nulla uguali differiscono solo per un movimento euclideo di $\mathbb{R}^3$.

Le curve nello spazio che giacciono su una sfera vengono caratterizzate nel Paragrafo 4.2. Le curve di inclinazione costante sono generalizzazioni delle eliche. Nel Paragrafo 4.3 le studiamo e troviamo alcune interessanti curve con inclinazione costante su una sfera. Le lossodromiche su sfere vengono definite, discusse e disegnate nel Paragrafo 4.4.

4.1 Il teorema fondamentale per le curve nello spazio

La curvatura e la torsione di una curva nello spazio individuano una curva nello spazio in modo molto simile a come la curvatura $\boldsymbol{\kappa 2}$ determina a curva piana. Prima di tutto stabiliamo l'invarianza della curvatura e della torsione rispetto ai movimenti euclidei di $\mathbb{R}^3$.

Lemma 4.1.1. *Sia* $A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un'applicazione lineare e siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. *Allora*

$$A\mathbf{a} \cdot A\mathbf{b} \times A\mathbf{c} = \det(A)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ come vettori riga. Allora

$$\begin{aligned} A\mathbf{a}\cdot A\mathbf{b}\times A\mathbf{c} &= \det\begin{pmatrix} A\mathbf{a} \\ A\mathbf{b} \\ A\mathbf{c} \end{pmatrix} = \det\left(A\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}\right) \\ &= \det(A)\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \det(A)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.1. *La derivata dell'ascissa curvilinea, la curvatura ed il valore assoluto della torsione sono invarianti per movimenti euclidei di $\mathbb{R}^3$. La torsione cambia segno per un movimento euclideo di $\mathbb{R}^3$ che inverte l'orientazione.*

Dimostrazione. Siano $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva ed $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un movimento euclideo. Denotiamo con A la parte lineare di F, di modo che per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ si abbia $F(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + F(0)$. Definiamo una curva $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo $\boldsymbol{\gamma} = F \circ \boldsymbol{\alpha}$; allora per $a < t < b$ si ha

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = A\boldsymbol{\alpha}(t) + F(0).$$

Quindi $\boldsymbol{\gamma}'(t) = A\boldsymbol{\alpha}'(t)$, $\boldsymbol{\gamma}''(t) = A\boldsymbol{\alpha}''(t)$ e $\boldsymbol{\gamma}'''(t) = A\boldsymbol{\alpha}'''(t)$. Siano s_α ed s_γ le ascisse curvilinee di $\boldsymbol{\alpha}$ e di $\boldsymbol{\gamma}$. Dal momento che A è una trasformazione ortogonale, si ha

$$s'_\gamma(t) = \big\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\big\| = \big\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\| = s'_\alpha(t).$$

Calcoliamo la curvatura di $\boldsymbol{\gamma}$, tenendo conto della (3.2), a pagina 42. Si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\gamma}](t) &= \frac{\big\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\big\|}{\big\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\big\|^3} = \frac{\big\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\times A\boldsymbol{\alpha}''(t)\big\|}{\big\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\big\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^2\big\|A\boldsymbol{\alpha}''(t)\big\|^2 - \big(A\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot A\boldsymbol{\alpha}''(t)\big)^2}}{\big\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^2\big\|\boldsymbol{\alpha}''(t)\big\|^2 - \big(\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}''(t)\big)^2}}{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^3} = \frac{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)\big\|}{\big\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\big\|^3} = \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}](t). \end{aligned}$$

Allo stesso modo, segue dal Lemma 4.1.1 che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\gamma}](t) &= \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)\cdot\boldsymbol{\gamma}''(t)\times\boldsymbol{\gamma}'''(t)}{\left\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\times\boldsymbol{\gamma}''(t)\right\|^2} = \frac{A\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot A\boldsymbol{\alpha}''(t)\times A\boldsymbol{\alpha}'''(t)}{\left\|A\boldsymbol{\alpha}'(t)\times A\boldsymbol{\alpha}''(t)\right\|^2} \\ &= \frac{\det(A)\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot\boldsymbol{\alpha}''(t)\times\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)\right\|^2} = \det(A)\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\alpha}](t) = \pm\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\alpha}](t)\end{aligned}$$

□

Nel Teorema 2.3.2, a pagina 36, abbiamo dimostrato che una curva piana è determinata, a meno di un movimento euclideo del piano, dalla sua curvatura con segno. Questo ci porta ad avanzare la congettura che una curva nello spazio sia determinata, a meno di un movimento euclideo di $\mathbb{R}^3$, dalla sua curvatura e dalla sua torsione. Vogliamo ora dimostrare che questo è vero, anche se con l'aggiunta di una condizione (che però è essenziale).

Teorema 4.1.2. (Teorema fondamentale delle curve nello spazio) *Siano $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ due curve con velocità unitaria in $\mathbb{R}^3$ definite sullo stesso intervallo (a,b). Supponiamo che $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ abbiano stessa curvatura e stessa torsione. Supponiamo inoltre che la curvatura di entrambe le curve sia non nulla. Allora esiste un movimento euclideo F di $\mathbb{R}^3$ che porta $\boldsymbol{\alpha}$ su $\boldsymbol{\gamma}$.*

Dimostrazione. Dal momento che sia $\boldsymbol{\alpha}$ che $\boldsymbol{\gamma}$ hanno curvatura diversa da zero, i loro riferimenti di Frenet $\{\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{N}_\alpha,\mathbf{B}_\alpha\}$ e $\{\mathbf{T}_\gamma,\mathbf{N}_\gamma,\mathbf{B}_\gamma\}$ sono ben definiti. Fissiamo $s_0\in(a,b)$. Esiste una traslazione di $\mathbb{R}^3$ che porta $\boldsymbol{\alpha}(s_0)$ su $\boldsymbol{\gamma}(s_0)$. Inoltre, possiamo trovare una rotazione di $\mathbb{R}^3$ che applica $\boldsymbol{\alpha}'(s_0)$ su $\boldsymbol{\gamma}'(s_0)$. C'è poi una rotazione A che porta $\mathbf{N}_\alpha(s_0)$ su $\mathbf{N}_\gamma(s_0)$. Dal momento che A è una rotazione, il Lemma 4.1.1 implica che A trasforma $\mathbf{B}_\alpha(s_0)$ in $\mathbf{B}_\gamma(s_0)$. Pertanto esiste un movimento euclideo F di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned} F\big(\boldsymbol{\alpha}(s_0)\big) &= \boldsymbol{\gamma}(s_0), & A\big(\mathbf{T}_\alpha(s_0)\big) &= \mathbf{T}_\gamma(s_0), \\ A\big(\mathbf{N}_\alpha(s_0)\big) &= \mathbf{N}_\gamma(s_0), & A\big(\mathbf{B}_\alpha(s_0)\big) &= \mathbf{B}_\gamma(s_0), \end{aligned}$$

Per dimostrare che $F\circ\boldsymbol{\alpha}$ coincide con $\boldsymbol{\gamma}$, definiamo una funzione a valori reali f ponendo

$$f(s) = \left\|(A\circ\mathbf{T}_\alpha)(s)-\mathbf{T}_\gamma(s)\right\|^2 + \left\|(A\circ\mathbf{N}_\alpha)(s)-\mathbf{N}_\gamma(s)\right\|^2 + \left\|(A\circ\mathbf{B}_\alpha)(s)-\mathbf{B}_\gamma(s)\right\|^2$$

per $a<s<b$. Un calcolo simile a quello effettuato nella (2.3), a pagina 36, mostra che la derivata di f è uguale a 0. Dal momento che $f(s_0)=0$, concludiamo che $f(s)=0$

per ogni s. Quindi $(F \circ \boldsymbol{\alpha})'(s) = (A \circ \mathbf{T}_\alpha)(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)$ per ogni s, e di conseguenza esiste $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$(F \circ \boldsymbol{\alpha})(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{q}$$

per ogni s. Di fatto $\mathbf{q} = 0$. Pertanto il movimento euclideo F applica $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\gamma}$ □

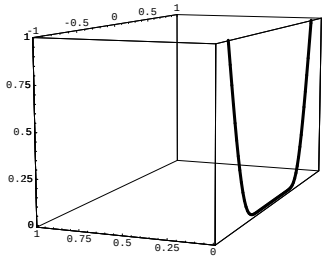
Supponiamo che $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sia una curva la cui torsione è nulla ovunque tranne che per un t_0 con $a < t_0 < b$, e che la torsione di $\boldsymbol{\gamma}$ non sia definita in t_0; allora è ragionevole dire che $\boldsymbol{\gamma}$ ha torsione nulla. Con questa definizione più generale di torsione, l'ipotesi del Teorema 4.1.2 che $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ abbiano curvatura non nulla è essenziale. Ci sono infatti curve nello spazio che hanno stessa curvatura e stessa torsione per le quali è impossibile trovare un movimento euclideo che porta l'una a sovrapporsi all'altra. Per esempio, consideriamo le curve **veryflat[1]** e **veryflat[2]** definite da

$$\mathbf{veryflat[1]}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0, \\ (t, 0, 5e^{-1/t^2}) & \text{se } t \neq 0, \end{cases}$$

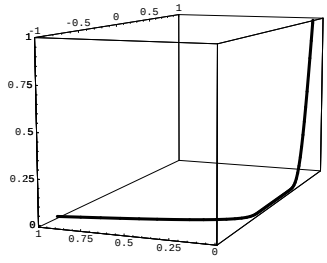
e

$$\mathbf{veryflat[2]}(t) = \begin{cases} (t, 5e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \\ (t, 0, 5e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

La funzione $t \longmapsto e^{-1/t^2}$ e tutte le sue derivate si annullano in 0, come è ben noto dall'analisi. Quindi la curvatura di **veryflat[1]** e quella di **veryflat[2]** sono nulle per $t = 0$. Inoltre, la torsione di **veryflat[1]** è identicamente nulla, essendo essa una curva piana. La torsione di **veryflat[2]** è anch'essa identicamente nulla per $t \neq 0$, e quindi è ragionevole definire uguale a zero la torsione di **veryflat[2]** quando $t = 0$. Ogni movimento euclideo che porti **veryflat[1]** su **veryflat[2]**, deve essere l'identità su una porzione di $\mathbb{R}^3$ e una rotazione su un'altra porzione di $\mathbb{R}^3$, e questo è impossibile. Pertanto **veryflat[1]** e **veryflat[2]** hanno stessa curvatura e stessa torsione, ma non esiste un movimento euclideo che porta l'una sull'altra.



(a) **veryflat[1]**(t)



(b) **veryflat[2]**(t)

4.2 Curve sferiche

A volte una curva nello spazio (come la curva di Viviani) giace su una sfera. In questo paragrafo facciamo vedere che certe relazioni tra la curvatura e la torsione di una curva nello spazio sono necessarie e sufficienti affinché una curva giaccia su una sfera.

Teorema 4.2.1. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria. Supponiamo che* $\boldsymbol{\beta}$ *stia sulla sfera* $\{\mathbf{p} \mid \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = c\}$ *di raggio* $c>0$ *con centro in* $\mathbf{q}\in\mathbb{R}^3$*. Allora:*

(i) $\boldsymbol{\kappa} \geq 1/c$;

(ii) *tra la curvatura* $\boldsymbol{\kappa}$ *e la torsione* $\boldsymbol{\tau}$ *di* $\boldsymbol{\beta}$ *c'è la relazione*

$$\boldsymbol{\tau}^2\left(c^2 - \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}^2}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}\right)^2; \tag{4.1}$$

(iii) $\boldsymbol{\kappa}'(t_0) = 0$ *implica* $\boldsymbol{\tau}(t_0) = 0$ *o* $\boldsymbol{\kappa}(t_0) = 1/c$;

(iv) $\boldsymbol{\tau}\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}''}{\boldsymbol{\kappa}^2} - \frac{2\boldsymbol{\kappa}'^2}{\boldsymbol{\kappa}^3}\right) = \frac{\boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2} + \frac{\boldsymbol{\tau}^3}{\boldsymbol{\kappa}}$;

(v) $\boldsymbol{\kappa}'(t_0) = \boldsymbol{\kappa}''(t_0) = 0$ *implica* $\boldsymbol{\tau}(t_0) = 0$;

(vi) $\boldsymbol{\kappa} \equiv 1/a$ *se e solo se* $\boldsymbol{\beta}$ *è una circonferenza di raggio* a*, necessariamente contenuta in qualche piano.*

Dimostrazione. Derivando la $\|\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q}\|^2 = c^2$ si trova $(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{T} = 0$. Derivando di nuovo si ottiene

$$1 + (\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N}) = 0. \tag{4.2}$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che

$$1 = |(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N})| \leq \boldsymbol{\kappa}\|\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q}\|\,\|\mathbf{N}\| = \boldsymbol{\kappa}\,c,$$

e quindi si ha la (i). Derivando la (4.2), si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{T}\cdot(\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N}) + (\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\big(\boldsymbol{\kappa}'\mathbf{N} + \boldsymbol{\kappa}(-\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{T} + \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{B})\big) \\ &= \boldsymbol{\kappa}'(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{N} + \boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{B} \\ &= -\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}} + \boldsymbol{\kappa}\,\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dalla (4.2) e dalla (4.3) segue che

$$\begin{aligned}(4.4)\quad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q}) &= \big(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{T}\big)\mathbf{T}+\big(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{N}\big)\mathbf{N}+\big(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{B}\big)\mathbf{B}\\ &= -\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{N}+\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

La (4.4) implica che

$$\boldsymbol{\tau}^2c^2=\boldsymbol{\tau}^2\|\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q}\|^2=\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\kappa}}\right)^2+\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}\right)^2,$$

da cui risulta la (ii). Allora la (ii) implica la (iii).

Per dimostrare la (iv), osserviamo che la (4.4) implica che

$$(4.5)\qquad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{B}=\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}.$$

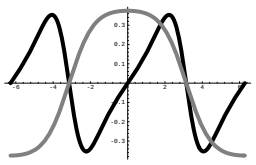
Derivando la (4.5) e tenendo conto della (4.2) si ha

$$\begin{aligned}(4.6)\qquad \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}\right)' &= \boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{B}+\boldsymbol{\tau}\big(\mathbf{T}\cdot\mathbf{B}+(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot(-\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{N})\big)\\ &= \boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{B}+\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{\boldsymbol{\kappa}}.\end{aligned}$$

Allora la (4.6) e la (4.5) implicano la (iv). Inoltre, la (iv) implica la (v).

Infine, se $\boldsymbol{\kappa}\equiv 1/a$, allora la (v) implica che $\boldsymbol{\tau}\equiv 0$. Quindi in virtù del Lemma 3.2.4 si ha che $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva piana a curvatura costante. Dal Teorema 1.5.2, a pagina 20, segue che $\boldsymbol{\alpha}$ è una circonferenza. □

È interessante verificare per la curva di Viviani (che giace sulla sfera di raggio $2a$) che $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\kappa}'$ hanno gli stessi zeri. Il grafico corrispondente è:



$\boldsymbol{\kappa}'$ e $\boldsymbol{\tau}$ per la curva di Viviani

```
Plot[Evaluate[
{kappa[viviani[1]]'[t],
tau[viviani[1]][t]}],
{t,-2Pi,2Pi},
PlotStyle->{
{GrayLevel[0]},
{GrayLevel[0.5]}}]
```

Si osservi che l'equazione (4.1) vale anche per un'elica con inclinazione b su una circonferenza di raggio $\sqrt{c^2-b^2}$, ma che un'elica con torsione non nulla non può

giacere su una sfera. Quindi non si può sperare di caratterizzare una curva sferica solo con la (4.1). Ciononostante, si ha il seguente risultato, per trovare il quale si fa uso della tecnica utilizzata per dimostrare il Teorema 1.5.2.

Teorema 4.2.2. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria con curvatura* $\boldsymbol{\kappa}$ *e torsione* $\boldsymbol{\tau}$ *soddisfacenti alla* (4.1)*. Supponiamo che* $\boldsymbol{\kappa}$*,* $\boldsymbol{\tau}$ *e* $\boldsymbol{\kappa}'$ *si annullino solo in punti isolati. Allora* $\boldsymbol{\beta}$ *giace su una sfera di raggio* c *con centro in qualche* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$*.*

Dimostrazione. Sia

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{N} - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{\kappa}^2}\right)\mathbf{B}.$$

Allora la (4.1) implica che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}' &= \mathbf{T} - \frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}\mathbf{N} + \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}}(-\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{T} + \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{B}) - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2}\right)'\mathbf{B} + \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2}\right)(\boldsymbol{\tau}\,\mathbf{N}) \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\kappa}} - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2}\right)'\right)\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Derivando la (4.1) si ha

$$\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2}\right)' = -\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^3}. \tag{4.8}$$

Dalla (4.7) e dalla (4.8) si ottiene

$$\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2}\right)\boldsymbol{\gamma}' = \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\kappa}}\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^2} - \frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^3}\right)\mathbf{B} = 0$$

o $\boldsymbol{\kappa}'\boldsymbol{\gamma}' = 0$. Quindi $\boldsymbol{\gamma}'(t) = 0$ per i valori di t per i quali $\boldsymbol{\kappa}'(t) \neq 0$. Dal momento che $\boldsymbol{\gamma}'$ è continua, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = 0$ per ogni t. Quindi esiste $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{q}$ per ogni t. In altre parole,

$$\boldsymbol{\beta}(t) - \mathbf{q} = -\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}(t)}\mathbf{N}(t) + \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'(t)}{\boldsymbol{\tau}(t)\boldsymbol{\kappa}(t)^2}\right)\mathbf{B}(t) \tag{4.9}$$

per ogni t. Allora la (4.1) implica che

$$\|\boldsymbol{\beta}(t) - \mathbf{q}\|^2 = c^2.$$

Quindi $\boldsymbol{\beta}$ si trova su una sfera di raggio c con centro in $\mathbf{q}$ □

Corollario 4.2.1. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria con curvatura* $\boldsymbol{\kappa}$ *e torsione* $\boldsymbol{\tau}$ *soddisfacenti alla* (4.1)*. Allora le sfere osculatrici a* $\boldsymbol{\beta}$ *coincidono e* $\boldsymbol{\beta}$ *giace su questa sfera.*

4.3 Curve di inclinazione costante

Dal momento che un'elica ha curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ e torsione $\boldsymbol{\tau}$ costanti, il rapporto $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\kappa}$ è costante. Esistono altre curve con questa proprietà? Al fine di dare una risposta a questa domanda, dimostriamo innanzi tutto che $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\kappa}$ è costante per una curva se e solo se è costante l'angolo tra la curva e un vettore fissato. Più precisamente:

Definizione 4.3.1. *Si dice che una curva* $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ha* **inclinazione costante** *rispetto ad un vettore unitario* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$*, se l'angolo* α *tra* $\mathbf{u}$ *e* $\boldsymbol{\gamma}$ *è costante. La condizione analitica è*

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \cos\alpha;$$

chiamiamo $\cos\alpha$ **l'inclinazione** *di* $\boldsymbol{\gamma}$*.*

Lemma 4.3.1. *Se una curva* $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ha curvatura* $\boldsymbol{\kappa}$ *non nulla e inclinazione costante* $\cos\alpha$ *rispetto a qualche vettore unitario* $\mathbf{u}$*, allora il rapporto* $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\kappa}$ *assume il valore costante* $\pm\cot\alpha$*.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità $\boldsymbol{\gamma}$ si può considerare di velocità unitaria. Derivando $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \cos\alpha$ si ottiene

$$(\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{N}) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Pertanto $\mathbf{u}$ è perpendicolare a $\mathbf{N}$, per cui possiamo scrivere

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\mathbf{T} \pm \sin\alpha\mathbf{B}.$$

Se deriviamo questa equazione, troviamo

$$0 = \big(\cos\alpha\boldsymbol{\kappa} \mp \sin\alpha\boldsymbol{\tau}\big)\mathbf{N},$$

e si ha così il lemma. □

Il reciproco del Lemma 4.3.1 è vero.

Lemma 4.3.2. *Sia* $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva per la quale il rapporto* $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\kappa}$ *è costante. Scriviamo* $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\kappa} = \cot\alpha$*. Allora* $\boldsymbol{\gamma}$ *ha inclinazione costante* $\cos\alpha$ *rispetto a qualche vettore unitario* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$*.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, prendiamo $\boldsymbol{\gamma}$ con velocità unitaria. Si ha allora

$$0 = (\boldsymbol{\kappa}\cos\alpha - \boldsymbol{\tau}\sin\alpha)\mathbf{N} = \frac{d}{ds}(\cos\alpha\mathbf{T} + \sin\alpha\mathbf{B}).$$

Ne segue che esiste un vettore unitario costante $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\mathbf{T} + \sin\alpha\mathbf{B}.$$

In particolare, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ è costante. □

Per esempio, un'elica ha inclinazione costante rispetto a $(0, 0, 1)$ (si veda l'esercizio 1). Inoltre, è facile dimostrare il seguente fatto (si veda l'esercizio 2).

Lemma 4.3.3. *Ogni curva del piano perpendicolare al vettore* $(0, 0, 1)$ *ha inclinazione costante nulla rispetto a* $(0, 0, 1)$.

Vogliamo ora dimostrare che ogni curva piana con velocità unitaria genera una curva nello spazio con inclinazione costante nello stesso modo in cui una circonferenza genera un'elica.

Lemma 4.3.4. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva piana con velocità unitaria, e poniamo* $\boldsymbol{\beta}(s) = \big(b_1(s), b_2(s)\big)$. *Definiamo un'altra curva nello spazio* $\boldsymbol{\gamma}$ *ponendo*

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(b_1(t), b_2(t), t\cos\alpha\big),$$

dove α *è un angolo costante. Allora* $\boldsymbol{\gamma}$ *ha velocità costante* $\sqrt{1 + (\cos\alpha)^2}$ *e inclinazione costante* $\cos\alpha/\sqrt{1 + (\cos\alpha)^2}$ *rispetto a* $(0, 0, 1)$.

Dimostrazione. È facile verificare che $\boldsymbol{\gamma}$ ha velocità costante $\sqrt{1 + (\cos\alpha)^2}$. Tenendo conto di questo fatto, calcoliamo il coseno dell'angolo tra $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ e $(0, 0, 1)$:

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}'(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + (\cos\alpha)^2}}.$$

□

Funziona anche la costruzione inversa: una curva nello spazio con inclinazione costante si proietta su una curva piana in modo naturale.

Lemma 4.3.5. *Sia* $\boldsymbol{\gamma}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria che ha inclinazione costante* $\cos\alpha$ *rispetto ad un vettore unitario* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. *Supponiamo che* $\cos\alpha \neq 1$. *Sia* $\boldsymbol{\beta}$ *la proiezione di* $\boldsymbol{\gamma}$ *su un piano perpendicolare a* $\mathbf{u}$, *cioè,*

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) - (\boldsymbol{\gamma}(s) \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

per $a < s < b$. *Allora* $\boldsymbol{\beta}$ *ha velocità costante* $|\sin\alpha|$; *inoltre la curvatura di* $\boldsymbol{\gamma}$ *e la curvatura con segno di* $\boldsymbol{\beta}$ *sono legate dalla relazione*

$$\boldsymbol{\kappa 2}[\boldsymbol{\beta}] = \frac{\pm\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\gamma}]}{(\sin\alpha)^2}. \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Sia v la velocità di $\boldsymbol{\beta}$, e siano $\mathbf{T}_\beta$ e $\mathbf{T}_\gamma$ i campi di vettori unitari tangenti a $\boldsymbol{\beta}$ e a $\boldsymbol{\gamma}$. Si ha

$$v\mathbf{T}_\beta = \boldsymbol{\beta}'(s) = \mathbf{T}_\gamma - (\mathbf{T}_\gamma \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{T}_\gamma - (\cos\alpha)\mathbf{u}.$$

Quindi

$$1 = \|\mathbf{T}_\gamma\|^2 = v^2 + (\cos\alpha)^2,$$

per cui $v = |\sin\alpha|$. Si ha inoltre $J\mathbf{T}_\beta = \pm\mathbf{N}_\gamma$. Quindi

$$\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\gamma}]\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{T}'_\gamma = v\mathbf{T}'_\beta = v^2\boldsymbol{\kappa}\mathbf{2}[\boldsymbol{\beta}]J\mathbf{T}_\beta = \pm(\sin\alpha)^2\boldsymbol{\kappa}\mathbf{2}[\boldsymbol{\beta}]\mathbf{N}_\gamma.$$

Dal momento che $\sin\alpha \neq 0$, otteniamo la (4.10). □

Per trovare curve di inclinazione costante diverse da un'elica o da una curva piana, cerchiamo curve di inclinazione costante che stanno su qualche sfera. Prima di tutto ricaviamo le relazioni tra la curvatura e la torsione che devono essere soddisfatte per tali curve.

Lemma 4.3.6. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria che ha inclinazione costante* $\cos\alpha$ *rispetto ad un vettore unitario* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$*, dove* $0 < \alpha < \pi/2$*. Supponiamo anche che* $\boldsymbol{\beta}$ *stia su una sfera di raggio* $c > 0$*.*

(i) *La curvatura e la torsione di* $\boldsymbol{\beta}$ *sono date da*

$$\left(\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](\boldsymbol{s})}\right)^2 = c^2 - s^2(\cot\alpha)^2 \quad e \quad \left(\frac{1}{\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\beta}](\boldsymbol{s})}\right)^2 = c^2(\tan\alpha)^2 - s^2. \tag{4.11}$$

(ii) *Sia* $\boldsymbol{\gamma}$ *la proiezione di* $\boldsymbol{\beta}$ *su un piano perpendicolare a* $\mathbf{u}$*. Allora la curvatura con segno di* $\boldsymbol{\gamma}$ *soddisfa alla condizione*

$$\left(\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}\mathbf{2}[\boldsymbol{\gamma}](\boldsymbol{s_1})}\right)^2 = (\sin\alpha)^4c^2 - (\cos\alpha)^2s_1^2, \tag{4.12}$$

dove $s_1 = (\sin\alpha)s$ *è l'ascissa curvilinea di* $\boldsymbol{\gamma}$*.*

(iii) *Sia* $c = a + 2b$ *e* $\cos\alpha = a/(a+2b)$*. Allora l'equazione naturale* (4.12) *di* $\boldsymbol{\gamma}$ *è uguale a quella dell'epicicloide* $t \longmapsto \mathbf{epicycloid}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](t)$ *definita da*

$$\begin{aligned}\mathbf{epicycloid}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](t) \quad = \quad & \left((a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{(a+b)t}{b}\right),\right. \\ & \left.(a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{(a+b)t}{b}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dimostrazione. Dal momento che $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\kappa}\cot\alpha$, dalla (4.1) otteniamo

$$\left(\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2}\right)^2 = \boldsymbol{\tau}^2\left(c^2 - \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}^2}\right) = (\boldsymbol{\kappa}^2c^2 - 1)(\cot\alpha)^2,$$

o

$$\frac{\boldsymbol{\kappa}'}{\boldsymbol{\kappa}^2\sqrt{\boldsymbol{\kappa}^2c^2 - 1}} = \pm\cot\alpha. \tag{4.14}$$

Integrando la (4.14), troviamo

$$\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}}\sqrt{\boldsymbol{\kappa}^2c^2 - 1} = \pm s\cot\alpha. \tag{4.15}$$

Risolvendo la (4.15) rispetto a $\boldsymbol{\kappa}$, otteniamo la (4.11), e quindi abbiamo dimostrato la (i). Allora la (ii) risulta dalla (4.10) e dalla (i).

Per la (iii) innanzi tutto calcoliamo

$$(\sin\alpha)^4 = \left(1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4}.$$

Quindi la (4.12) diviene

$$\left(\frac{1}{\boldsymbol{\kappa 2[\gamma](s_1)}}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{a^2s_1^2}{(a+2b)^2}. \tag{4.16}$$

Allora la (4.16) non è altro che la (4.13) con s_1 al posto di s □

Il Lemma 4.3.6 suggerisce la definizione di un nuovo tipo di curva nello spazio.

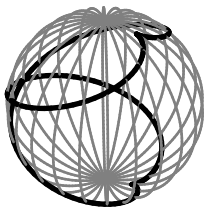
Definizione 4.3.2. *Poniamo* $\mathbf{epicycloid}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](t) = \big(a_1(t), a_2(t)\big)$. *Allora* **l'elica sferica** *di parametri a e b è definita da*

$$\mathbf{sphericalhelix}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](t) = \left(a_1(t), a_2(t), 2\sqrt{a\,b + b^2}\cos\left(\frac{a\,t}{2b}\right)\right).$$

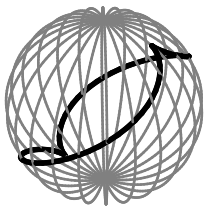
Dal Lemma 4.3.6 si ha immediatamente

Lemma 4.3.7. *La curva nello spazio* $\mathbf{sphericalhelix}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *ha inclinazione costante rispetto a* $(0, 0, 1)$ *e giace su una sfera di raggio* $a + 2b$ *e centro nell'origine.*

Per esempio, sulla sfera unitaria $S^2(1)$ le curve di inclinazione costante che si proiettano su una cardioide e su una nefroide sono $\mathbf{sphericalhelix}[\mathbf{1/3, 1/3}]$ e $\mathbf{sphericalhelix}[\mathbf{1/2, 1/4}]$.



(a) **Cardioide sferica**



(b) **Nefroide sferica**

4.4 Lossodromiche sferiche

Un **meridiano** di una sfera è una circonferenza massima che passa per i poli nord e sud. Un **parallelo** di una sfera è una circonferenza parallela all'equatore. Più in generale:

Definizione 4.4.1. *Una* **lossodromica sferica** *o* **linea isogonale sferica** *è una curva su una sfera che ne taglia ogni meridiano sotto un angolo costante, che chiamiamo il* **passo** *della lossodromica.*

Una lossodromica sferica di passo 0.2

Una lossodromica sferica ha i poli nord e sud come punti asintotici. Nei primi anni di navigazione transoceanica, molti navigatori credevano che una lossodromica coincidesse con una circonferenza massima, per il fatto che una nave guidata dalla bussola segue proprio un arco di lossodromica. Ma Nuñez[1] osservò che le due curve sono diverse.

Per spiegare come si può ottenere una parametrizzazione di una lossodromica, dobbiamo introdurre una importante applicazione $\boldsymbol{\Upsilon}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2(1)$ chiamata
l'applicazione stereografica. Essa è definita da

$$\boldsymbol{\Upsilon}(p_1, p_2) = \frac{(2p_1, 2p_2, p_1^2 + p_2^2 - 1)}{p_1^2 + p_2^2 + 1}.$$

Si vede facilmente che $\boldsymbol{\Upsilon}$ è differenziabile, e che $\|\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{p})\| = 1$.

[1] Pedro Nuñez Salaciense (1502-1578). Il primo grande matematico portoghese. Fu professore a Coimbra.

Lemma 4.4.1. *L'applicazione stereografica* Υ *gode delle seguenti proprietà*:

(i) Υ *traforma circonferenze del piano in circonferenze sulla sfera.*

(ii) Υ *trasforma rette del piano in circonferenze sulla sfera che passano per il polo nord* $(0, 0, 1)$.

(iii) Υ *trasforma rette per l'origine in meridiani.*

(iv) Υ *conserva gli angoli.*

Dimostrazione. Ogni circonferenza o retta del piano è data implicitamente da una equazione della forma

$$a(x^2 + y^2) + b\,x + c\,y + d = 0. \tag{4.17}$$

Poniamo $W = 1 + x^2 + y^2$, $X = 2x/W$, $Y = 2y/W$ e $Z = 1 - 2/W$. Tramite Υ l'equazione (4.17) diviene

$$b\,X + c\,Y + (a - d)Z + (d + a) = 0, \tag{4.18}$$

che è l'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$. Questo piano interseca la sfera $S^2(1)$ lungo una circonferenza massima, e quindi resta dimostrata la (i).

Nel caso di una retta del piano, si ha $a = 0$ nella (4.17). Dalla (4.18) si vede che $(0, 0, 1)$ si trova sulla curva immagine, e questo prova la (ii). Se inoltre la retta passa per l'origine, deve essere $a = d = 0$ nella (4.17). Allora dalla (4.18) si vede che il piano contenente la curva immagine contiene anche l'asse Z. Quindi la curva è un meridiano, e si ha la (iii).

La (iv) sarà dimostrata nel Lemma 8.2.6, a pagina 138. □

Lemma 4.4.2. *Una lossodromica è l'immagine tramite l'applicazione stereografica di una spirale logaritmica.*

Dimostrazione. Si può dimostrare ([CaGr], Lemma 2.1, a pagina 43) che una spirale logaritmica incontra ogni linea radiale uscente dall'origine secondo lo stesso angolo. L'applicazione stereografica Υ trasforma ognuna di queste rette in un meridiano della sfera. Dal momento che Υ conserva gli angoli, essa deve trasformare ogni spirale logaritmica in una lossodromica. □

4.5 Esercizi

1. Si dimostri che un'elica ha inclinazione costante rispetto a $(0, 0, 1)$.

2. Si dimostri che ogni curva piana ha inclinazione costante nulla rispetto a $(0, 0, 1)$.

3. Sia $\boldsymbol{\theta}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile arbitraria e definiamo $\boldsymbol{\alpha}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tramite

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \left(\int \cos \boldsymbol{\theta}(t) dt, \int \sin \boldsymbol{\theta}(t) dt, b\, t \right),$$

   dove b è una costante. Si calcolino curvatura e torsione di $\boldsymbol{\alpha}$ e si dimostri che $\boldsymbol{\alpha}$ ha inclinazione costante.

Capitolo 5

Calcolo Differenziale nello Spazio Euclideo

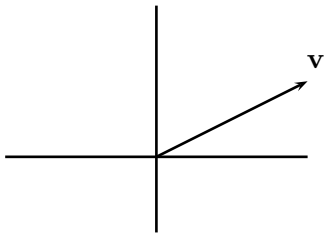
Per studiare la geometria differenziale delle curve e delle superfici non sono sufficienti le operazioni algebriche di $\mathbb{R}^n$. Occorre sapere in che modo si derivano vari oggetti geometrici, e anche le relazioni tra le operazioni di derivazione e le operazioni algebriche in $\mathbb{R}^n$. In questo capitolo vengono stabilite le basi teoriche del calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$ che verrà utilizzato nei capitoli successivi.

Nel Paragrafo 5.1 viene introdotta la nozione di vettore tangente a $\mathbb{R}^n$. L'interpretazione di un vettore tangente a $\mathbb{R}^n$ come una derivata direzionale viene descritta nel Paragrafo 5.2. Le applicazioni tangenti corrispondenti alle applicazioni differenziabili tra gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ vengono trattate nel Paragrafo 5.3.

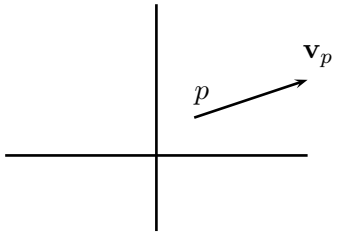
È importante capire in che modo i vettori tangenti variano da punto a punto, perciò nel Paragrafo 5.4 incominciamo a studiare i campi di vettori su $\mathbb{R}^n$. Le derivate di campi di vettori su $\mathbb{R}^n$ rispetto a vettori tangenti vengono introdotte nel Paragrafo 5.5. Nel Paragrafo 5.5 dimostriamo anche alcune proprietà elementari di un'applicazione lineare sui campi di vettori indotta da un diffeomorfismo. Le nozioni classiche di gradiente, di divergenza e di laplaciano vengono definite nei Paragrafi 5.4 e 5.5. Infine, nel Paragrafo 5.6 torniamo al nostro studio delle curve, utilizzando i campi di vettori tangenti per dare una diversa prospettiva.

5.1 Vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$

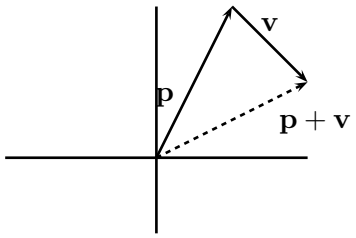
Nel Paragrafo 1.1 abbiamo definito la nozione di vettore $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$. Sinora abbiamo considerato vettori in $\mathbb{R}^n$ come punti di $\mathbb{R}^n$; ma un vettore $\mathbf{v}$ può anche essere visto come una freccia con punto iniziale nell'origine e punto finale nel punto $\mathbf{v}$. Da questo punto di vista dovremmo anche studiare le frecce che partono da punti diversi dall'origine.



Definizione 5.1.1. *Un* **vettore tangente** $\mathbf{v_p}$ *allo spazio euclideo* $\mathbb{R}^n$ *è una coppia di punti* $\mathbf{v}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{v}$ *è detto la* **parte vettoriale** *mentre* $\mathbf{p}$ *è chiamato il* **punto di applicazione** *di* $\mathbf{v_p}$.



Osserviamo che $\mathbf{v_p}$ può essere visto come la freccia da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p} + \mathbf{v}$. Inoltre, due vettori tangenti $\mathbf{v_p}$ e $\mathbf{w_q}$ sono uguali se e solo se le loro parti vettoriali e i loro punti di applicazione coincidono: $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ e $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.



Definizione 5.1.2. *Sia* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. *Lo* **spazio tangente** *a* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbf{p}$ *è l'insieme*

$$\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} = \{\, \mathbf{v_p} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,\}.$$

Lo spazio tangente $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ è una copia fedele dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$; in realtà, esiste un isomorfismo canonico tra $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ e $\mathbb{R}^n$ dato da $\mathbf{v_p} \longmapsto \mathbf{v}$. Questo isomorfismo canonico ci permette di dotare $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ di una struttura di spazio vettoriale; possiamo cioè sommare

elementi di $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ e moltiplicarli per scalari:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_p} + \mathbf{w_p} &= (\mathbf{v} + \mathbf{w})_{\mathbf{p}}, \\ \lambda \mathbf{v_p} &= (\lambda \mathbf{v})_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{R}^n$ ha uno spazio tangente $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ in ognuno dei suoi punti, e tale spazio tangente è fatto a immagine e somiglianza dello stesso $\mathbb{R}^n$. Per questa ragione, è possibile trasferire il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ su ciascuno dei suoi spazi tangenti. Basta porre

$$\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

dove $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$.

Ovviamente vale una disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per vettori tangenti, cioè,

$$|\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}| \leq \|\mathbf{v_p}\| \, \|\mathbf{w_p}\|$$

per tutti i $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$. L'angolo tra due vettori tangenti è definito esattamente come quello tra ordinari vettori.

Infine, consideriamo vettori tangenti a $\mathbb{R}^2$ e a $\mathbb{R}^3$. La struttura complessa di $\mathbb{R}^2$, che abbiamo definito a pagina 7, può essere estesa in modo naturale ai vettori tangenti ponendo

$$J\mathbf{v_p} = (J\mathbf{v})_{\mathbf{p}}$$

per ogni vettore tangente $\mathbf{v_p}$ a $\mathbb{R}^2$. Si vede facilmente che $J\mathbf{v_p}$ è anch'esso un vettore tangente a $\mathbb{R}^2$ e che $J^2 = -I$ su vettori tangenti. Inoltre, $J\mathbf{v_p} \cdot J\mathbf{w_p} = \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}$ per $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathbb{R}^2_{\mathbf{p}}$.

In modo analogo, in $\mathbb{R}^3$ estendiamo il prodotto vettoriale ai vettori tangenti ponendo

$$\mathbf{v_p} \times \mathbf{w_p} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w})_{\mathbf{p}},$$

per $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathbb{R}^3_{\mathbf{p}}$. Valgono le usuali identità per il prodotto vettoriale tra vettori tangenti. Per esempio,

$$\|\mathbf{v_p} \times \mathbf{w_p}\|^2 = \|\mathbf{v_p}\|^2 \|\mathbf{w_p}\|^2 - (\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p})^2.$$

5.2 Vettori tangenti come derivate direzionali

In tutto questo paragrafo, e nel seguito, con l'espressione "f è una funzione differenziabile" intenderemo dire che f ha derivate continue di tutti gli ordini. Spesso è importante sapere in qual modo una funzione a valori reali $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ varia nelle

diverse direzioni. Per esempio, la derivata parziale $\partial f/\partial u_i$ misura quanto f varia nella direzione u_i, per $i = 1, \ldots, n$. È però possibile misurare la variazione di f anche in altre direzioni. Per misurare la variazione di f in $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ lungo la retta $t \longmapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$, abbiamo bisogno del vettore tangente $\mathbf{v_p}$. Quindi faremo operare $\mathbf{v_p}$ sulle funzioni.

Definizione 5.2.1. *Sia $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, e sia $\mathbf{v_p}$ un vettore tangente a $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Poniamo*

$$\mathbf{v_p}[f] = \frac{d}{dt}\Big(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\Big)\Big|_{t=0}. \tag{5.1}$$

Nel calcolo differenziale elementare la Definizione 5.1 va sotto il nome di **derivata direzionale in direzione di $\mathbf{v_p}$**, ma noi preferiamo considerare la (5.1) come definente il modo in cui un vettore tangente può operare sulle funzioni. Un modo più esplicito di scrivere la (5.1) è

$$\mathbf{v_p}[f] = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}.$$

Per esempio, sia $f(x, y) = \sin(x\, y)$, $\mathbf{p} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, 3)$. Allora

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = f\big((1,2)+t(2,3)\big) = f(2t+1, 3t+2) = \sin\big((2t+1)(3t+2)\big) = \sin\big(6t^2+7t+2\big),$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\Big(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\Big) = (12t + 7)\cos\big(6t^2 + 7t + 2\big).$$

Pertanto

$$\mathbf{v_p}[f] = (2t + 7)\cos\big(t^2 + 7t + 2\big)\Big|_{t=0} = 7\cos(2).$$

Anche se è possibile calcolare $\mathbf{v_p}[f]$ direttamente dalla definizione, di solito è più comodo utilizzare una formula generale, che adesso ricaviamo.

Lemma 5.2.1. *Sia $\mathbf{v_p} = (v_1, \ldots, v_n)_\mathbf{p}$ un vettore tangente a $\mathbb{R}^n$, e sia $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora*

$$\mathbf{v_p}[f] = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial u_j}(\mathbf{p}). \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, e quindi $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n)$. La regola della catena implica che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\big) &= \frac{d}{dt}\big(f(p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n)\frac{d(p_j + tv_j)}{dt} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_1 + tv_1, \ldots, p_n + tv_n)v_j.
\end{aligned}$$

Se poniamo $t = 0$ in questa equazione, otteniamo la (5.2). □

Elenchiamo alcune delle proprietà algebriche della derivata direzionale.

Lemma 5.2.2. *Siano $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili, $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}$ vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ed a, b numeri reali. Allora*

$$(a\mathbf{v_p} + b\mathbf{w_p})[f] = a\mathbf{v_p}[f] + b\mathbf{w_p}[f], \tag{5.3}$$

$$\mathbf{v_p}[af + bg] = a\mathbf{v_p}[f] + b\mathbf{v_p}[g], \tag{5.4}$$

$$\mathbf{v_p}[f\,g] = f(\mathbf{p})\mathbf{v_p}[g] + g(\mathbf{p})\mathbf{v_p}[f]. \tag{5.5}$$

Dimostrazione. Per esempio, dimostriamo la (5.5):

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_p}[f\,g] &= \frac{d}{dt}\big((f\,g)(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\big)\Big|_{t=0} \\
&= \left\{f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\frac{d}{dt}\big(g(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\big) + g(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\frac{d}{dt}\big(f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\big)\right\}\Big|_{t=0} \\
&= f(\mathbf{p})\mathbf{v_p}[g] + g(\mathbf{p})\mathbf{v_p}[f]
\end{aligned}$$

□

Anche per i vettori tangenti vale una regola della catena:

Lemma 5.2.3. (La regola della catena) *Siano $g_1, \ldots, g_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili e sia $\mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ dove $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = F(g_1, \ldots, g_k)$. Allora*

$$\mathbf{v_p}[f] = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial u_j}\big(g_1(\mathbf{p}), \ldots, g_k(\mathbf{p})\big)\,\mathbf{v_p}[g_j].$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v_p} = (v_1, \ldots, v_n)_{\mathbf{p}}$. Ci serviamo dell'usuale regola della catena per calcolare

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_p}[f] &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{p}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} v_i \frac{\partial F}{\partial u_j}\big(g_1(\mathbf{p}), \ldots, g_k(\mathbf{p})\big)\frac{\partial g_j}{\partial u_i}(\mathbf{p}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial u_j}\big(g_1(\mathbf{p}), \ldots, g_k(\mathbf{p})\big)\,\mathbf{v_p}[g_j].
\end{aligned}$$

□

5.3 Applicazioni tangenti

Nel seguito avremo a che fare anche con applicazioni $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ che non sono lineari. Osserviamo intanto che per una arbitraria applicazione $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ possiamo scrivere

$$F(\mathbf{p}) = \big(f_1(\mathbf{p}), \dots, f_m(\mathbf{p})\big), \tag{5.6}$$

dove $f_j\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, m$. Ricordiamo che un sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $\mathbb{R}^n$ è un **aperto** se, per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che l'intorno sferico $\{\, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \varepsilon \,\}$ è interamente contenuto in $\mathcal{U}$. Si osservi che la (5.6) vale anche per una funzione $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. È conveniente far uso della notazione

$$F = (f_1, \dots, f_m)$$

come forma abbreviata per la (5.6).

Definizione 5.3.1. *Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ si dice* **differenziabile** *se ogni f_j è differenziabile (cioè se le derivate parziali di tutti gli ordini di ogni f_j esistono e sono continue). Più in generale, se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, si dice che $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile se esiste un aperto $\mathcal{U}$ con $A \subset \mathcal{U}$ ed un'applicazione differenziabile $\widetilde{F}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tali che la restrizione di $\widetilde{F}$ ad A sia F. Un* **diffeomorfismo** *F tra sottoinsiemi aperti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione differenziabile $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ che ha un'inversa differenziabile $F^{-1}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$.*

Si dimostra facilmente il seguente

Lemma 5.3.1. *Supponiamo che*

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^\ell \xrightarrow{F} \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^n$$

siano applicazioni differenziabili. Allora la composizione $G \circ F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile.

Ad ogni applicazione differenziabile $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ resta associata in modo naturale un'applicazione lineare tra spazi tangenti. Per vederlo, osserviamo innanzi tutto che se $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile allora lo è anche $t \longmapsto F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ per $\mathbf{p} + t\mathbf{v} \in \mathcal{U}$, in quanto composizione di funzioni differenziabili. Quindi la seguente definizione ha senso.

Definizione 5.3.2. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Per ogni vettore tangente $\mathbf{v_p}$ ad $\mathbb{R}^n$ sia $F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p})$ il vettore velocità iniziale della curva $t \longmapsto F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$, cioè*

$$F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0).$$

Allora $F_{*\mathbf{p}}\colon \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathbb{R}^m_{F(\mathbf{p})}$ è chiamata **l'applicazione tangente** *di F in $\mathbf{p}$. Talvolta si abbrevia $F_{*\mathbf{p}}$ con F_*.*

Per esempio, siano $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ ed $F(x, y, z) = (y\,z, z\,x, x\,y)$. Allora

$$F(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = \big(6 - 2t, 3 + 2t - t^2, 2(1 + t)\big),$$

e quindi

$$F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = \left(\frac{d}{dt}\big(6 - 2t, 3 + 2t - t^2, 2(1 + t)\big)\Big|_{t=0}\right)_{F(\mathbf{p})} = (-2, 2, 2)_{(6,3,2)}.$$

Il lemma seguente costituisce un metodo utile per calcolare le applicazioni tangenti.

Lemma 5.3.2. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e poniamo $F = (f_1, \ldots, f_m)$. Se $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{v_p}$ è un vettore tangente a $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{p}$, allora*

$$F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = \big(\mathbf{v_p}[f_1], \ldots, \mathbf{v_p}[f_m]\big)_{F(\mathbf{p})}. \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Sostituiamo $\mathbf{p}$ con $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ nella (5.6) e deriviamo rispetto a t:

$$F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})' = \big(f_1(\mathbf{p} + t\mathbf{v})', \ldots, f_m(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'\big). \tag{5.8}$$

Se valutiamo entrambi i membri della (5.8) in $t = 0$ e ci serviamo della (5.1), otteniamo la (5.7). □

Corollario 5.3.1. *Se $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è una applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, allora in ogni punto $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ l'applicazione tangente*

$$F_{*\mathbf{p}}\colon \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathbb{R}^m_{F(\mathbf{p})}$$

è una trasformazione lineare.

Dimostrazione. Che $F_{*\mathbf{p}}$ sia lineare segue facilmente dalla (5.7) e dalla (5.3). □

L'applicazione tangente di una applicazione differenziabile F può essere vista come la migliore approssimazione lineare di F in un dato punto $\mathbf{p}$. Abbiamo già visto esempi di applicazioni tangenti; per esempio, la velocità di una curva è, anche se in forma un po' mascherata, un'applicazione tangente. Per spiegare questo fatto, sia $1_{\mathbf{p}}$ il vettore tangente a $\mathbb{R}$ la cui parte vettoriale è 1 e il cui punto di applicazione è $\mathbf{p}$. Si noti che dalla definizione segue che

$$1_{\mathbf{p}}[f] = \frac{d}{dt}\Big(f(\mathbf{p}+t1)\Big)\Big|_{t=0} = f'(\mathbf{p}) \tag{5.9}$$

per ogni funzione differenziabile $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 5.3.3. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Allora per $\mathbf{p} \in (a,b)$ abbiamo*

$$\boldsymbol{\alpha}_*(1_{\mathbf{p}}) = \boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{p}).$$

Dimostrazione. Se poniamo $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$, allora dalla (5.9) e dalla (5.7) otteniamo

$$\boldsymbol{\alpha}_*(1_{\mathbf{p}}) = \big(1_{\mathbf{p}}[a_1], \ldots, 1_{\mathbf{p}}[a_n]\big) = \big(a_1'(\mathbf{p}), \ldots, a_n'(\mathbf{p})\big) = \boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{p})$$

□

Se $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ è una curva differenziabile, e se $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione differenziabile, allora $F \circ \boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è una curva differenziabile per il Lemma 5.3.1. È quindi abbastanza ragionevole aspettarsi che F_* possa trasformare la velocità di $\boldsymbol{\alpha}$ nella velocità di $F \circ \boldsymbol{\alpha}$. Dimostriamo che è proprio questo che si verifica.

Lemma 5.3.4. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{U}$ una curva. Allora*

$$(F \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) = F_*\big(\boldsymbol{\alpha}'(t)\big)$$

per $a < t < b$.

Dimostrazione. Poniamo $F = (f_1, \cdots, f_m)$ e $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$. I Lemmi 5.2.1, 5.3.2 e la regola della catena implicano che

$$\begin{aligned}
F_*\big(\boldsymbol{\alpha}'(t)\big) &= \big(\boldsymbol{\alpha}'(t)[f_1], \ldots, \boldsymbol{\alpha}'(t)[f_m]\big) \\
&= \left(\sum_{j=1}^n a_j'(t)\frac{\partial f_1}{\partial u_j}, \ldots, \sum_{j=1}^n a_j'(t)\frac{\partial f_m}{\partial u_j}\right)_{\alpha(t)} \\
&= \big((f_1 \circ \boldsymbol{\alpha})'(t), \ldots, (f_m \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)\big) \\
&= \big(F \circ \boldsymbol{\alpha}\big)'(t).
\end{aligned}$$

□

Corollario 5.3.2. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Sia $\mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{U}$ una curva tale che $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_p}$. Allora*

$$F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = (F \circ \boldsymbol{\alpha})'(0).$$

Inizialmente noi abbiamo definito $F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p})$ come vettore velocità in 0 dell'immagine tramite F della retta $t \longrightarrow \mathbf{p} + t\mathbf{v}$. Il Corollario 5.3.2 dice che $F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p})$ rappresenta il vettore velocità in 0 dell'immagine tramite F di ogni curva $\boldsymbol{\alpha}$ tale che $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_p}$.

Corollario 5.3.3. *Siano*

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^\ell \xrightarrow{F} \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^n$$

due applicazioni differenziabili. Allora

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v_p}$ un vettore tangente a $\mathbb{R}^\ell$ in $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^\ell$. Allora $t \longmapsto F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ è una curva in $\mathbb{R}^m$ tale che $F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0)$. Quindi

$$\begin{aligned}(G \circ F)_*(\mathbf{v_p}) = \big((G \circ F)(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\big)'(0) &= G\big(F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})\big)'(0) \\ &= G_*\big(F(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0)\big) = G_*\big(F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p})\big)\end{aligned}$$

□

Ricordiamo che se $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare, allora la matrice associata a L è la matrice $A = (a_{ij})$ $m \times n$ tale che

$$L\mathbf{v} = A\mathbf{v}$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, cioè, $\mathbf{e}_i$ è la n-upla con 1 all'i^{esimo} posto e zero altrove; allo stesso modo sia $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^m$. Allora

$$L\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathbf{e}'_j$$

per $i = 1, \ldots, n$.

Se $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, allora per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ l'applicazione tangente $F_{*\mathbf{p}}$ è un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ e $\mathbb{R}^m_{F(\mathbf{p})}$. Essendo $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ canonicamente isomorfo ad $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m_{F(\mathbf{p})}$

canonicamente isomorfo ad $\mathbb{R}^m$, possiamo associare ad $F_{*\mathbf{p}}$ una matrice B $m \times n$. Questa matrice (chiamata la matrice jacobiana di F in $\mathbf{p}$) ha la proprietà che

$$F_{*\mathbf{p}}\mathbf{v}_\mathbf{p} = B\mathbf{v}_\mathbf{p}$$

per ogni $\mathbf{v}_\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_\mathbf{p}$. La definizione precisa è la seguente.

Definizione 5.3.3. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $F = (f_1, \ldots, f_m)$. La* **matrice jacobiana**[1] *di F è la funzione $\mathcal{J}(F)$ a valori matriciali data da*

$$\mathcal{J}(F)(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}(\mathbf{p}) & , \ldots, s & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1}(\mathbf{p}) & , \ldots, s & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$.

Ricordiamo che il **rango** di una matrice $m \times n$ A è la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A. Se questa dimensione è uguale a n, allora si dice che A ha **rango massimo**.

Lemma 5.3.5. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione differenziabile, dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni applicazione tangente $F_{*\mathbf{p}}\colon \mathbb{R}^n_\mathbf{p} \longrightarrow \mathbb{R}^m_{F(\mathbf{p})}$ è iniettiva se e solo se $\mathcal{J}(F)(\mathbf{p})$ ha rango massimo.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}_\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_\mathbf{p}$ e scriviamo $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$; poniamo anche $F = (f_1, \ldots, f_m)$. Supponiamo che si abbia $F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v}_\mathbf{p}) = 0$ e $\mathbf{v} \neq 0$. Allora il Lemma 5.3.2 implica che

$$\mathbf{v}_\mathbf{p}[f_1] = \cdots = \mathbf{v}_\mathbf{p}[f_m] = 0.$$

Quindi per il Lemma 5.2.1 abbiamo

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f_j}{\partial u_i}(\mathbf{p}) = 0$$

[1]

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Professore di matematica a Königsberg e a Berlino. Viene ricordato per i suoi contributi alla dinamica e alla teoria delle funzioni ellittiche. La sua monografia **Fundamenta novae theoriae functionum ellipticarum**, in cui la teoria delle funzioni ellittiche si fonda su quattro funzioni theta, venne pubblicata nel 1829.

per $j = 1, \ldots, m$. Ne segue che

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_i}(\mathbf{p}), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial u_i}(\mathbf{p}) \right) = 0.$$

Quindi le colonne della matrice jacobiana $\mathcal{J}(F)(\mathbf{p})$ sono linearmente dipendenti, e di conseguenza $\mathcal{J}(F)(\mathbf{p})$ non ha rango massimo.

Reciprocamente, se $\mathcal{J}(F)(\mathbf{p})$ non ha rango massimo, nella dimostrazione precedente si può percorrere il cammino inverso per concludere che $F_{*\mathbf{p}}(\mathbf{v_p}) = 0$ per qualche $\mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ non nullo. □

5.4 Campi di vettori su $\mathbb{R}^n$

Ci servirà sapere in quale modo i vettori tangenti variano da punto a punto.

Definizione 5.4.1. *Un* **campo di vettori** V *su un sottoinsieme aperto* $\mathcal{U}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *è una funzione che associa ad ogni* $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ *un vettore tangente* $V(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$. *Se* $f \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è differenziabile,* V *agisce su* f *secondo la formula*

$$V[f](\mathbf{p}) = V(\mathbf{p})[f].$$

Quando f *è differenziabile, il campo di vettori* V *si dice* **differenziabile** *se la funzione* $V[f] \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è differenziabile.*

È importante distinguere tra la i^{esima} coordinata di un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e la funzione che associa a $\mathbf{p}$ la sua i^{esima} coordinata.

Definizione 5.4.2. *Le* **funzioni coordinate naturali** *di* $\mathbb{R}^n$ *sono le funzioni* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *definite da*

$$u_i(\mathbf{p}) = p_i$$

per $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$.

Nei casi speciali di $\mathbb{R}$, di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ di solito denoteremo le funzioni coordinate naturali con t, $\{u, v\}$ e $\{x, y, z\}$ rispettivamente.

In $\mathbb{R}^n$ ci sono alcuni campi di vettori molto semplici.

Definizione 5.4.3. *Il campo di vettori* U_j *su* $\mathbb{R}^n$ *è definito da*

$$U_j(\mathbf{p}) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)_{\mathbf{p}},$$

dove 1 *occupa il* j^{esimo} *posto. Chiamiamo* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *il* **campo delle basi canoniche** *di* $\mathbb{R}^n$.

È evidente, per il Lemma 5.2.1, che $U_j[f] = \partial f/\partial u_j$ per ogni funzione differenziabile f. Per questo motivo talvolta si scrive $\partial/\partial u_j$ al posto di U_j. Si osservi che le restrizioni di $U_1, \ldots, U_n$ a un qualunque sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ sono campi di vettori su $\mathcal{U}$.

Riportiamo alcune proprietà algebriche dei campi di vettori; le dimostrazioni non presentano difficoltà.

Lemma 5.4.1. *Siano X e Y due campi di vettori su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiamo $X+Y$, aX, gX e $X \cdot Y$ ponendo*

$$(X+Y)[f] = X[f] + Y[f], \qquad (a\,X)[f] = a\,X[f],$$

$$(g\,X)[f] = g\,X[f], \qquad (X \cdot Y)(\mathbf{p}) = X(\mathbf{p}) \cdot Y(\mathbf{p}),$$

dove $f\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile e $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Allora $X+Y$, $a\,X$, $g\,X$ sono campi di vettori su $\mathcal{U}$ e $X \cdot Y\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione. Se X, Y, a e g sono differenziabili, tali sono anche i campi di vettori $X+Y$, $a\,X$, $g\,X$, nonché la funzione $X \cdot Y\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si vede facilmente che ogni campo di vettori su un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ può essere espresso in funzione degli U_j.

Lemma 5.4.2. *Se V è un campo di vettori su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, esistono funzioni $v_j\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ per $j = 1, \ldots, n$ tali che*

$$V = \sum_{j=1}^{n} v_j U_j. \tag{5.10}$$

Dimostrazione. Dal momento che $V(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, possiamo scrivere $V(\mathbf{p}) = (v_1(\mathbf{p}), \ldots, v_n(\mathbf{p}))_{\mathbf{p}}$. In questo modo le funzioni $v_j\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono ben definite. D'altra parte,

$$\begin{aligned} \big(v_1(\mathbf{p}), \ldots, v_n(\mathbf{p})\big)_{\mathbf{p}} &= v_1(\mathbf{p})(1,0,\ldots,0)_{\mathbf{p}} + \cdots + v_n(\mathbf{p})(0,\ldots,0,1)_{\mathbf{p}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j(\mathbf{p}) U_j(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Siccome questa equazione vale per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$, si ha la (5.10) □

L'equazione (5.10) fornisce un utile criterio per stabilire la differenziabilità di un campo di vettori.

Corollario 5.4.1. *Un campo di vettori V su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile se e solo se le componenti $v_1, \ldots, v_n$ di V date nella* (5.10) *sono differenziabili.*

C'è un metodo importante per costruire campi di vettori a partire da funzioni su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5.4.4. *Sia $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Il* **gradiente** *di g è il campo di vettori* $\mathbf{grad}\, g$ *dato da*

$$\mathbf{grad}\, g = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_j} U_j.$$

Lemma 5.4.3. *Il gradiente* $\mathbf{grad}\, g$ *di una funzione g è l'unico campo di vettori differenziabile su $\mathbb{R}^n$ per il quale*

$$\mathbf{grad}\, g \cdot V = V[g]$$

per ogni campo di vettori differenziabile V su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Poniamo $V = \sum_{j=1}^{n} v_j U_j$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\, g \cdot V &= \left(\sum_{j=1}^{n} U_j \frac{\partial g}{\partial u_j} \right) \cdot V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial g}{\partial u_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j U_j[g] = V[g]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, sia Z un campo di vettori tale che $Z \cdot V = V[g]$ per ogni campo di vettori V su $\mathbb{R}^n$. Possiamo scrivere

$$Z = \sum_{i=1}^{n} f_i U_i,$$

dove $f_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile per $i = 1, \ldots, n$. Allora per $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$f_j = Z \cdot U_j = U_j[g] = \frac{\partial g}{\partial u_j},$$

e quindi $Z = \mathbf{grad}\, g$. □

Per esempio, calcoliamo il gradiente della funzione $(x, y, z) \longmapsto (x\, y\, z)^3$: si trova

$$\left(3x^2y^3z^3, 3x^3y^2z^3, 3x^3y^3z^2\right)$$

Per concludere, mettiamo in evidenza alcune speciali operazioni su campi di vettori su $\mathbb{R}^2$ e su $\mathbb{R}^3$.

Lemma 5.4.4. *Per un campo di vettori Y su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ definiamo JY ponendo*

$$(JY)(\mathbf{p}) = J\big(Y(\mathbf{p})\big)$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Allora JY è un campo di vettori su $\mathcal{U}$ che è differenziabile quando Y è differenziabile.

Allo stesso modo, se Y, Z sono due campi di vettori su un sottoinsieme aperto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$, definiamo $Y \times Z$ punto per punto, cioè

$$(Y \times Z)(\mathbf{p}) = Y(\mathbf{p}) \times Z(\mathbf{p})$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$. Allora $Y \times Z$ è un campo di vettori su $\mathcal{V}$ che è differenziabile se Y e Z sono differenziabili.

5.5 Derivate di campi di vettori su $\mathbb{R}^n$

Nel Paragrafo 5.2 abbiamo visto come si derivano le funzioni in direzione dei vettori tangenti. Una nozione di fondamentale importanza in geometria differenziale è quella di derivazione di un campo di vettori. Per campi di vettori su sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, la definizione è naturale.

Se W è un campo di vettori su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, sia $\widetilde{W}(\mathbf{q})$ l'elemento di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\widetilde{W}(\mathbf{q})_{\mathbf{q}} = W(\mathbf{q}).$$

Consideriamo la restrizione di W a quella porzione della retta $t \longmapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ che è contenuta in $\mathcal{U}$. Allora $t \longmapsto \widetilde{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ è la curva in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\widetilde{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})_{\mathbf{p}+t\mathbf{v}} = W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}).$$

Definizione 5.5.1. *Sia W un campo di vettori differenziabile su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, e sia $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ un vettore tangente a $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Allora la* **derivata** *di W rispetto a $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ è il vettore tangente $\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}W \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ dato da*

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}W = \widetilde{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0)_{\mathbf{p}} = \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{W}(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - \widetilde{W}(\mathbf{p})}{t}\bigg|_{\mathbf{p}}.$$

Anche se è possibile calcolare $\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}W$ direttamente dalla definizione, esiste una formula alternativa (simile all'equazione (5.7)), che è di solito più conveniente.

Lemma 5.5.1. *Sia W un campo di vettori differenziabile su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ e sia*

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i U_i.$$

Allora per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ ed ogni $\mathbf{v}_\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_\mathbf{p}$ abbiamo

$$\boldsymbol{D}_\mathbf{v} W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_\mathbf{p}[w_i] U_i(\mathbf{p}) = \big(\mathbf{v}_\mathbf{p}[w_1], \ldots, \mathbf{v}_\mathbf{p}[w_n]\big)_\mathbf{p}. \tag{5.11}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} W(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) U_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) \\ &= \big(w_1(\mathbf{p}+t\mathbf{v}), \ldots, w_n(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\big)_{\mathbf{p}+t\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Quindi $\widetilde{W}(\mathbf{p}+t\mathbf{v}) = \big(w_1(\mathbf{p}+t\mathbf{v}), \ldots, w_n(\mathbf{p}+t\mathbf{v})\big)$, e di conseguenza

$$\widetilde{W}(\mathbf{p}+t\mathbf{v})' = \big(w_1(\mathbf{p}+t\mathbf{v})', \ldots, w_n(\mathbf{p}+t\mathbf{v})'\big).$$

Ma dalla definizione di vettore tangente si ha

$$w_j(\mathbf{p}+t\mathbf{v})'(0) = \mathbf{v}_\mathbf{p}[w_j]$$

per $j = 1, \ldots, n$. Quindi

$$\widetilde{W}(\mathbf{p}+t\mathbf{v})'(0) = \big(\mathbf{v}_\mathbf{p}[w_1], \ldots, \mathbf{v}_\mathbf{p}[w_n]\big). \tag{5.12}$$

Allora la (5.12) implica la (5.11). □

È facile calcolare le derivate dei campi di vettori $U_1, \ldots, U_n$.

Corollario 5.5.1. *Per ogni vettore tangente $\mathbf{v}_\mathbf{p}$ a $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$\boldsymbol{D}_\mathbf{v} U_j = 0 \tag{5.13}$$

per $j = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Se utilizziamo la (5.10) per esprimere U_j in funzione di $U_1, \ldots, U_n$, allora le funzioni $v_1, \ldots, v_n$ in (5.10) sono tutte uguali a 0 tranne una che è uguale a 1. In particolare, esse sono tutte costanti. Quindi la (5.11) implica la (5.13). □

Mostriamo ora che l'operatore $\boldsymbol{D}$ si comporta in modo naturale rispetto alle operazioni sui campi di vettori date nel Lemma 5.4.1.

Lemma 5.5.2. *Siano Y e Z due campi di vettori differenziabili su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, e siano $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}$ due vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Allora*

$$\boldsymbol{D}_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}} Y = a\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Y + b\boldsymbol{D}_{\mathbf{w}} Y, \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}(a\,Y + b\,Z) = a\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Y + b\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Z, \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}(f\,Y) = \mathbf{v_p}[f]Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Y, \tag{5.16}$$

$$\mathbf{v_p}[Y \cdot Z] = \boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Y \cdot Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Z, \tag{5.17}$$

dove a, b sono numeri reali ed $f\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile.

Dimostrazione. Dimostriamo la (5.17); le dimostrazioni delle altre formule sono simili. Poniamo

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i U_i \qquad \text{e} \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} z_i U_i.$$

Dalle (5.4) e (5.5) segue che

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_p}[Y \cdot Z] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v_p}[y_i z_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \mathbf{v_p}[y_i] z_i(\mathbf{p}) + y_i(\mathbf{p}) \mathbf{v_p}[z_i] \Big\} \\
&= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v_p}[y_i] U_i(\mathbf{p}) \Big\} \cdot \Big\{ \sum_{i=1}^{n} z_i(\mathbf{p}) U_i(\mathbf{p}) \Big\} \\
&\qquad + \Big\{ \sum_{i=1}^{n} y_i(\mathbf{p}) U_i(\mathbf{p}) \Big\} \cdot \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v_p}[z_i] U_i(\mathbf{p}) \Big\} \\
&= \boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Y \cdot Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Z
\end{aligned}$$

□

Anche l'operatore $\boldsymbol{D}$ si comporta in modo naturale rispetto alla struttura complessa J di $\mathbb{R}^2$ e al prodotto vettoriale $\times$ di $\mathbb{R}^3$.

Lemma 5.5.3. *Siano Y e Z due campi di vettori differenziabili su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, dove $n = 2$ oppure 3, e siano $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}$ vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}(JY) = J(\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}(Y)) \qquad (\textit{per } n = 2), \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}(Y \times Z) = \boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Y \times Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p}) \times \boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} Z \qquad (\textit{per } n = 3). \tag{5.19}$$

Dimostrazione. Se Y è un campo di vettori su $\mathbb{R}^2$, possiamo scrivere $Y = y_1U_1 + y_2U_2$; allora $JY = -y_2U_1 + y_1U_2$. Segue dalla (5.11) che

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}(JY) = \big(- \mathbf{v}_{\mathbf{p}}[y_2], \mathbf{v}_{\mathbf{p}}[y_1]\big)_{\mathbf{p}} = J\big(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[y_1], \mathbf{v}_{\mathbf{p}}[y_2]\big)_{\mathbf{p}} = J(\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}Y),$$

e quindi si ha la (5.18). La dimostrazione della (5.19) è simile. □

È anche possibile definire la derivata di un campo di vettori rispetto ad un altro.

Lemma 5.5.4. *Siano V e W due campi di vettori definiti su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, e supponiamo che W sia differenziabile. Definiamo $\boldsymbol{D}_V W$ con*

$$(\boldsymbol{D}_V W)(\mathbf{p}) = \boldsymbol{D}_{V(\mathbf{p})}W$$

per $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$. Allora $\boldsymbol{D}_V W$ è un campo di vettori su $\mathcal{U}$ che è differenziabile se V e W sono differenziabili. Inoltre, se

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i U_i.$$

allora

$$\boldsymbol{D}_V W = \sum_{i=1}^{n} V[w_i]U_i. \tag{5.20}$$

Dimostrazione. L'equazione (5.20) è un'immediata conseguenza della (5.11). □

Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ un diffeomorfismo tra sottoinsiemi aperti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^n$, e sia V un campo di vettori differenziabile su $\mathcal{U}$. Vogliamo definire l'immagine $F_*(V)$ di V tramite F. Ecco la definizione, che è coerente con la (5.7):

Definizione 5.5.2. *Sia $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ un diffeomorfismo tra sottoinsiemi aperti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^n$ e sia V un campo di vettori differenziabile su $\mathcal{U}$. Poniamo $F = (f_1, \dots, f_n)$. Allora $F_*(V)$ è il campo di vettori su $\mathcal{V}$ dato da*

$$F_*(V) = \sum_{i=1}^{n} \big(V[f_i] \circ F^{-1}\big)U_i. \tag{5.21}$$

Si dimostra facilmente il seguente

Lemma 5.5.5. *Supponiamo che $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ sia un diffeomorfismo tra sottoinsiemi aperti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^n$. Siano Y e Z due campi di vettori differenziabili su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U}$. Allora*

$$F_*(a\,Y + b\,Z) = a\,F_*(Y) + b\,F_*(Z), \tag{5.22}$$

$$F_*(f\,Y) = (f \circ F^{-1})F_*(Y), \tag{5.23}$$

$$F_*(Y)[f \circ F^{-1}] = Y[f] \circ F^{-1}, \tag{5.24}$$

dove a, b sono numeri reali ed $f\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile.

Dimostriamo ora che certe applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in sè si comportano bene rispetto alle derivate dei campi di vettori.

Lemma 5.5.6. *Supponiamo che $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sia una trasformazione affine. Allora*

$$\boldsymbol{D}_{F_*(V)}\big(F_*(W)\big) = F_*(\boldsymbol{D}_V W). \tag{5.25}$$

Dimostrazione. Per ipotesi

$$F(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} + \mathbf{q}$$

dove $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare. Poniamo $A = (a_{ij})$. Allora per $i = 1, \ldots, n$ possiamo scrivere

$$F_*(U_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} U_j \tag{5.26}$$

dove ogni a_{ij} è costante. Dalle (5.22) e (5.23) otteniamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{F_*(V)} F_*(W) &= \boldsymbol{D}_{F_*(V)} \left(F_*\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i U_i \Big) \right) \\ &= \boldsymbol{D}_{F_*(V)} \Big(\sum_{i=1}^{n} (w_i \circ F^{-1}) F_*(U_i) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{D}_{F_*(V)} \big((w_i \circ F^{-1}) F_*(U_i) \big). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Tenendo conto della (5.26) si ha poi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{F_*(V)} \big((w_i \circ F^{-1}) F_*(U_i) \big) \big) &= \boldsymbol{D}_{F_*(V)} \Big((w_i \circ F^{-1}) \sum_{j=1}^{n} a_{ji} U_j \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} F_*(V)[(w_i \circ F^{-1}) a_{ji}] U_j. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Dal momento che a_{ij} è costante,

$$F_*(V)[(w_i \circ F^{-1}) a_{ij}] = F_*(V)[w_i \circ F^{-1}] a_{ij}. \tag{5.29}$$

Dalle (5.27)—(5.29) otteniamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{F_*(V)}F_*(W) &= \sum_{ij=1}^{n} F_*(V)[w_i \circ F^{-1}]a_{ij}U_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}(V[w_i] \circ F^{-1})F_*(U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_*\big(V[w_i]U_i\big). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ora la (5.25) segue dalla (5.30) e dalla (5.20) □

Concludiamo questo paragrafo definendo alcuni operatori notevoli che appaiono in analisi vettoriale.

Definizione 5.5.3. *Sia V un campo di vettori differenziabile definito su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. La* **divergenza** *di V è la funzione*

$$\mathbf{div}\, V = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{D}_{U_i}V \cdot U_i\right).$$

Se $f\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile, allora il **laplaciano** *di f è la funzione*

$$\boldsymbol{\Delta} f = \mathbf{div}(\mathbf{grad} f).$$

Lemma 5.5.7. *Se $f\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, allora*

$$\boldsymbol{\Delta} f = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} f = \mathbf{div}(\mathbf{grad} f) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{D}_{U_i}(\mathbf{grad} f) \cdot U_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} U_i[\mathbf{grad} f \cdot U_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} U_i[U_i[f]] \end{aligned}$$

□

5.6 Le curve rivisitate

Nello studio delle curve e delle superfici è spesso utile non far distinzione tra un vettore tangente $\mathbf{v_p}$ e la sua parte vettoriale. Per esempio, a pagina 10 abbiamo definito la velocità $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ come un vettore in $\mathbb{R}^n$. Per la precisione, questo dovrebbe essere un vettore tangente nel punto $\boldsymbol{\alpha}(t)$. (In questo paragrafo supporremo per semplicità che tutte le curve siano differenziabili.)

Definizione 5.6.1. (*Rivisitata*) *La* **velocità** *di una curva* $\boldsymbol{\alpha}$ *è l'applicazione*

$$t \longmapsto \boldsymbol{\alpha}'(t)_{\alpha(t)},$$

e l' **accelerazione** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *è l'applicazione*

$$t \longmapsto \boldsymbol{\alpha}''(t)_{\alpha(t)}.$$

Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}'(t)_{\alpha(t)}$ è un vettore tangente, possiamo applicarlo a una funzione differenziabile $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 5.6.1. *Siano* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva ed* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile. Allora*

$$\boldsymbol{\alpha}'(t)_{\alpha(t)}[f] = (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t).$$

Dimostrazione. Poniamo $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (a_1'(t), \ldots, a_n'(t))$. Segue dal Lemma 5.2.1 che

$$\boldsymbol{\alpha}'(t)_{\alpha(t)}[f] = \sum_{j=1}^{n} a_j'(t) \frac{\partial f}{\partial u_j}\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big). \tag{5.31}$$

Ma la regola della catena dice che il termine a destra della (5.31) è $(f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)$ □

Nel Paragrafo 1.4 abbiamo definito la nozione di campo di vettori lungo una curva $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{R}^n$. Un campo di vettori W su $\mathbb{R}^n$ dà luogo a un campo di vettori su $\boldsymbol{\alpha}$; questo è semplicemente $W \circ \boldsymbol{\alpha}$. Si osservi, che per ogni t, $(W \circ \boldsymbol{\alpha})(t)$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$. Un concetto strettamente legato è la restrizione di W ad $\boldsymbol{\alpha}$, che è l'applicazione

$$t \longmapsto W(\boldsymbol{\alpha}(t))_{\alpha(t)}.$$

Spesso è utile non distinguere tra il vettore $(W \circ \boldsymbol{\alpha})(t) \in \mathbb{R}^n$ e il vettore tangente $W(\boldsymbol{\alpha}(t)) = W(\boldsymbol{\alpha}(t))_{\alpha(t)} \in \mathbb{R}^n_{\alpha(t)}$, soprattutto per il fatto che è troppo scomodo scrivere l'indice. Analogamente, a meno che non lo richieda la chiarezza del contesto, non faremo distinzione tra $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ e $\boldsymbol{\alpha}'(t)_{\alpha(t)}$.

Nel Paragrafo 1.4 abbiamo anche definito la derivata di un campo di vettori lungo una curva. In particolare, sappiamo calcolare $(W \circ \boldsymbol{\alpha})'$. Precisiamo il legame tra $(W \circ \boldsymbol{\alpha})'$ e la derivata di W rispetto ad $\boldsymbol{\alpha}'(t)$.

Lemma 5.6.2. *Se W è un campo di vettori differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva, allora*

$$\boldsymbol{D}_{\alpha'(t)}W = (W \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)_{\alpha(t)}.$$

Dimostrazione. Per il Lemma 5.5.1 si ha

$$\boldsymbol{D}_{\alpha'(t)}W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}'(t)[w_i]U_i.$$

D'altra parte, il Lemma 5.6.1 implica che $\boldsymbol{\alpha}'(t)[w_i] = (w_i \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)$. Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{\alpha'(t)}W &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}'(t)[w_i]U_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (w_i \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)U_i \\ &= (W \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)_{\alpha(t)} \end{aligned}$$

□

5.7 Esercizi

1. Siano $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{p} = (2, -1, 4)$. Definiamo $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

   $$f(x, y, z) = x\, y^2\, z^4.$$

   Si calcoli $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}[f]$.

2. Definiamo $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo $F(x, y, z) = (x\, y, y\, z, z\, x)$. Si determinino i seguenti insiemi:

   $$\begin{aligned} A &= \{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{p}\| = 1,\ \ F(\mathbf{p}) = 0 \,\}, \\ B &= \{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{p}\| = 1,\ \ F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = 0 \text{ per qualche } \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}_{\mathbf{p}} \,\}. \end{aligned}$$

3. Si calcolino i gradienti delle seguenti funzioni:

   (a) $(x, y, z) \longmapsto e^{az}\cos(ax) - \cos(ay)$.

   (b) $(x, y, z) \longmapsto \sin(z) - \sinh(x)\sinh(y)$.

   (c) $(x, y, z) \longmapsto \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - c\, z$.

   (d) $(x, y, z) \longmapsto x^m + y^n + z^p$.

(e) $(x, y, z) \longmapsto x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$

(f) $(x, y, z) \longmapsto x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz$

(g) $(x, y, z) \longmapsto xyze^{x+y+z}$

(h) $(x, y, z) \longmapsto \arctan[x + y + z - xyz/(1 - xy - yz - xz)]$

4. Si calcoli la divergenza di ognuno dei seguenti campi di vettori:

(a) $(x, y, z) \longmapsto \big(a\,y\,z\cos(x\,y), b\,y\,z\,\sin(x\,y), c\,x\,y\big)$.

(b) $(x, y, z) \longmapsto \big(\sin(x\,y), \cos(y\,z), -3\cos^2(y\,z)\sin(x\,y) + \sin^3(x\,y)\big)$.

(c) $(x, y, z) \longmapsto \big((x\,y\,z)^a, (x\,y\,z)^b, (x\,y\,z)^c\big)$.

(d) $(x, y, z) \longmapsto \big(\log(x + y - z), e^{x-y+z}, (-x + y + z)^5\big)$.

(e) $(x, y, z) \longmapsto \big(xyz, 2x + 3y + z, x^2 + z^2\big)$

(f) $(x, y, z) \longmapsto \big(6x^2y^2 - z^3 + yz - 5, 4x^3y + xz + 2, xy - 3xz^2 - 3\big)$

5. Si calcoli il laplaciano delle funzioni degli esercizio 3.

6. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si dice un **punto critico** di f se l'applicazione tangente $f_*\colon \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathbb{R}_{F(\mathbf{p})}$ applica in zero qualche vettore tangente non nullo. Se $\mathbf{p}$ è un punto critico di f, definiamo **l'hessiano** di f in $\mathbf{p}$ come

$$\text{Hessian}[f]\big(\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}\big) = \mathbf{v_p}(Wf)(\mathbf{p})$$

per $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$. Qui W è un campo di vettori su $\mathbb{R}^n$ tale che $W(\mathbf{p}) = \mathbf{w_p}$.

(a) Si dimostri che

$$\textbf{Hessian}[f]\big(\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}\big) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}.$$

(b) Si concluda che la definizione dell'hessiano è indipendente dalla scelta del campo di vettori W.

Capitolo 6

Superfici nello Spazio Euclideo

L'analogo bidimensionale di una curva è una superficie. Le superfici però in genere sono molto più complicate delle curve. La generalizzazione bidimensionale naturale di una curva in $\mathbb{R}^n$ è la parametrizzazione locale o superficie locale, che viene definita nel Paragrafo 6.1. Le parametrizzazioni locali in $\mathbb{R}^3$ vengono trattate nel Paragrafo 6.2.

Una seconda generalizzazione di una curva in $\mathbb{R}^n$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^n$; questa nozione viene definita nel Paragrafo 6.4. Nei Paragrafi 6.5 e 6.6 diamo la definizione di vettore tangente a una superficie regolare e quella di applicazione tra superfici; queste sono per le superfici le analoghe delle nozioni di vettore tangente a $\mathbb{R}^n$ e di applicazione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

6.1 Superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^n$

Dal momento che una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione a valori vettoriali di una variabile, è ragionevole considerare funzioni a valori vettoriali di due variabili. Queste sono dette parametrizzazioni locali di superfici. Diamo innanzi tutto la definizione precisa.

Definizione 6.1.1. *Una* **parametrizzazione locale di una superficie** *o* **superficie locale** *è un'applicazione differenziabile*

$$\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

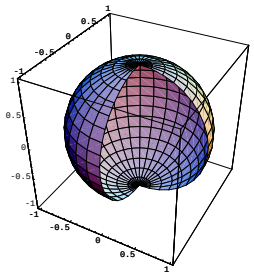
dove $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Più in generale, se A è un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, diciamo che un'applicazione $\mathbf{x}\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione locale se $\mathbf{x}$ può essere estesa a un'applicazione differenziabile da $\mathcal{U}$ a $\mathbb{R}^n$, dove $\mathcal{U}$ è un insieme aperto contenente A. Chiamiamo $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ (o più in generale $\mathbf{x}(A)$) la **traccia** *di $\mathbf{x}$.*

Sebbene il dominio di definizione di una parametrizzazione locale possa in teoria essere un insieme qualunque, nella maggior parte dei casi esso è un rettangolo aperto o chiuso.

L'usuale parametrizzazione locale della **sfera** $S^2(a)$ di raggio a è l'applicazione **sphere[*a*]**: $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\textbf{sphere[}\boldsymbol{a}\textbf{]}(u, v) = (a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v).$$

Qui u misura longitudine e v misura la latitudine. Per visualizzarla utilizzando *Mathematica* , è utile disegnare solo una porzione della sfera, in modo da poterne vedere l'interno.



```
ParametricPlot3D[
sphere[1][
u,v]//Evaluate,
{u,0,3Pi/2},
{v,-Pi/2,Pi/2},
PlotPoints->{24,20}];
```

La sfera unitaria $(u, v) \to (\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v)$

Qui ci siamo serviti di **ParametricPlot3D** per rappresentare graficamente una porzione di superficie, in questo caso una sfera.

Osserviamo che anche se la parametrizzazione locale **sphere[*a*]** è definita sul rettangolo chiuso $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, essa ha un prolungamento differenziabile ad un aperto contenente $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Ma ogni tale estensione copre più volte parti consistenti di $S^2(a)$, mentre **sphere[*a*]** copre più di una volta solo una semicirconferenza dal polo nord $(0, 0, a)$ al polo sud $(0, 0, -a)$.

Osserviamo che, potendo una parametrizzazione locale essere scritta come una n-upla di funzioni

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(x_1(u, v) \dots x_n(u, v)\big), \tag{6.1}$$

possiamo definire la derivata parziale $\mathbf{x}_u$ di $\mathbf{x}$ rispetto a u:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) \dots \frac{\partial x_n}{\partial u}(u, v)\right). \tag{6.2}$$

Le altre derivate parziali di $\mathbf{x}$, ad esempio, $\mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, sono definite in modo simile. Spesso preferiamo abbreviare la 6.1 e la 6.2 con

$$\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \dots \frac{\partial x_n}{\partial u}\right).$$

Le derivate parziali $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ possono essere espresse tramite l'applicazione tangente della parametrizzazione locale $\mathbf{x}$.

Lemma 6.1.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione locale e sia $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$. Allora*

$$\mathbf{x}_*\big(U_1(\mathbf{q})\big) = \mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \qquad e \qquad \mathbf{x}_*\big(U_2(\mathbf{q})\big) = \mathbf{x}_v(\mathbf{q}).$$

dove $\mathbf{x}_*$ denota l'applicazione tangente di $\mathbf{x}$, e $\{U_1, U_2\}$ denota il campo delle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Per il Lemma 5.3.2 si ha

$$\mathbf{x}_*\big(U_1(\mathbf{q})\big) = \big(U_1(\mathbf{q})[x_1] \dots U_1(\mathbf{q})[x_n]\big)_{\mathbf{x}(\mathbf{q})} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(\mathbf{q}) \dots \frac{\partial x_n}{\partial u}(\mathbf{q})\right)_{\mathbf{x}(\mathbf{q})} = \mathbf{x}_u(\mathbf{q}),$$

e analogamente per $\mathbf{x}_*\big(U_2(\mathbf{q})\big)$ □

A pagina 78 abbiamo definito la matrice jacobiana di un'applicazione differenziabile. Nel caso di una parametrizzazione locale questa definizione viene modificata leggermente.

Definizione 6.1.2. *La* **matrice jacobiana** *di una parametrizzazione locale $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è la funzione a valori matriciali $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ data da*

$$\mathcal{J}(\mathbf{x})(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u(u,v) \\ \mathbf{x}_v(u,v) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

La matrice nella (6.3) è la trasposta della matrice jacobiana definita a pagina 78; diversamente avremmo dovuto definire $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ come vettori colonna, cosa non conveniente dal punto di vista tipografico.

Ricordiamo che il rango di una matrice a è il più grande intero m tale che a abbia una sottomatrice $m \times m$ con determinante diverso da zero. Il seguente lemma è una conseguenza di alcuni risultati ben noti di algebra lineare.

Lemma 6.1.2. *Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$ *sono linearmente dipendenti*;

(ii) $\det\begin{pmatrix} \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{p} & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \end{pmatrix} = 0$;

(iii) *la matrice* $2 \times n$ $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ *ha rango minore di* 2.

Dimostrazione. Se $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono linearmente dipendenti, allora o $\mathbf{p}$ è un multiplo di $\mathbf{q}$, oppure è vero il viceversa. Per esempio, se $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{q}$. Allora

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{p} & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{q}\cdot\lambda\mathbf{q} & \lambda\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \\ \lambda\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \end{pmatrix} = \lambda^2 \det\begin{pmatrix} \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi la (i) implica la (ii).

Supponiamo ora che si abbia

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{p} & \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \end{pmatrix} = 0.$$

Poniamo $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n q_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n p_i\, q_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (p_i q_j - p_j q_i)^2 . \end{aligned}$$

Risulta dunque che $p_i q_j = p_j q_i$ per ogni i e j. Pertanto la (ii) implica la (iii).

Supponiamo infine che valga la (iii). Allora

$$p_i q_j = p_j q_i$$

per ogni i e j. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $q_i \neq 0$ per qualche i. Allora

$$p_j = \frac{p_i}{q_i} q_j$$

per ogni j. Allora

$$\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n) = \frac{p_i}{q_i}(q_1 \dots q_n) = \frac{p_i}{q_i}\mathbf{q}.$$

Ne segue che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono linearmente dipendenti. □

Corollario 6.1.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione locale. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ *e* $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ *sono linearmente dipendenti;*

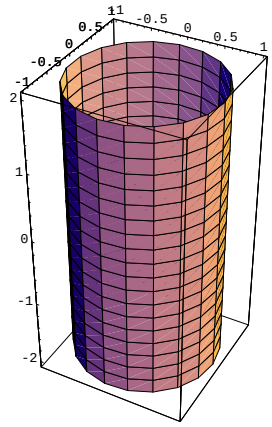
(ii) $\det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v \end{pmatrix}$ *si annulla in* (u_0, v_0);

(iii) *la matrice jacobiana* $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ *ha rango minore di* 2 *in* (u_0, v_0).

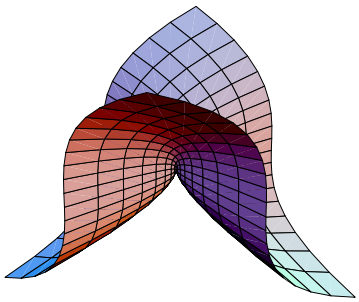
Di solito vogliamo una nozione più forte di parametrizzazione locale $\mathbf{x}$ in modo che la traccia $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ rassomigli il più possibile all'insieme aperto $\mathcal{U}$.

Definizione 6.1.3. *Una* **parametrizzazione locale regolare** *è una parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *per la quale la matrice jacobiana* $\mathcal{J}(\mathbf{x})(u,v)$ *ha rango* 2 *per ogni* $(u,v) \in \mathcal{U}$. *Una* **parametrizzazione locale iniettiva** *è una parametrizzazione locale tale che se* $\mathbf{x}(u_1,v_1) = \mathbf{x}(u_2,v_2)$ *allora* $u_1 = u_2$ *e* $v_1 = v_2$.

Ci sono parametrizzazioni locali regolari che non sono iniettive (per esempio, il cilindro definito da $\mathbf{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$, dove $-\infty < u < \infty$, $-2 < v < 2$). Inoltre ci sono parametrizzazioni locali iniettive che non sono regolari (per esempio, la parametrizzazione locale $\mathbf{y}$ definita da $\mathbf{y}(u,v) = (u^3, v^3, u\,v)$, dove $-1 < u, v < 1$).



(a) $(u,v) \longmapsto (\cos u, \sin u, v)$



(b) $(u,v) \longmapsto (u^3, v^3, u\,v)$

Di solito si ha a che fare con parametrizzazioni locali che non sono regolari, ma la cui regolarità viene a mancare solo in pochi punti. Per poter trattare questi casi, introduciamo la seguente definizione:

Definizione 6.1.4. *Una parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *è* **regolare** *in un punto* $(u_0,v_0) \in \mathcal{U}$ *(o talvolta diciamo in* $\mathbf{x}(u_0,v_0)$*) se la sua matrice jacobiana ha rango* 2 *in* (u_0,v_0).

Come conseguenza dei Lemmi 6.1.1 e del Corollario 6.1.1 si ha

Lemma 6.1.3. *Una parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *è regolare in* $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$ *se e solo se* $\mathbf{x}_*\colon \mathbb{R}^2_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}$ *è iniettiva.*

Il seguente lemma è una conseguenza del teorema della funzione inversa. (Si veda, per esempio, [Buck, pagina 276].)

Lemma 6.1.4. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale regolare e sia* $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$. *Allora esiste un intorno* $\mathcal{U}_\mathbf{q}$ *di* $\mathbf{q}$ *tale che* $\mathbf{x}$ *sia un diffeomorfismo tra* $\mathcal{U}_\mathbf{q}$ *e* $\mathbf{x}(\mathcal{U}_\mathbf{q})$.

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$. Dal momento che $\mathbf{x}$ è regolare, la sua matrice jacobiana ha una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. Cambiando eventualmente gli indici delle variabili $x_1 \dots x_n$, possiamo supporre che

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0$$

per $(u,v) \in \mathcal{U}$. Estendiamo $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ad una applicazione $\widetilde{\mathbf{x}}\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definendo

$$\widetilde{\mathbf{x}}(u,v,t_3 \dots t_n) = \big(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v) + t_3 \dots x_n(u,v) + t_n\big).$$

È chiaro che $\widetilde{\mathbf{x}}$ è differenziabile; inoltre, il determinante della matrice jacobiana di $\widetilde{\mathbf{x}}$ è

$$\begin{aligned} \det\big(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}})(u,v)\big) &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v}(u,v) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Essendo $\det\big(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}})\big)(\mathbf{q}) \neq 0$, il teorema della funzione inversa dice che esiste un intorno $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathbf{q}$ di $(\mathbf{q}, \mathbf{0})$ sul quale $\widetilde{\mathbf{x}}$ ha una inversa differenziabile. Sia $\mathcal{U}_\mathbf{q} = \widetilde{\mathcal{U}}_\mathbf{q} \cap \mathcal{U}$. Dal momento che $\widetilde{\mathbf{x}}\colon \widetilde{\mathcal{U}}_\mathbf{q} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{x}}(\widetilde{\mathcal{U}}_\mathbf{q})$ è un diffeomorfismo, tale è anche $\mathbf{x}\colon \mathcal{U}_\mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{x}(\mathcal{U}_\mathbf{q})$ □

Corollario 6.1.2. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale regolare iniettiva. Allora* $\mathbf{x}$ *è un diffeomorfismo tra* $\mathcal{U}$ *e* $\mathbf{x}(\mathcal{U})$.

Per esempio, cerchiamo i punti in cui la parametrizzazione naturale di una sfera non è regolare. Il comando

```
surfacejacobian[sphere[a]][u,v]//Simplify
```

ottiene la risposta

$$a^4 Cos[v]^2$$

Se ne deduce che questa parametrizzazione della sfera smette di essere regolare quando $v = \pm\pi/2$, cioè ai poli nord e sud.

Ad ogni parametrizzazione locale sono associate in modo naturale due famiglie di curve importanti.

Definizione 6.1.5. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale, e fissiamo* $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$*. Le curve*

$$u \longmapsto \mathbf{x}(u, v_0) \qquad e \qquad v \longmapsto \mathbf{x}(u_0, v)$$

sono dette **linee coordinate** *o, rispettivamente, curve* ***u*-parametrica** *e* ***v*-parametrica** *di* $\mathbf{x}$*.*

Queste sono le curve che *Mathematica* di solito disegna quando rappresenta una parametrizzazione locale.

C'è anche un modo conveniente per rappresentare una curva arbitraria i cui punti sono contenuti nella traccia di una parametrizzazione locale.

Lemma 6.1.5. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva la cui traccia è contenuta nella traccia* $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ *di un'unica parametrizzazione locale regolare* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tale che* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{x}(\mathcal{U})$ *sia un omeomorfismo. Allora esistono due funzioni differenziabili uniche* $u, v\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tali che*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big) \tag{6.4}$$

per $a < t < b$*.*

Dimostrazione. $\mathbf{x}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ sono differenziabili, lo è anche $\mathbf{x}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha}$. Per $a < t < b$ possiamo scrivere

$$(\mathbf{x}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha})(t) = \big(u(t), v(t)\big);$$

questa equazione è equivalente alla (6.4). È chiaro che u e v sono uniche; in virtù del Lemma 6.1.4 esse sono anche differenziabili □

Ora possiamo definire la nozione di vettore tangente ad una parametrizzazione locale.

Definizione 6.1.6. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale iniettiva, e sia* $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(\mathcal{U})$. *Un* **vettore tangente** *a* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{p}$ *è un vettore tangente* $\mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ *per il quale esiste una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *che può essere messa nella forma*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big) \qquad (a < t < b), \tag{6.5}$$

tale che $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ *e* $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_p}$. *Denoteremo l'insieme dei vettori tangenti a* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{p}$ *con* $\mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{p}}$.

Lemma 6.1.6. *L'insieme* $\mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{p}}$ *di tutti i vettori tangenti a una parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *in un punto regolare* $\mathbf{p} = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in \mathbf{x}(\mathcal{U})$ *forma uno spazio vettoriale che è generato da* $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ *e da* $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$.

Dimostrazione. Per definizione di vettore tangente $\mathbf{v_p}$ a $\mathbf{x}$, esiste una curva $\boldsymbol{\alpha}$ della forma 6.5 tale che $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_p}$. La regola della catena per le curve (Lemma 1.2.1) implica che

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u\big(u(t), v(t)\big) + v'(t)\mathbf{x}_v\big(u(t), v(t)\big).$$

In particolare,

$$\begin{aligned} \mathbf{v_p} &= \boldsymbol{\alpha}'(0) = u'(0)\mathbf{x}_u\big(u(0), v(0)\big) + v'(0)\mathbf{x}_v\big(u(0), v(0)\big) \\ &= u'(0)\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + v'(0)\mathbf{x}_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\mathbf{v_p} = c_1\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + c_2\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$, allora un semplice calcolo mostra che $\mathbf{v_p}$ è il vettore velocità in $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$ della curva
$t \longmapsto \mathbf{x}(u_0 + t\,c_1, v_0 + tc_2)$ □

La dimostrazione del Lemma 6.1.6 dà il seguente risultato:

Corollario 6.1.3. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva la cui traccia è contenuta nella traccia* $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ *di una parametrizzazione locale regolare* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tale che* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{x}(\mathcal{U})$ *sia un omeomorfismo. Allora esistono due funzioni differenziabili uniche* $u, v\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tali che*

$$\boldsymbol{\alpha}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v. \tag{6.6}$$

Definizione 6.1.7. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale iniettiva, e sia* $\mathbf{z_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ *con* $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(\mathcal{U})$. *Diciamo che* $\mathbf{z_p}$ *è* **normale** *o* **perpendicolare** *a* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{p}$, *se* $\mathbf{z_p} \cdot \mathbf{v_p} = 0$ *per ogni vettore* $\mathbf{v_p}$ *tangente a* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{p}$.

È facile vedere che se $\mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{p}}^{\perp}$ denota lo spazio dei vettori di $\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ perpendicolari a $\mathbf{x}(\mathcal{U}_{\mathbf{p}})$, allora

$$\mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} = \mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{p}} \oplus \mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{p}}^{\perp}.$$

Ci serviranno anche i campi di vettori definiti su una parametrizzazione locale.

Definizione 6.1.8. *Un* **campo di vettori** V *su una parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *è una legge che assegna ad ogni punto* $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$ *un vettore tangente* $V(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$*, dove* $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$*. Diciamo che* V *è* **tangente** *a* $\mathbf{x}$ *se* $V(\mathbf{q}) \in \mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}$ *per ogni* $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$*, e che* V *è* **normale** *o* **perpendicolare** *a* $\mathbf{x}$ *se* $V(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} = 0$ *per ogni* $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in \mathbf{x}(\mathcal{U})_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}$ *per ogni* $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$*.*

6.2 Superfici parametrizzate in $\mathbf{R}^3$

Vogliamo ora concentrare la nostra attenzione sulle parametrizzazioni locali in $\mathbb{R}^3$ in quanto esse sono quelle più facili da visualizzare. Inoltre, grazie al fatto che su $\mathbb{R}^3$ esiste un prodotto vettoriale, i calcoli diventano più semplici.

Ecco un utile criterio per stabilire la regolarità di una parametrizzazione locale in $\mathbb{R}^3$:

Lemma 6.2.1. *Una parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *è regolare in* $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ *se e solo se* $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ *è diverso da zero in* (u_0, v_0)*.*

Dimostrazione. Le sottomatrici 2×2 di $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ sono

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

D'altra parte,

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{k}.$$

Quindi $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u_0, v_0) = 0$ se e solo se il rango di $\mathcal{J}(\mathbf{x})(u_0, v_0)$ è minore di 2. Pertanto $\mathbf{x}$ è regolare in (u_0, v_0) se e solo se $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u_0, v_0) \neq 0$ □

Intuitivamente, la nozione di vettore perpendicolare ad una superficie in $\mathbb{R}^3$ è chiara. Il prodotto vettoriale su $\mathbb{R}^3$ è uno strumento efficace per la costruzione di vettori perpendicolari.

Lemma 6.2.2. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una parametrizzazione locale iniettiva regolare. Allora il campo di vettori* $(u, v) \longmapsto \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ *è ovunque perpendicolare a* $\mathbf{x}(\mathcal{U})$.

Dimostrazione. La proprietà 3.4 del prodotto vettoriale implica che $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ sia perpendicolare sia a $\mathbf{x}_u$ che a $\mathbf{x}_v$. Dal momento che ogni vettore tangente $\mathbf{v_p}$ a $\mathbf{x}$ è una combinazione lineare di $\mathbf{x}_u$ e di $\mathbf{x}_v$ in $\mathbf{p}$, segue dal Lemma 6.1.6 che $(u, v) \longmapsto \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ è perpendicolare a $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ □

Definizione 6.2.1. *Per una parametrizzazione locale iniettiva* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *il* **campo di vettori normale unitario** *o* **campo normale superficiale U** *viene definito da*

$$\mathbf{U}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(u, v) \tag{6.7}$$

in quei punti $(u, v) \in \mathcal{U}$ *nei quali* $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ *non si annulla.*

La nozione di regolarità di una parametrizzazione locale ha la seguente interpretazione geometrica.

Corollario 6.2.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una parametrizzazione locale iniettiva. Allora* $\mathbf{x}$ *è regolare se e solo se il campo normale unitario* $\mathbf{U}$ *è ovunque ben definito.*

6.3 L'applicazione normale di Gauss

Uno degli elementi chiave per lo studio delle superfici è l'applicazione che associa ad ogni punto $\mathbf{p}$ su una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ il punto sulla sfera unitaria $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ individuato dal vettore parallelo al vettore normale unitario $\mathbf{U}(\mathbf{p})$. Essa è chiamata l'applicazione di Gauss[1] Questa applicazione può non essere definita per una superficie qualunque, per motivi che illustreremo nel Capitolo 7. L'applicazione di Gauss è però sempre definita per una parametrizzazione locale.

[1]

Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Le **Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas** di Gauss rivoluzionarono la geometria differenziale allo stesso modo in cui le sue **Disquisitiones Arithmeticae** avevano rivoluzionato la teoria dei numeri. In particolare, egli considerò oggetti geometrici che

Definizione 6.3.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una parametrizzazione locale. Allora il campo normale unitario* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{x}$ *visto come un'applicazione da* $\mathcal{U}$ *alla sfera unitaria* $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ *è chiamato* **l'applicazione di Gauss** *di* $\mathbf{x}$*.*

Si osservi che $\mathbf{U}$ non è definita nei punti non regolari di $\mathbf{x}$. Sebbene geometricamente $\mathbf{U}(u, v)$ rappresenti il campo normale unitario a $\mathbf{x}$ in $\mathbf{x}(u, v)$, l'applicazione $(u, v) \longmapsto \mathbf{U}(u, v)$ può essere considerata anche una parametrizzazione locale la cui immagine è contenuta in $S^2(1)$.

6.4 Definizione di superficie regolare in $\mathbf{R}^n$

Ci sono alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che ci piacerebbe chiamare superfici, ma che non hanno i requisiti esposti nel Paragrafo 6.1. Tali sottoinsiemi non possono essere descritti come immagini di una sola parametrizzazione locale regolare iniettiva definita su un insieme aperto; le sfere ed i tori ne sono esempi. In questo paragrafo definiamo la nozione di superficie regolare; in termini poco rigorosi, una superficie regolare si ottiene mettendo insieme più parametrizzazioni locali. La definizione che ne risulta è più complicata, ma è proprio quella che ci serve in molte occasioni.

Definizione 6.4.1. *Un sottoinsieme* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *è una* **superficie regolare***, se per ogni punto* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ *esistono un intorno* $\mathcal{V}$ *di* $\mathbf{p}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *e un'applicazione* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *di un insieme aperto* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ *su* $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ *tali che:*

---

dipendevano solo dalle proprietà intrinseche delle superfici, e non dalla loro immersione nello spazio euclideo tridimensionale.

Il genio di Gauss spaziò in quasi tutte le branche della matematica. Mentre era ancora studente, a Göttingen, egli fece la sua prima importante scoperta, la costruibilità del poligono regolare con 17 lati, seguita immediatamente dalla prima delle sue quattro dimostrazioni del teorema fondamentale dell'algebra (la sua tesi di dottorato) e dal calcolo dell'orbita dell'asteroide Cerere che era stato appena scoperto. La propensione per le applicazioni pratiche ed il forte interesse per la geodesia, condussero Gauss all'invenzione dell'eliotropo e allo sviluppo del metodo dei minimi quadrati, una tecnica che egli utilizzò anche nelle sue ricerche sulla distribuzione dei numeri primi.

Basandosi suoi studi sul magnetismo terrestre, Gauss costruì, in collaborazione con Wilhelm Weber, il primo telegrafo elettrico funzionante. A lui si devono altre scoperte applicative di notevole significato in ottica, in teoria del potenziale e in astronomia. Gauss trascorse tutta la sua carriera a Braunschweig, sotto il patronato del governatore locale; per molti anni egli vi diresse l'osservatorio. Forse a causa del suo conservatorismo profondamente radicato o forse per la sua avversione per le controversie, Gauss non pubblicò il suo sviluppo della teoria della geometria non euclidea né il lavoro che anticipava le ricerche di Hamilton sui quaternioni. Sebbene egli lavorasse perlopiù in isolamento matematico, i suoi risultati gettarono le basi per nuovi indirizzi in teoria dei numeri e in statistica, nonché in geometria differenziale.

(i) $\mathbf{x}$ *è differenziabile*;

(ii) $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ *è un omeomorfismo. Ciò vuol dire che* $\mathbf{x}$ *ha una inversa continua* $\mathbf{x}^{-1}\colon \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{U}$ *tale che* $\mathbf{x}^{-1}$ *sia la restrizione a* $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ *di una applicazione continua* $F\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, dove* $\mathcal{W}$ *è un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$ *che contiene* $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$;

(iii) *ogni applicazione* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *è una parametrizzazione locale regolare.*

Ogni applicazione $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *è chiamata una* **carta locale** *o* **sistema di coordinate locali** *in un intorno di* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$.

Nel seguito ci servirà il seguente risultato.

Lemma 6.4.1. *Sia* $\mathcal{W}$ *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$*, e supponiamo che* $G\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *sia un'applicazione tale che* $G\colon \mathcal{W} \longrightarrow G(\mathcal{W})$ *sia un diffeomorfismo. Se* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}$ *è una superficie regolare, allora* $G(\mathcal{M})$ *è anch'essa una superficie regolare.*

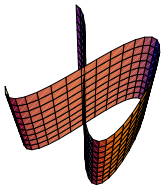
Dimostrazione. Se $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale su $\mathcal{M}$ soddisfacennte alle (i), (ii) e (iii) nella definizione di superficie regolare, allora anche $G \circ \mathbf{x}\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ soddisfa alle (i), (ii) e (iii) □

C'è un modo semplice per trovare nuove superfici regolari contenute in una data superficie regolare $\mathcal{M}$. Si dice che un sottoinsieme $\mathcal{V}$ di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ è **aperto** se esso è l'intersezione di un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{M}$.

Lemma 6.4.2. *Un sottoinsieme aperto* $\mathcal{W}$ *di una superficie regolare* $\mathcal{M}$ *è esso stesso una superficie regolare.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ una parametrizzazione locale su $\mathcal{M}$ soddisfacente alle condizioni (i), (ii) e (iii) che appaiono nella definizione di superficie regolare; allora $\mathbf{x}$ è continua. Dal momento che l'immagine inversa di un insieme aperto è aperta, $\mathcal{U} = \mathbf{x}^{-1}(\mathcal{W})$ è aperto. Se $\mathcal{U}$ è non vuoto, la restrizione $\mathbf{x}|\mathcal{U}$ diviene una parametrizzazione locale su $\mathcal{W}$. È chiaro che $\mathbf{x}|\mathcal{U}$ soddisfa alle (i), (ii) e (iii) della definizione di superficie regolare. Quindi $\mathcal{W}$ diviene una superficie regolare □

Vogliamo ora chiarire la relazione tra parametrizzazioni locali e superfici regolari. Certamente una parametrizzazione locale arbitraria non potrà mai essere una superficie regolare se la sua traccia ha dimensione 0 oppure 1. Una parametrizzazione locale, anche se regolare, non è una superficie



$(u, v) \longmapsto (\sin u, \sin 2u, v)$

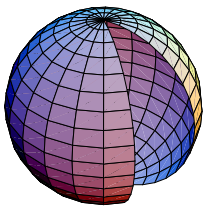
regolare se ha autointersezioni. (La condizione
(ii) nella definizione di superficie regolare impedisce ad una superficie regolare di avere autointersezioni.) Tuttavia si può dimostrare che, riducendo opportunamente il dominio di definizione di una parametrizzazione locale, si ottiene una superficie regolare.

Lemma 6.4.3. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale regolare. Per ogni* $\mathbf{q} \in \mathcal{U}$ *esiste un intorno* $\mathcal{U}_\mathbf{q}$ *di* $\mathbf{q}$ *tale che* $\mathbf{x}(\mathcal{U}_\mathbf{q})$ *sia una superficie regolare.*

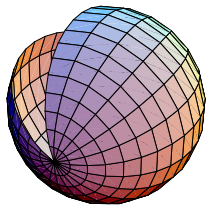
Dimostrazione. Il Lemma 6.1.4 afferma che $\mathbf{q}$ possiede un intorno $\mathcal{U}_\mathbf{q}$ tale che $\mathbf{x}$ sia un diffeomorfismo tra $\mathcal{U}_\mathbf{q}$ e $\mathbf{x}(\mathcal{U}_\mathbf{q})$. L'intorno $\mathcal{U}_\mathbf{q}$ è un insieme aperto nel piano, e quindi una superficie regolare per il Lemma 6.4.2. Allora il Lemma 6.4.1 implica che $\mathbf{x}(\mathcal{U}_\mathbf{q})$ è una superficie regolare □

Corollario 6.4.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale regolare iniettiva. Allora* $\mathbf{x}(\mathcal{U}_\mathbf{q})$ *è una superficie regolare.*

D'altra parte, una sfera è un esempio di una superficie regolare per ricoprire la quale occorrono almeno due parametrizzazioni locali. Ecco due parametrizzazioni locali che insieme coprono la sfera. Entrambe sono definite su
$\{\,(u,v) \mid\ 0 < u < 7\pi/4,\ \ -\pi/2 < v < \pi/2\,\}$.



(a) $(u,v) \longmapsto$
$(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$



(b) $(u,v) \longmapsto$
$\big(\cos(0.6\pi - u)\cos v, \sin v,$
$\sin(0.6\pi - u)\cos v\big)$

Definizione 6.4.2. *Sia* $\mathcal{M}$ *una superficie regolare in* $\mathbb{R}^n$. *Se esiste una parametrizzazione locale iniettiva regolare* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tale che* $\mathbf{x}(\mathcal{U}) = \mathcal{M}$, *diciamo che* $\mathcal{M}$ *è* **parametrizzata da x**.

Le applicazioni differenziabili a valori in una superficie regolare godono della proprietà seguente.

Teorema 6.4.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ una superficie regolare, e sia $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ un sottoinsieme aperto. Supponiamo che $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sia un'applicazione differenziabile tale che $F(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{M}$, e che $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ sia una parametrizzazione locale regolare su $\mathcal{M}$ tale che $F(\mathcal{V}) \subseteq \mathbf{x}(\mathcal{U})$. Allora $\mathbf{x}^{-1} \circ F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ è differenziabile.*

Dimostrazione. Si è tentati di provare a dimostrare questo teorema dicendo che, siccome $\mathbf{x}^{-1}$ ed F sono differenziabili, tale è $\mathbf{x}^{-1} \circ F$. Sfortunatamente questo non è possibile, in quanto in questo momento non sappiamo ancora che cosa significa che una funzione definita su una superficie regolare è differenziabile. Perciò siamo costretti a dimostrare il teorema seguendo un metodo indiretto. A questo scopo modifichiamo in modo opportuno la dimostrazione del Lemma 6.1.4. Poniamo $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$. Dal momento che $\mathbf{x}$ è regolare, la sua matrice jacobiana ha una sottomatrice 2×2 con determinante diverso da zero. Effettuando eventualmente un cambiamento degli indici delle variabili $x_1 \dots x_n$, se necessario, possiamo supporre che sia

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0$$

per $(u,v) \in \mathcal{U}$. Estendiamo $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ad un'applicazione $\widetilde{\mathbf{x}}\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definendo

$$\widetilde{\mathbf{x}}(u,v,t_3 \dots t_n) = \big(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v) + t_3 \dots x_n(u,v) + t_n\big).$$

È chiaro che $\widetilde{\mathbf{x}}$ è differenziabile; inoltre, il determinante della matrice jacobiana di $\widetilde{\mathbf{x}}$ è

$$\begin{aligned} \det\big(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}})(u,v)\big) &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_3}{\partial v}(u,v) & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v}(u,v) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$; allora $F(\mathbf{p}) \in \mathbf{x}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M}$. Essendo $\det\big(\mathcal{J}(\widetilde{\mathbf{x}})\big) \neq 0$ su $\mathcal{U}$, il teorema della funzione inversa dice che $\widetilde{\mathbf{x}}$ ha un'inversa $\widetilde{\mathbf{x}}^{-1}$ su un intorno $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^n$ di $F(\mathbf{p})$, e

che $\widetilde{\mathbf{x}}^{-1}$ è differenziabile su $\widetilde{\mathcal{U}}$. Dal momento che F è continua, esiste un intorno $\widetilde{\mathcal{V}}$ di $\mathbf{p}$ tale che $F(\widetilde{\mathcal{V}}) \subset \widetilde{\mathcal{U}}$. Inoltre,

$$\widetilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ F|\widetilde{\mathcal{V}} = \mathbf{x}^{-1} \circ F|\widetilde{\mathcal{V}}.$$

Dal momento che $\widetilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ F|\widetilde{\mathcal{V}}$ è differenziabile in $\mathbf{p}$, tale è anche $\mathbf{x}^{-1} \circ F|\widetilde{\mathcal{V}}$. Ma essendo $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ arbitrario, ne segue che $\mathbf{x}^{-1} \circ F$ è differenziabile su tutto $\mathcal{V}$ □

Un importante caso particolare del Teorema 6.4.1 è dato dal seguente

Corollario 6.4.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare, e supponiamo che siano date due parametrizzazioni locali regolari $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ e $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ tali che $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$ sia non vuoto. Allora il* **cambiamento di coordinate**

$$(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})\colon \mathbf{y}^{-1}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathbf{x}^{-1}(\mathcal{W}) \tag{6.8}$$

è un diffeomorfismo tra sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Che $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ siano differenziabili segue dal Teorema 6.4.1. Dal momento che sia $\mathbf{x}$ che $\mathbf{y}$ sono omeomorfismi, tali sono anche $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$. Inoltre, queste applicazioni sono l'una inversa dell'altra. Pertanto $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ sono diffeomorfismi □

Possiamo scrivere la 6.8 più esplicitamente nel modo seguente: esistono due funzioni differenziabili $\bar{u}, \bar{v}$ tali che

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}\big(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)\big).$$

Si osservi che $(\bar{u}, \bar{v}) = (\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})(u, v)$.

Lemma 6.4.4. *Siano $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ e $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ due parametrizzazioni locali su una superficie regolare $\mathcal{M}$ con $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ non vuoto. Sia $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} = (\bar{u}, \bar{v})\colon \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ il relativo cambiamento di coordinate, cioè*

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}\big(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)\big). \tag{6.9}$$

Allora

$$\mathbf{y}_u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{v}} \qquad e \qquad \mathbf{y}_v = \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\mathbf{x}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\mathbf{x}_{\bar{v}}. \tag{6.10}$$

Dimostrazione. La 6.10 è una conseguenza immediata della 6.9 e della regola della catena □

Dobbiamo ora estendere alle superfici regolari la parte di calcolo differenziale che nel Capitolo 5 abbiamo sviluppato per $\mathbb{R}^n$. Dobbiamo dire innanzi tutto cosa vuol dire che una funzione a valori reali definita su una superficie regolare è differenziabile.

Definizione 6.4.3. *Sia $f\colon \mathcal{W} \subset \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su un sottoinsieme aperto $\mathcal{W}$ di una superficie regolare $\mathcal{M}$. Diciamo che f è* **differenziabile**

in $\mathbf{p} \in \mathcal{W}$ se per qualche parametrizzazione locale $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}$ con $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$, la composizione

$$f \circ \mathbf{x}\colon \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è differenziabile in $\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$. Se f è differenziabile in tutti i punti di $\mathcal{W}$, diciamo che f è **differenziabile** *su $\mathcal{W}$.*

Lemma 6.4.5. *La definizione di differenziabilità di una funzione a valori reali su una superficie regolare non dipende dalla scelta della parametrizzazione locale.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono parametrizzazioni locali su una superficie regolare $\mathcal{M}$, allora $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ è differenziabile per il Corollario 6.4.2. Dal momento che la composizione di funzioni differenziabili è differenziabile, segue l'asserto □

Lemma 6.4.6. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^n$. Allora la restrizione $f|\mathcal{M}$ di una funzione differenziabile $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a $\mathcal{M}$ è differenziabile.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale su $\mathcal{M}$, allora $(f|\mathcal{M}) \circ \mathbf{x} = f \circ \mathbf{x}$ è differenziabile, dal momento che essa è la composizione di funzioni differenziabili. Quindi per definizione $f|\mathcal{M}$ è differenziabile. □

Una semplice conseguenza del Lemma 6.4.6 è:

Corollario 6.4.3. *Le restrizioni ad una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ delle funzioni coordinate naturali $u_1 \dots u_n$ di $\mathbb{R}^n$ sono differenziabili.*

Ecco due importanti esempi di funzioni differenziabili su una superficie regolare.

Definizione 6.4.4. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. La* **funzione altezza** *ea il* **quadrato della funzione distanza** *di $\mathcal{M}$ relative a $\mathbf{v}$ sono le funzioni $h, f\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da*

$$h(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \qquad e \qquad f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{v}\|^2.$$

Lemma 6.4.7. *Per ogni superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ la funzione altezza ea il quadrato della funzione distanza sono differenziabili.*

Dimostrazione. Sia la funzione altezza che il quadrato della funzione distanza sono combinazioni algebriche delle funzioni coordinate naturali di $\mathbb{R}^n$. Per il Lemma 6.4.6 esse sono differenziabili. □

Introduciamo ora la nozione di curva su una superficie regolare.

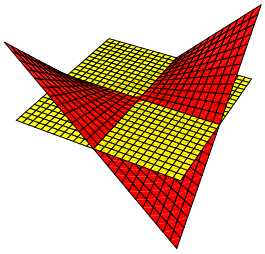
Definizione 6.4.5. *Una* **curva su una superficie regolare** $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *è una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tale che* $\boldsymbol{\alpha}(t) \in \mathcal{M}$ *per* $a < t < b$. *La curva* $\boldsymbol{\alpha}$ *si dice* **differenziabile** *se* $\mathbf{x}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{U}$ *è differenziabile per ogni parametrizzazione locale* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$, *dove* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$.

6.5 Vettori tangenti a superfici regolari in $\mathbf{R}^n$

Siamo ora in grado di introdurre l'importante nozione di vettore tangente a una superficie regolare. Questo è il passo successivo per ottenere l'estensione alle superfici regolari del calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$ che è stato sviluppato nel Capitolo 5.

Definizione 6.5.1. *Sia* $\mathcal{M}$ *una superficie regolare in* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. *Diciamo che* $\mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ *è* **tangente a** $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p}$ *se esiste una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tale che* $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$, $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_p}$ *e* $\boldsymbol{\alpha}(t) \in \mathcal{M}$ *per* $a < t < b$. *Lo* **spazio tangente** *a* $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p}$ *è l'insieme*

$$\mathcal{M}_{\mathbf{p}} = \left\{ \mathbf{v_p} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \mid \mathbf{v_p} \text{ è tangente a } \mathcal{M} \text{ in } \mathbf{p} \right\}.$$



Un paraboloide iperbolico e uno dei suoi piani tangenti

A pagina 92 abbiamo definito $\mathbf{x}_u(u,v)$ e $\mathbf{x}_v(u,v)$ come vettori in $\mathbb{R}^n$. Talvolta è utile modificare questa definizione in modo che $\mathbf{x}_u(u,v)$ e $\mathbf{x}_v(u,v)$ siano vettori tangenti in $\mathbf{x}(u,v)$.

Quindi se $\mathbf{x}(u,v) = \big(x_1(u,v) \ldots x_n(u,v)\big)$ possiamo ridefinire

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) \ldots \frac{\partial x_n}{\partial u}(u,v) \right)_{\mathbf{x}(u,v)}$$

e

$$\mathbf{x}_v(u,v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}(u,v) \ldots \frac{\partial x_n}{\partial v}(u,v) \right)_{\mathbf{x}(u,v)}.$$

Un'osservazione simile vale anche per $\mathbf{x}_{uu}$ e per le altre derivate parziali di $\mathbf{x}$ di ordine più elevato. Comunque, il più delle volte tali distinzioni non sono necessarie. Per esempio, quando dobbiamo calcolare le derivate parziali di una parametrizzazione

locale esplicitamente (a mano o con *Mathematica*) noi le consideriamo come vettori in $\mathbb{R}^n$. In conclusione, noi consideriamo $\mathbf{x}_u$ e le altre derivate parziali di $\mathbf{x}$ come vettori in $\mathbb{R}^n$, a meno che, per qualche ragione teorica, non ci serva vederli come vettori tangenti nel punto di applicazione.

Lemma 6.5.1. *Sia* $\mathbf{p}$ *un punto su una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$*. Allora lo spazio tangente* $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ *a* $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p}$ *è un sottospazio vettoriale bidimensionale di* $\mathbb{R}^n_\mathbf{p}$*. Se* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *è una parametrizzazione locale regolare su* $\mathcal{M}$ *con* $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$*, allora*

$$\mathbf{x}_*(\mathbb{R}^2_\mathbf{q}) = \mathcal{M}_\mathbf{p}.$$

Dimostrazione. Segue dal Lemma 6.1.1 che $\mathbf{x}_*(\mathbb{R}^2_\mathbf{q})$ è generato da $\mathbf{x}_u(\mathbf{q})$ e da $\mathbf{x}_v(\mathbf{q})$. La regolarità di $\mathbf{x}$ in $\mathbf{q}$ implica che $\mathbf{x}_*\colon \mathbb{R}^2_\mathbf{q} \longrightarrow \mathbb{R}^n_\mathbf{p}$ sia iniettiva; di conseguenza, $\mathbf{x}_u(\mathbf{q})$ e $\mathbf{x}_v(\mathbf{q})$ sono linearmente indipendenti e $\dim \mathbf{x}_*(\mathbb{R}^2_\mathbf{q}) = 2$ per il Lemma 6.1.3.

D'altra parte, il Lemma 6.1.6 implica che ogni vettore tangente a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{q}$ sia una combinazione lineare di $\mathbf{x}_u(\mathbf{q})$ e $\mathbf{x}_v(\mathbf{q})$. Pertanto il lemma è dimostrato. □

Avremo spesso bisogno della nozione di vettore perpendicolare ad una superficie.

Definizione 6.5.2. *Sia* $\mathcal{M}$ *una superficie regolare in* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $\mathbf{z}_\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_\mathbf{p}$ *con* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$*. Diciamo che* $\mathbf{z}_\mathbf{p}$ *è* **normale** *o* **perpendicolare** *a* $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p}$*, se* $\mathbf{z}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$ *per ogni vettore tangente* $\mathbf{v}_\mathbf{p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$*. Denotiamo l'insieme dei vettori normali a* $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p}$ *con* $\mathcal{M}^\perp_\mathbf{p}$*; allora* $\mathbb{R}^n_\mathbf{p} = \mathcal{M}_\mathbf{p} \oplus \mathcal{M}^\perp_\mathbf{p}$*.*

Le nozioni di campo di vettori tangente e di campo di vettori normale si introducono in modo naturale.

Definizione 6.5.3. *Un* **campo di vettori** V *su una superficie regolare* $\mathcal{M}$ *è un'applicazione che associa ad ogni punto* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ *un vettore tangente* $V(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n_\mathbf{p}$*. Diciamo che* V *è* **tangente** *a* $\mathcal{M}$ *se* $V(\mathbf{p}) \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$ *per ogni* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ *e che* V *è* **normale** *o* **perpendicolare** *a* $\mathcal{M}$ *se* $V(\mathbf{p}) \in \mathcal{M}^\perp_\mathbf{p}$ *per ogni* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$*.*

6.6 Applicazioni tra superfici

La definizione di differenziabilità di un'applicazione tra superfici regolari è simile a quella di una funzione a valori reali su una superficie regolare.

Definizione 6.6.1. *Un'applicazione* $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ *da una superficie regolare ad un'altra è* **differenziabile***, se, date due qualunque parametrizzazioni locali regolari iniettive* $\mathbf{x}$ *di* $\mathcal{M}$ *e* $\mathbf{y}$ *di* $\mathcal{N}$*, la composizione* $\mathbf{y}^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}$ *è differenziabile. Quando questo accade, diremo che* F *è una* **applicazione tra superfici***.*

L'esempio più semplice di applicazione tra superfici è l'applicazione identità $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ (definita da $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ per un qualunque $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$).

Definizione 6.6.2. *Un* **diffeomorfismo** *tra superfici regolari $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ è un'applicazione differenziabile $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ che ha un'inversa, cioè, un'applicazione tra superfici $G\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ tale che*

$$G \circ F = \mathbf{1}_{\mathcal{M}} \qquad e \qquad F \circ G = \mathbf{1}_{\mathcal{N}},$$

dove $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ e $\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ denotano le applicazioni identità di $\mathcal{M}$ e di $\mathcal{N}$.

Definizione 6.6.3. *Sia $\mathcal{U}$ un sottoinsieme aperto di $\mathcal{M}$. Diremo che un'applicazione*

$$\varphi\colon \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

è un **diffeomorfismo locale** *in $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$, se esiste un intorno $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ di $\mathbf{p}$ tale che la restrizione di φ a $\mathcal{V}$ sia un diffeomorfismo tra $\mathcal{V}$ e un sottoinsieme aperto $\varphi(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{N}$.*

Così come una superficie regolare ha uno spazio tangente, anche un'applicazione differenziabile tra superfici ha un'applicazione tangente.

Definizione 6.6.4. *Siano $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ due superfici regolari in $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Sia $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un'applicazione differenziabile tra superfici. Allora* **l'applicazione tangente** *di F in $\mathbf{p}$ è l'applicazione*

$$F_*\colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{N}_{F(\mathbf{p})}$$

definita nel modo seguente. Per $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, scegliamo una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ tale che $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Definiamo quindi $F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$ come la velocità iniziale della curva immagine $F \circ \boldsymbol{\alpha}\colon \longrightarrow \mathcal{N}$; cioè,

$$F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (F \circ \boldsymbol{\alpha})'(0).$$

Lemma 6.6.1. *Sia $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un'applicazione differenziabile tra superfici, e sia $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. La definizione di $F_*(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$ è indipendente dalla scelta della curva $\boldsymbol{\alpha}$ tale che $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Inoltre, $F_*\colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{N}_{F(\mathbf{p})}$ è un'applicazione lineare.*

Dimostrazione. Siano $\boldsymbol{\alpha}$ ed $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ due curve in $\mathcal{M}$ con $\boldsymbol{\alpha}(0) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione locale regolare su $\mathcal{M}$ tale che $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$. Poniamo

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbf{x}\big(\widetilde{u}(t), \widetilde{v}(t)\big).$$

Proprio come nella dimostrazione del Lemma 6.1.6, la regola della catena per le curve implica che

$$(F \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) = u'(t)\big(F \circ \mathbf{x}\big)_u\big(u(t), v(t)\big) + v'(t)\big(F \circ \mathbf{x}\big)_v\big(u(t), v(t)\big)$$

e

$$(F \circ \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})'(t) = \widetilde{u}'(t)(F \circ \mathbf{x})_u\big(\widetilde{u}(t), \widetilde{v}(t)\big) + \widetilde{v}'(t)(F \circ \mathbf{x})_v\big(\widetilde{u}(t), \widetilde{v}(t)\big).$$

Dal momento che $u(0) = \widetilde{u}(0) = u_0$, $v(0) = \widetilde{v}(0) = v_0$, $u'(0) = \widetilde{u}'(0)$ e $v'(0) = \widetilde{v}'(0)$, si ha che

$$F_*(\mathbf{v_p}) = (F \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = (F \circ \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})'(0).$$

Questo dimostra che $F_*(\mathbf{v_p})$ non dipende dalla scelta di $\boldsymbol{\alpha}$. Per quanto riguarda la linearità di F_*, osserviamo che

$$F_*(\mathbf{v_p}) = u'(0)(F \circ \mathbf{x})_u\big(u(0), v(0)\big) + v'(0)(F \circ \mathbf{x})_v\big(u(0), v(0)\big).$$

Dal momento che $u'(0)$ e $v'(0)$ dipendono linearmente da $\mathbf{v_p}$, risulta che F_* deve essere lineare. □

Si ha la seguente conseguenza del teorema della funzione inversa in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.6.1. *Se $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ sono superfici regolari e $\varphi\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{N}$ è un'applicazione differenziabile di un sottoinsieme aperto $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ tale che l'applicazione tangente φ_* di φ in $\mathbf{p} \in \mathcal{W}$ sia un isomorfismo, allora φ è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{p}$.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ ed $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{N}$ due parametrizzazioni locali regolari iniettive di $\mathcal{M}$ e di $\mathcal{N}$ tali che l'intersezione $(\varphi \circ \mathbf{x})(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ sia non vuota. Riducendo, se necessario, i dominii di definizione di $\mathbf{x}$ e di $\mathbf{y}$, possiamo supporre che $(\varphi \circ \mathbf{x})(\mathcal{U}) = \mathbf{y}(\mathcal{V})$. Allora l'applicazione tangente di $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}$ è un isomorfismo ed il teorema della funzione inversa per $\mathbb{R}^2$ implica che l'applicazione $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}$ abbia un'inversa locale. Pertanto anche φ ammette un'inversa locale. □

Esempi di applicazioni tra superfici

1. Sia $\mathbf{y}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ una parametrizzazione locale regolare su una superficie regolare $\mathcal{M}$. Il Corollario 6.4.2 implica che $\mathbf{y}$ sia un diffeomorfismo tra le superfici regolari $\mathcal{U}$ e $\mathbf{y}(\mathcal{U})$.

2. Sia $S^2(a) = \{\, \mathbf{p} \mid \|\mathbf{p}\| = a\}$ la sfera di raggio a in $\mathbb{R}^3$. Allora **l'applicazione antipodale antipodal**$\colon S^2(a) \longrightarrow S^2(a)$ è definita da **antipodal**$(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Essa è un diffeomorfismo.

3. Sia $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo, e sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ una superficie regolare. Allora la restrizione $F|\mathcal{M}\colon \mathcal{M} \longrightarrow F(\mathcal{M})$ è un diffeomorfismo tra superfici regolari. In particolare, ogni movimento euclideo di $\mathbb{R}^n$ dà luogo ad una applicazione tra superfici.

6.7 Superfici di livello in $\mathbb{R}^3$

Sinora abbiamo considerato superfici regolari definite da parametrizzazioni locali. Tale descrizione è detta una **rappresentazione parametrica**. Un altro modo per descrivere una superficie regolare $\mathcal{M}$ è costituito dalla **rappresentazione non parametrica**. Per una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ questo significa che $\mathcal{M}$ è l'insieme dei punti trasformati da una funzione differenziabile $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ nello stesso numero reale.

Definizione 6.7.1. *Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e c un numero reale. Allora l'insieme*

$$\mathcal{M}(c) = \{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{p}) = c \,\}$$

è chiamato la **superficie di livello** *di g corrispondente a c.*

Teorema 6.7.1. *Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e c un numero reale. Allora la superficie di livello $\mathcal{M}(c)$ di g è una superficie regolare se è non vuota e se il gradiente* **grad**g *è non nullo in tutti i punti di $\mathcal{M}(c)$. Quando queste condizioni sono soddisfatte,* **grad**g *è ovunque perpendicolare a $\mathcal{M}(c)$.*

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(c)$ dobbiamo trovare una parametrizzazione locale regolare su un intorno di $\mathbf{p}$. L'ipotesi che sia $(\mathbf{grad}g)(\mathbf{p}) \neq 0$ equivale a dire che almeno una delle derivate parziali

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right\}$$

è diversa da zero in $\mathbf{p}$. Supponiamo che $\big(\partial g/\partial z\big)(\mathbf{p}) \neq 0$. Il teorema della funzione implicita afferma che l'equazione $g(x, y, z) = c$ può essere risolta rispetto a z. Più precisamente, esiste una funzione h tale che

$$g\big(x, y, h(x, y)\big) = c.$$

Allora la parametrizzazione locale cercata è definita da $\mathbf{x}(u, v) = \big(u, v, h(u, v)\big)$.

Inoltre, sia $\mathbf{v_p} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}(c)_{\mathbf{p}}$. Allora esiste una curva $\boldsymbol{\alpha}$ su $\mathcal{M}(c)$ con $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_p}$. Poniamo $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big)$. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$

giace su $\mathcal{M}(c)$, si ha $g\big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big) = c$ per ogni t. La regola della catena implica che

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} \circ \boldsymbol{\alpha} \right) \frac{da_i}{dt} = 0.$$

In particolare,

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial u_i}\big(\boldsymbol{\alpha}(0)\big) \frac{da_i}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{p}) v_i = (\mathbf{grad} g)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}.$$

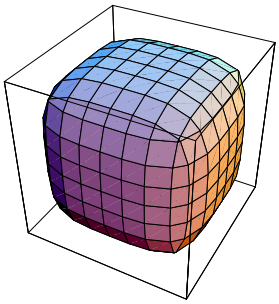
Pertanto $(\mathbf{grad} g)(\mathbf{p})$ è perpendicolare a $\mathcal{M}(c)_\mathbf{p}$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(c)$ □

Come esempio, consideriamo la funzione $g[n]\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g[n](x, y, z) = x^n + y^n + z^n,$$

dove n è un intero pari maggiore o uguale a 2.
Il gradiente di $g[n]$

$$\{n x^{-1+n}, n y^{-1+n}, n z^{-1+n}\}$$



La superficie regolare
$x^4 + y^4 + z^4 = 1$

Pertanto $\mathbf{grad}(g[n])(x, y, z) = 0$ se e solo se $x = y = z = 0$. Quindi l'insieme $\{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g[n](\mathbf{p}) = c \,\}$ è una superficie regolare per ogni $c > 0$. Ovviamente, $\{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g[2](\mathbf{p}) = c \,\}$ è una sfera. Al crescere di n, $\{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g[n](\mathbf{p}) = c \,\}$ diventa sempre più simile ad un cubo.

Osserviamo che ci sono funzioni g per le quali l'insieme $\{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{p}) = c \,\}$ è costituito da più componenti. Per esempio, la superficie regolare definita da

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\big((x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1\big) = 0$$

è costituita da due sfere disgiunte.

Essendo il gradiente di una funzione $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sempre perpendicolare a ciascuna delle sue superfici di livello, c'è un metodo semplice per ottenere l'applicazione di Gauss per tali superfici.

Lemma 6.7.1. *Sia* $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile e* c *un numero tale che* $\mathbf{grad}g$ *sia non nullo in tutti i punti della superficie di livello* $\mathcal{M}(c) = \{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{p}) = c \,\}$. *Allora il campo di vettori* $\mathbf{U}$ *definito da*

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{grad}g(\mathbf{p})}{\|\mathbf{grad}g(\mathbf{p})\|}$$

è un campo unitario normale globalmente definito su $\mathcal{M}(c)$. *Pertanto possiamo definire l'applicazione di Gauss di* $\mathcal{M}(c)$ *come* $\mathbf{U}$ *considerato come un'applicazione* $\mathbf{U}\colon \mathcal{M}(c) \longrightarrow S^2(1)$.

6.8 Esercizi

1. Denotiamo con A^T la trasposta di una matrice A. Si dimostri che la matrice jacobiana di una parametrizzazione locale $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è legata ad $\mathbf{x}_u$ e ad $\mathbf{x}_v$ dalla formula

$$\mathcal{J}(\mathbf{x})\mathcal{J}(\mathbf{x})^T = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix}.$$

   Si dimostri che, per $n = 3$, si ha

$$\det\big(\mathcal{J}(\mathbf{x})\mathcal{J}(\mathbf{x})^T\big) = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2.$$

2. Si trovino i punti in cui la parametrizzazione locale

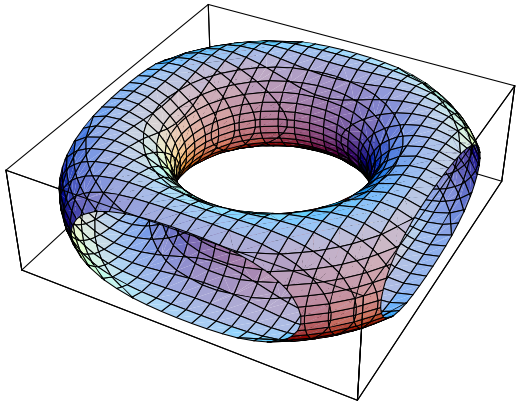
$$(u, v) \longmapsto (\cos u \cos v \sin v, \sin u \cos v \sin v, \sin v)$$

   è regolare.

3. Un toro può essere definito come la superficie di livello $\mathcal{M}(b^2)$ della funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y, z) = z^2 + \big(\sqrt{x^2 + y^2} - a\big)^2,$$

   dove $a > b > 0$. Si dimostri che tale toro è una superficie regolare e si calcoli il suo campo normale unitario.



Implicit plot di un toro

4. Si dimostri che la mappa di Gauss di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ è un'applicazione tra la superficie $\mathcal{M}$ e la sfera unitaria $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$.

Capitolo 7

Superfici Non Orientabili

Un evento importante per lo sviluppo della teoria delle superfici fu la scoperta, nel diciannovesimo secolo, dell'esistenza delle superfici non orientabili. Lo scopo di questo capitolo è di arrivare ad una buona comprensione della geometria di tali superfici. Nel Paragrafo 7.1 diamo la definizione precisa dell'orientabilità di una superficie regolare. Alcuni esempi di superfici non orientabili vengono descritti inizialmente nel Paragrafo 7.2; essi si ottengono identificando in modo opportuno lati opposti di un quadrato. Queste sono le costruzioni topologiche di alcune delle superfici non orientabili più semplici. Il resto del capitolo è dedicato alla descrizione di superfici non orientabili viste in $\mathbb{R}^3$. Nei Paragrafi 7.3, 7.4 e 7.6 mostriamo come si disegnano il nastro di Möbius, la bottiglia di Klein, ed il piano proiettivo reale.

7.1 Orientabilità delle superfici

Se V è uno spazio vettoriale bidimensionale, un'applicazione lineare $J\colon V \longrightarrow V$ tale che $J^2 = -I$ è detta una **struttura complessa** su V. Quando $V = \mathbb{R}^2$, questa non è altro che la struttura complessa che abbiamo definito a pagina 7. Abbiamo anche osservato, a pagina 71, che ogni spazio tangente a $\mathbb{R}^2$ possiede una struttura complessa. Più in generale, essendo tutti gli spazi vettoriali bidimensionali isomorfi tra loro, ogni spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ ad una superficie regolare $\mathcal{M}$ ammette una struttura complessa $J_{\mathbf{p}}\colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Comunque, l'applicazione $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}$ può non essere continua come funzione di $\mathbf{p}$. (La continuità di $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}$ significa che $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}X$ è continua per ogni campo di vettori continuo X tangente a $\mathcal{M}$.) Questo conduce alla seguente definizione.

Definizione 7.1.1. *Una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ si dice* **orientabile** *se ogni piano tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ ha una struttura complessa $J_{\mathbf{p}}\colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ tale che $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}$ sia*

una funzione continua. Una superficie regolare **orientata** $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *è una superficie regolare orientabile insieme con una scelta della struttura complessa* $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}$.

Vedremo nel Capitolo 16 che questa definizione è valida anche per le superfici non contenute in $\mathbb{R}^n$. Per le superfici regolari contenute in $\mathbb{R}^3$ c'è un modo più intuitivo di descrivere l'orientabilità.

Teorema 7.1.1. *Una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *è orientabile se e solo se esiste un'applicazione continua* $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$ *che associa ad ogni* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ *un vettore normale unitario* $\mathbf{U}(\mathbf{p}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}^{\perp}$.

Dimostrazione. Supponiamo data l'applicazione $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$. Allora per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ definiamo $J_{\mathbf{p}} \colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ ponendo

$$J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \mathbf{U}(\mathbf{p}) \times \mathbf{v}_{\mathbf{p}}.$$

Si verifica facilmente che $J_{\mathbf{p}}$ applica $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ in $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ e non soltanto in $\mathbb{R}^3_{\mathbf{p}}$, e che $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}$ è continua. Dalla 3.3 segue che

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{p}}^2\mathbf{v}_{\mathbf{p}} &= \mathbf{U}(\mathbf{p}) \times \big(\mathbf{U}(\mathbf{p}) \times \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\big) \\ &= \big(\mathbf{U}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\big)\mathbf{U}(\mathbf{p}) - \big(\mathbf{U}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p})\big)\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \\ &= -\mathbf{v}_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, data una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ dotata di una struttura complessa continua globalmente definita da $\mathbf{p} \longmapsto J_{\mathbf{p}}$, definiamo $\mathbf{U}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3_{\mathbf{p}}$ ponendo

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}\|} \tag{7.1}$$

per ogni vettore non nullo $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Allora $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ è perpendicolare sia a $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ che a $J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Dal momento che $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ e $J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ formano una base per $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, segue che $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ è perpendicolare a $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Per verificare che $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ definito dalla 7.1 è indipendente dalla scelta di $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$, sia $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$ un altro vettore tangente non nullo in $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Allora $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$ è una combinazione lineare di $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ e di $J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$:

$$\mathbf{w}_{\mathbf{p}} = a\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + bJ_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}.$$

Pertanto

$$\mathbf{w}_{\mathbf{p}} \times J_{\mathbf{p}}\mathbf{w}_{\mathbf{p}} = (a\,\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + b\,J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \times (-b\,\mathbf{v}_{\mathbf{p}} + a\,J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = (a^2 + b^2)(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times J_{\mathbf{p}}\mathbf{v}_{\mathbf{p}}),$$

e quindi

$$\frac{\mathbf{w_p} \times J_\mathbf{p}\mathbf{w_p}}{\|\mathbf{w_p} \times J_\mathbf{p}\mathbf{w_p}\|} = \frac{(a^2+b^2)(\mathbf{v_p} \times J_\mathbf{p}\mathbf{v_p})}{\|(a^2+b^2)(\mathbf{v_p} \times J_\mathbf{p}\mathbf{v_p})\|} = \frac{\mathbf{v_p} \times J_\mathbf{p}\mathbf{v_p}}{\|\mathbf{v_p} \times J_\mathbf{p}\mathbf{v_p}\|}.$$

Perciò il campo normale $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ dato dalla (7.1) è definito in modo univoco. Dal momento che $\mathbf{p} \longmapsto J_\mathbf{p}$ è continua, tale è anche $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$. Quindi $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$ è un campo normale alla superficie $\mathcal{M}$ continuo e globalmente definito □

Il Teorema 7.1.1 ci permette di definire l'applicazione di Gauss di una superficie orientabile regolare arbitraria in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 7.1.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare orientata in $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{U}$ un campo di vettori normale unitario globale su $\mathcal{M}$ che definisce l'orientazione di $\mathcal{M}$. Denotiamo con $S^2(1)$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{U}$, visto come un'applicazione*

$$\mathbf{U}\colon \mathcal{M} \longrightarrow S^2(1),$$

è chiamato **l'applicazione di Gauss** *di $\mathcal{M}$.*

Non è difficile trovare superfici regolari orientabili in $\mathbb{R}^3$.

Lemma 7.1.1. *Il grafico $\mathcal{M}_h$ di una funzione $h\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è una superficie regolare orientabile.*

Dimostrazione. Definiamo una parametrizzazione locale $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}_h$ ponendo

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(u, v, h(u,v)\big).$$

Allora $\mathbf{x}$ copre tutta $\mathcal{M}_h$, cioè, $\mathbf{x}(\mathcal{U}) = \mathcal{M}_h$. Inoltre, $\mathbf{x}$ è regolare e iniettiva. Il campo $\mathbf{U}$ normale a $\mathcal{M}_h$ è dato da

$$\mathbf{U} \circ \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{(-h_u, -h_v, 1)}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}.$$

Dal momento che $\mathbf{U}$ è ovunque diverso da zero, segue dal Teorema 7.1.1 che $\mathcal{M}_h$ è orientabile. □

Più in generale, il metodo utilizzato nella dimostrazione del Lemma 7.1.1 dà il

Lemma 7.1.2. *Ogni superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ che può essere coperta da una sola parametrizzazione locale regolare iniettiva $\mathbf{x}$ è orientabile.*

Ecco un'altra generalizzazione del Lemma 7.1.1.

Lemma 7.1.3. *Siano $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e c un numero tale che grad g sia diverso da zero in tutti i punti della superficie di livello $\mathcal{M}(c) = \{\, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{p}) = c \,\}$. Allora $\mathcal{M}(c)$ e ogni componente di $\mathcal{M}(c)$ sono orientabili.*

Dimostrazione. Il Teorema 6.7.1 implica che $\mathcal{M}(c)$ sia una superficie regolare e che $\operatorname{grad} g$ sia ovunque perpendicolare a $\mathcal{M}(c)$. Stiamo supponendo che $\operatorname{grad} g$ non si annulli mai su $\mathcal{M}(c)$. Ne risulta che

$$\frac{\operatorname{grad} g}{\|\operatorname{grad} g\|}$$

è un campo di vettori unitario che è ben definito in tutti i punti di $\mathcal{M}(c)$ e ovunque perpendicolare a $\mathcal{M}(c)$. Allora il Teorema 7.1.1 dice che $\mathcal{M}(c)$ e ciascuna delle sue componenti è orientabile □

Lemma 7.1.4. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare orientabile connessa in $\mathbb{R}^3$. Allora $\mathcal{M}$ ha esattamente due campi di vettori normali unitari globalmente definiti.*

Dimostrazione. Dal momento che $\mathcal{M}$ è orientabile, essa possiede un campo di vettori normale unitario $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$ globalmente definito. Sia $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{V}(\mathbf{p})$ un altro campo di vettori normale unitario globalmente definito su $\mathcal{M}$. Gli insiemi $\mathcal{W}_\pm = \{\, \mathbf{p} \in \mathcal{M} \mid \mathbf{U}(\mathbf{p}) = \pm\mathbf{V}(\mathbf{p}) \,\}$ sono chiusi, in quanto $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono campi continui. Inoltre $\mathcal{M} = \mathcal{W}_+ \cup \mathcal{W}_-$. Essendo $\mathcal{M}$ connessa si ha che $\mathcal{M}$ coincide o con $\mathcal{W}_+$ oppure con $\mathcal{W}_-$. Di conseguenza, i campi di vettori unitari globalmente definiti su $\mathcal{M}$ sono $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{p} \longmapsto -\mathbf{U}(\mathbf{p})$ □

Definizione 7.1.3. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare orientabile in $\mathbb{R}^3$. Una* **orientazione** *di $\mathcal{M}$ è una scelta di un campo di vettori normale unitario globalmente definito su $\mathcal{M}$.*

In generale può non essere possibile ricoprire una superficie regolare con una sola parametrizzazione locale. Quando si ha una famiglia di parametrizzazioni locali, occorre sapere in quale modo le loro orientazioni sono correlate per poter definire l'orientazione di una superficie regolare.

Lemma 7.1.5. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Se $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ e $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ sono parametrizzazioni locali tali che $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ sia non vuoto, allora*

$$\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v = \det\big(\mathfrak{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})\big)\, \mathbf{x}_{\bar{u}} \times \mathbf{x}_{\bar{v}},$$

dove con $\mathfrak{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})$ abbiamo denotato la matrice jacobiana di $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$.

Dimostrazione. Segue dal Lemma 6.4.4 che

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{v}}\right) \times \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\mathbf{x}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\mathbf{x}_{\bar{v}}\right) \\
&= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{x}_{\bar{u}} \times \mathbf{x}_{\bar{v}} \\
&= \det\left(\mathfrak{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})\right) \mathbf{x}_{\bar{u}} \times \mathbf{x}_{\bar{v}}
\end{aligned}$$

□

Definizione 7.1.4. *Si dice che due parametrizzazioni locali* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *e* $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ *su una superficie regolare* $\mathcal{M}$ *con* $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ *non vuoto sono* **coerentemente orientate**, *se il determinante della matrice jacobiana* $\mathfrak{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})$ *è positivo su* $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$.

Teorema 7.1.2. *Una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *è orientabile se e solo se è possibile ricoprire* $\mathcal{M}$ *con una famiglia* $\mathfrak{B}$ *di parametrizzazioni locali regolari iniettive tale che due sue qualunque parametrizzazioni locali* $(\mathbf{x},\mathcal{U})$, $(\mathbf{y},\mathcal{V})$ *con* $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ *non vuoto siano coerentemente orientate.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{M}$ sia orientabile. Il Teorema 7.1.1 implica l'esistenza su $\mathcal{M}$ di un campo normale globalmente definito $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{U}(\mathbf{p})$. Sia $\mathfrak{A}$ una famiglia di parametrizzazioni locali iniettive regolari la cui unione ricopre $\mathcal{M}$. Senza ledere la generalità possiamo supporre che il dominio di ogni parametrizzazione locale in $\mathfrak{A}$ sia connesso. A partire da $\mathfrak{A}$ dobbiamo costruire una famiglia $\mathfrak{B}$ di parametrizzazioni locali coerentemente orientate la cui unione ricopre $\mathcal{M}$.

A questo scopo osserviamo innanzi tutto che se $\mathbf{x}$ è un'arbitraria parametrizzazione locale regolare iniettiva su $\mathcal{M}$, allora $\widetilde{\mathbf{x}}$ definita da

$$\widetilde{\mathbf{x}}(u,v) = \mathbf{x}(v,u)$$

è anch'essa una parametrizzazione locale regolare iniettiva su $\mathcal{M}$. Inoltre, $\widetilde{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{x}$ hanno orientazione opposta, in quanto $\widetilde{\mathbf{x}}_u \times \widetilde{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u$. Ora è chiaro come si scelgono le parametrizzazioni locali che devono costituire la famiglia $\mathfrak{B}$. Se $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale in $\mathfrak{A}$ e

$$\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \mathbf{U}$$

poniamo $\mathbf{x}$ in $\mathfrak{B}$, ma se

$$\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = -\mathbf{U}$$

poniamo $\widetilde{\mathbf{x}}$ in $\mathfrak{B}$. Allora $\mathfrak{B}$ è una famiglia di parametrizzazioni locali coerentemente orientate che copre $\mathcal{M}$.

Reciprocamente, supponiamo che $\mathcal{M}$ sia coperta da una famiglia $\mathfrak{B}$ di parametrizzazioni locali coerentemente orientate. Se $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale in $\mathfrak{B}$ su $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, definiamo $\mathbf{U}_\mathbf{x}$ su $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ ponendo

$$\mathbf{U}_\mathbf{x}\big(\mathbf{x}(u,v)\big) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(u,v).$$

Sia $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ un'altra parametrizzazione locale in $\mathfrak{B}$ con $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ non vuoto. Il Lemma 7.1.5 implica che su $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ si abbia

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_\mathbf{y}\big(\mathbf{y}(u,v)\big) &= \frac{\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v}{\|\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v\|}(u,v) = \left(\frac{\det \mathcal{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})}{|\det \mathcal{J}(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})|} \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}\right)(u,v) \\
&= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}(u,v) = \mathbf{U}_\mathbf{x}\big(\mathbf{x}(u,v)\big).
\end{aligned}$$

Quindi si ottiene un campo normale alla superficie $\mathbf{U}$ ben definito su $\mathcal{M}$ ponendo $\mathbf{U} = \mathbf{U}_\mathbf{x}$ su $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ per ogni parametrizzazione locale $\mathbf{x}$ in $\mathfrak{B}$. In virtù del Teorema 7.1.1 $\mathcal{M}$ è orientabile □

Dalla dimostrazione del Teorema 7.1.2 risulta:

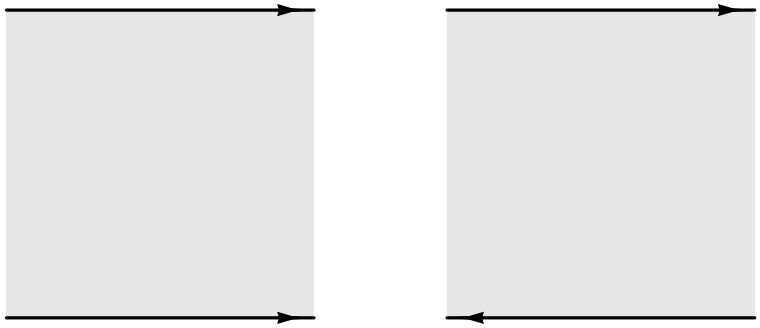
Corollario 7.1.1. *Una famiglia di parametrizzazioni locali coerentemente orientate regolari iniettive su una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ definisce un campo di vettori normale unitario globale su una superficie $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$, cioè un'orientazione di $\mathcal{M}$.*

7.2 Superfici non orientabili ottenute tramite identificazioni

Ci sono interessanti descrizioni topologiche di alcune superfici elementari che sono ottenute identificando lati opposti di un quadrato. Per esempio, se identifichiamo i lati superiore ed inferiore di un quadrato senza effettuare torsioni otteniamo un cilindro. Questa identificazione viene descritta mediante un quadrato con una freccia lungo il lato superiore ed una freccia con lo stesso verso lungo il lato inferiore.

Consideriamo ora un quadrato con i lati superiore e inferiore identificati, ma in senso contrario, cioè in modo che il vertice in alto a sinistra venga identificato con

quello in basso a destra, ed il vertice in basso a sinistra con quello in alto a destra. Indichiamo questa identificazione per mezzo di una freccia lungo il lato superiore del quadrato ed una freccia opposta lungo il lato inferiore. La superficie che ne risulta è chiamata **nastro di Möbius.**[1]



(a) **Cilindro** (b) **Nastro di Möbius**

È molto facile mettere un cilindro nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, ma non è altrettanto semplice trovare una buona parametrizzazione di un nastro di Möbius in $\mathbb{R}^3$. Torneremo fra poco su questo problema.

Vediamo ora cosa accade quando identifichiamo sia i lati verticali che i lati orizzontali di un quadrato. Ci sono tre possibilità. Se le frecce verticali hanno lo stesso verso, e se anche le frecce orizzontali puntano dalla stessa parte, si ottiene un toro.

La bottiglia di **Klein**[2] è la superficie che si ottiene quando i lati del quadrato che vengono identificati hanno le frecce verticali concordi e quelle orizzontali discordi. È chiaro che se si scambia il ruolo dei lati orizzontali con quello dei lati verticali si trova la stessa superficie.

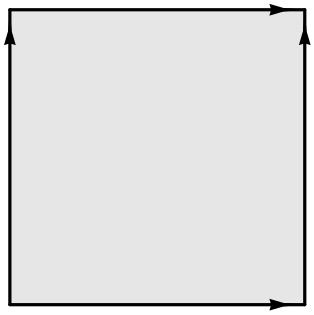
---

[1]

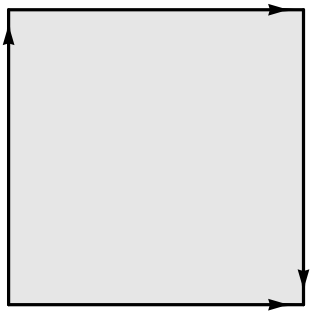
August Ferdinand Möbius (1790–1868). Professore all'Università di Leipzig. Il nome di Möbius è legato a diversi importanti oggetti matematici come la funzione di Möbius, la formula di inversione di Möbius e le trasformazioni di Möbius. Egli scoprì il nastro di Möbius all'età di 71 anni.

[2]

Christian Felix Klein (1849–1925). Klein apportò contributi sostanziali in molte branche della matematica, tra cui la matematica applicata e la fisica matematica. Il suo Programma di Erlangen (1872) costituì un potente stimolo per le ricerche in geometria per mezzo secolo; il suo lavoro successivo sulle superfici di Riemann mise in evidenza il loro ruolo essenziale in teoria delle funzioni. Nei suoi scritti Klein si occupò del divario che egli vedeva in continuo sviluppo tra la crescente astrazione della matematica e, da una parte, i campi applicativi, i cui professionisti non riconoscevano il ruolo fondamentale della matematica, e, dall'altra, l'istruzione matematica nella scuola secondaria.

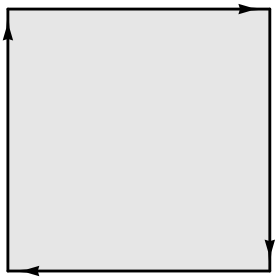


(a) **Toro**



(b) **Bottiglia di Klein**

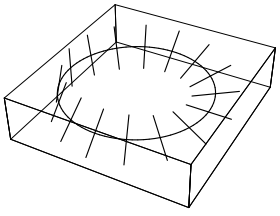
Infine, la superficie che otteniamo quando identifichiamo i lati del quadrato in cui sia le frecce verticali che quelle orizzontali sono discordi è chiamata il **piano proiettivo reale**. Questa superficie può anche essere immaginata come una sfera con i punti antipodali identificati. Abbiamo dato una descrizione topologica del nastro di Möbius, della bottiglia di Klein e del piano proiettivo reale. Tutte queste superfici risultano essere non orientabili. Ma la ricerca di una parametrizzazione di queste superfici in $\mathbb{R}^3$ è una questione un po' più complicata, e costituisce l'argomento del resto di questo capitolo.



Piano proiettivo

7.3 Il nastro di Möbius

Un'altra utile descrizione topologica del nastro di Möbius la si ottiene considerando la superficie generata dalla rotazione attorno ad un asse di un segmento di retta che ruota anche attorno al suo punto medio in modo che, nel momento in cui questo punto medio completa una circonferenza (nel piano perpendicolare all'asse), il segmento riprende la posizione iniziali con gli estremi scambiati.



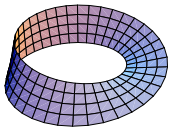
Segmenti che ruotano in modo da formare un nastro di Möbius

Possiamo servirci di questo modello per trovare una parametrizzazione del nastro di

Möbius:

$$\text{(7.2)} \qquad \mathbf{moebiusstrip}[\boldsymbol{a}](u,v) = \Big(a\cos u + v\cos\Big(\frac{u}{2}\Big)\cos u,\; a\sin u + v\cos\Big(\frac{u}{2}\Big)\sin u, v\sin\Big(\frac{u}{2}\Big)\Big),$$

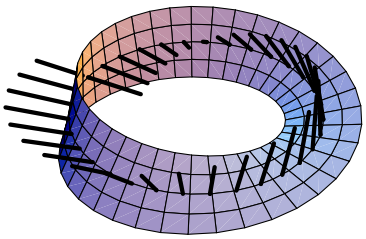
Non è difficile vedere che $u \longmapsto \mathbf{moebiusstrip}[\boldsymbol{a}](u,0)$ è la circonferenza mediana del nastro di Möbius, e che ogni $v \longmapsto \mathbf{moebiusstrip}[\boldsymbol{a}](u_0,v)$ è un segmento di retta che incontra la circonferenza mediana. Quando u_0 varia da 0 a 2π, l'angolo tra l'asse z e la retta $v \longmapsto \mathbf{moebiusstrip}[\boldsymbol{a}](u_0,v)$ va da 0 a π.



Nastro di Möbius

```
ParametricPlot3D[
moebiusstrip[1][u,v]
//Evaluate,
{u,0,2Pi},{v,-0.3,0.3},
PlotPoints->{40,5},
Axes->None,Boxed->False];
```

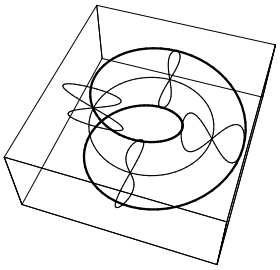
Ogni tentativo di definire un campo di vettori normale unitario su tutto il nastro di Möbius è destinato a fallire. Naturalmente, è sempre possibile definire localmente un campo normale unitario. Se però uno cerca di estendere la definizione del campo normale unitario a tutto il nastro di Möbius percorrendo la circonferenza mediana, si rende conto che quando arriva al punto di partenza, in questo punto il campo normale unitario è andato a finire sull'"altro lato" della superficie.



Segmenti normali ad un nastro di Möbius

7.4 La bottiglia di Klein

La bottiglia di Klein è anch'essa una superficie non orientabile, ma diversamente dal nastro di Möbius, essa è compatta. Un modo per definire la bottiglia di Klein è il seguente. È la superficie che si ottiene facendo ruotare attorno ad un asse una curva a otto, che però mentre ruota è soggetta ad una torsione. Pertanto la rotazione e la torsione sono uguali a quelle che generano un nastro di Möbius, ma al posto di un segmento si utilizza una curva a otto.

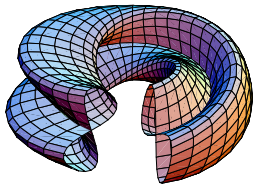


Curve a otto che ruotando formano una bottiglia di Klein

Ecco una parametrizzazione della bottiglia di Klein ottenuta mediante questa costruzione.

$$\begin{aligned}\textbf{kleinbottle}[\boldsymbol{a}](u,v) \quad = \quad & \Bigg(\left(a+\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin v-\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin 2v\right)\cos u, \\ & \left(a+\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin v-\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin 2v\right)\sin u, \\ & \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin v+\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin 2v\Bigg),\end{aligned}$$

La circonferenza mediana della bottiglia di Klein è $u \longmapsto \textbf{kleinbottle}[\boldsymbol{a}](u,0)$, e ognuna delle curve $v \longmapsto \textbf{kleinbottle}[\boldsymbol{a}](u_0,v)$ è a curva a otto. Mentre u varia da 0 a 2π, la curva a otto ruota da 0 a π; questa è la stessa torsione che abbiamo visto nella parametrizzazione 7.2 del nastro di Möbius.



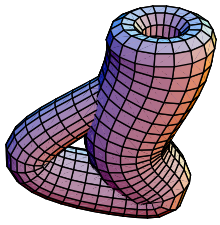
La bottiglia di Klein

La bottiglia di Klein non è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ in quanto essa contiene autointersezioni. Tuttavia, si può dimostrare che la bottiglia di Klein è una superficie astratta. Questo concetto verrà definito nel Capitolo 16.

7.5 Un'altra bottiglia di Klein

Ci sono due tipi di bottiglia di Klein in $\mathbb{R}^3$. La prima, che denotiamo con $\mathcal{K}_1$, descritta nel Paragrafo 7.4, contiene un intorno $\mathcal{V}_1$ della curva di autointersezione che non è orientabile. La non orientabilità di $\mathcal{V}_1$ è praticamente evidente. Infatti, quando la curva a otto si muove dando luogo alla superficie, esso è descritto da una "**X**" che, mentre ruota attorno all'asse, effettua anche una torsione.

La descrizione originale di Klein (si veda [HC-V, pagine 308-311]) della sua superficie è molto diversa, ed è la seguente. Consideriamo un tubo $\mathcal{T}$ di raggio variabile attorno ad una curva. Topologicamente, un toro si ottiene da $\mathcal{T}$ piegando il tubo sino ad accostare tra loro le estremità e poi incollando insieme le due circonferenze dei bordi. Ma c'è un altro modo per incollare le due circonferenze del bordo del tubo. Facciamo in modo che ad un'estremità il tubo $\mathcal{T}$ sia un po' più stretto che all'altra. Pieghiamo $\mathcal{T}$ e facciamo penetrare l'estremità più stretta nella superficie del tubo, disponendola in modo che sia concentrica e complanare con l'estremità più larga. A questo punto completiamo la superficie raccordando le due circonferenze tramite un mezzo toro dall'altro lato del loro piano. Il risultato si può vedere nella figura seguente.



Bottiglia di Klein con un intorno orientabile della curva di autointersezione

```
ParametricPlot3D[Evaluate[
kleinbottlebis[1,2][u,v]],
{u,-Pi,29.9517},
{v,-Pi,Pi},
ViewPoint->{-2,0,-3},
PlotPoints->{49,19},
Axes->None,Boxed->False]
```

Per vedere che questa nuova bottiglia di Klein $\mathcal{K}_2$ è (come superficie in $\mathbb{R}^3$) diversa dalla bottiglia di Klein $\mathcal{K}_1$ ottenuta mediante rotazione e torsione opportune della curva a otto, consideriamo un intorno $\mathcal{V}_2$ della curva di autointersezione di $\mathcal{K}_2$. Questo intorno è generato da delle "**X**" ed è orientabile. Quindi la differenza tra $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ è costituita dal fatto che $\mathcal{V}_1$ non è orientabile, mentre $\mathcal{V}_2$ è orientabile. Cionondimeno, $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ sono topologicamente la stessa superficie, in quanto esse sono entrambe ottenute identificando i lati di un quadrato, come abbiamo visto nel Paragrafo 7.2.

A questa nuova versione della bottiglia di Klein daremo il nome di **kleinbottlebis**.

7.6 Realizzazioni del piano proiettivo reale

Sia $S^2(a) = \{\, \mathbf{p} \mid \|\mathbf{p}\| = a\}$ la sfera di raggio a in $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo che **l'applicazione antipodale** della sfera $S^2(a) \subset \mathbb{R}^3$ è il diffeomorfismo **antipodal**: $S^2(a) \longrightarrow S^2(a)$ definito da **antipodal**$(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Il piano proiettivo reale $\mathbb{R}P^2(a)$ può essere definito come l'insieme che si ottiene quando i punti antipodali di $S^2(a)$ vengono identificati; perciò

$$\mathbb{R}P^2(a) = \big\{\, \{\mathbf{p}, -\mathbf{p}\} \mid \|\mathbf{p}\| = a \,\big\}.$$

Per realizzare il piano proiettivo reale come superficie in $\mathbb{R}^3$ cerchiamo un'applicazione di $\mathbb{R}^3$ in sè con una particolare proprietà.

Definizione 7.6.1. *Un'applicazione* $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$F(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) \tag{7.3}$$

si dice che gode della **proprietà antipodale**.

Che ci si possa servire di un'applicazione con la proprietà antipodale per realizzare il piano proiettivo reale è conseguenza del seguente lemma, di dimostrazione immediata:

Lemma 7.6.1. *Un'applicazione* $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *con la proprietà antipodale dà luogo ad un'applicazione* $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}P^2(a) \longrightarrow F\big(S^2(a)\big) \subset \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$\widetilde{F}(\{\mathbf{p}, -\mathbf{p}\}) = F(\mathbf{p}).$$

Quindi possiamo realizzare $\mathbb{R}P^2(a)$ come l'immagine di $S^2(a)$ tramite un'applicazione F che gode della proprietà antipodale. (Naturalmente occorre scegliere F in modo che la sua matrice jacobiana abbia determinante nullo solo in pochi punti. Per far questo basta scegliere come componenti di F certi polinomi quadratici.) Inoltre, ogni parametrizzazione locale $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow S^2(a)$ dà origine ad una parametrizzazione locale $\widetilde{\mathbf{x}}\colon \mathcal{U} \longrightarrow F\big(S^2(a)\big)$ definita da

$$\widetilde{\mathbf{x}}(u, v) = F\big(\mathbf{x}(u, v)\big).$$

Ora diamo due esempi di applicazioni con la proprietà antipodale; ciascuno di essi dà luogo ad una realizzazione di $\mathbb{R}P^2(a)$.

Superficie romana di Steiner

La superficie che è ora nota come superficie romana di Steiner venne scoperta nel 1844 da Jakob Steiner durante una sua visita a Roma. (Si veda [Apéry, pagina 37].) Essa

è una realizzazione del piano proiettivo reale. Per descriverla, definiamo innanzi tutto un'applicazione **romanmap**: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\mathbf{romanmap}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

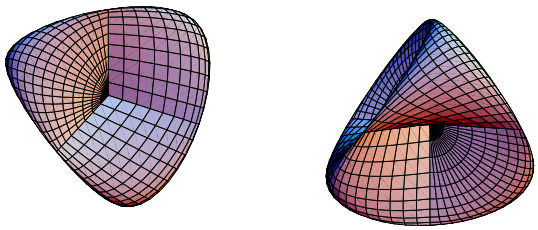
Si vede immediatamente che **romanmap** gode della proprietà antipodale; quindi **romanmap** induce un'applicazione di $\mathbb{R}P^2(a)$ su $\mathbf{romanmap}\big(S^2(a)\big)$. Chiamiamo questa immagine la **superficie romana di Steiner**[3] di raggio a. Inoltre, possiamo rappresentare graficamente una porzione di $\mathbf{romanmap}\big(S^2(a)\big)$ componendo **romanmap** con una qualunque parametrizzazione locale su $S^2(a)$, per esempio, con la parametrizzazione naturale $\mathbf{sphere}[\boldsymbol{a}]$ $(u, v) \longmapsto (a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v)$. Allora la composizione $\mathbf{romanmap} \circ \mathbf{sphere}[\boldsymbol{a}]$ parametrizza tutta la superficie romana di Steiner di raggio a.

$$\frac{a^2 Cos[v]^2 Sin[2u]}{2}, \frac{a^2 Sin[u]^2 Sin[2v]}{2}, \frac{a^2 Cos[u] Sin[2v]}{2}$$

Quindi definiamo

$$\mathbf{roman}[\boldsymbol{a}](u, v) = \left(\frac{a^2}{2}\right)\big(\sin 2u(\cos v)^2, \sin u \sin 2v, \cos u \sin 2v\big)$$

Ecco la superficie romana di Steiner da due punti di vista.



(a) **Vista frontale** (b) **Vista da tergo**

[3]

Jakob Steiner (1796–1863). Matematico che fu professore presso l'Università di Berlino. Steiner imparò a leggere e a scrivere solo all'età di 14 anni e andò a scuola solo a 18 anni, contro il parere dei suoi genitori. La geometria sintetica venne rivoluzionata da Steiner. Egli nutrì per l'analisi matematica un odio altrettanto profondo quanto quello, almeno a quanto viene affermato in [Cajori], di Lagrange per la geometria. Egli aveva la convinzione che il calcolo sostituisca il ragionamento, e che invece la geometria lo stimoli.

L'origine è un punto triplo della superficie romana di Steiner, essendo

$$\mathbf{romanmap}(\pm 1, 0, 0) = \mathbf{romanmap}(0, \pm 1, 0) = \mathbf{romanmap}(0, 0, \pm 1) = \mathbf{0}.$$

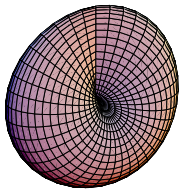
La cuffia incrociata

Un'altra applicazione con la proprietà antipodale è data da

$$\mathbf{crosscapmap}(x, y, z) = \left(y\, z, 2\, x\, y, x^2 - y^2\right)$$

Si ottiene una parametrizzazione della cuffia incrociata in modo analogo a quanto visto per la superficie romana di Steiner: Quindi definiamo

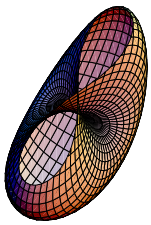
$$\mathbf{crosscap}[\boldsymbol{a}](u, v) = a^2 \left(\frac{\sin u \sin 2v}{2}, \sin 2u \cos^2 v, \cos 2u \cos^2 v\right)$$



```
ParametricPlot3D[crosscap[1][u,v]
//Evaluate,{u,0,Pi},{v,-Pi/2,Pi/2},
PlotPoints->{40,40},
Boxed->False,Axes->None,
ViewPoint->{2.73,-1.47,1.36}];
```

Una cuffia incrociata

L'opzione **PlotRange** può essere utilizzata in modo molto efficace per aprire una cuffia incrociata allo scopo di consentire la vista del suo interno.



```
ParametricPlot3D[crosscap[1][u,v]
//Evaluate,{u,0,Pi},{v,-Pi/2,Pi/2},
PlotPoints->{40,40},
Boxed->False,Axes->None,
PlotRange->{Automatic,Automatic,
{-1,0.5}},ViewPoint->{0.51,-1.0, 3.2}];
```

Una cuffia incrociata tagliata nella sua parte superiore

Capitolo 8

Metriche su superfici

Incominciamo in questo capitolo lo studio della geometria delle superfici che è basata sulle nozioni di distanza e di area. Quando i matematici incominciarono a studiare le superfici, alla fine del secolo XVIII, lo fecero servendosi delle nozioni di distanza infinitesimale e di area infinitesimale. Nei Paragrafi 8.1 e 8.3 sviluppiamo queste nozioni, ma da un punto di vista moderno. Nel Paragrafo 8.2 definiamo e studiamo le isometrie tra superfici.

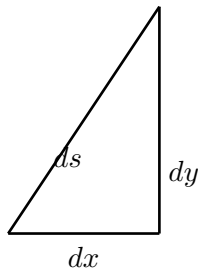
8.1 L'idea intuitiva di distanza su una superficie

Sinora, nel nostro studio sulle superfici non abbiamo ancora visto come si misurano le distanze su di esse. Una delle proprietà fondamentali di cui gode la distanza nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è costituita dal fatto che in tale spazio questa verifica il teorema di Pitagora. Ciò significa che se $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$ sono punti in $\mathbb{R}^n$, allora la distanza s tra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ è data da

$$s^2 = (p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2. \tag{8.1}$$

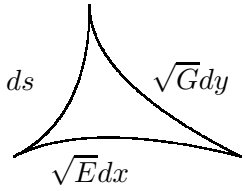
Quanto differisce da questa la nozione di distanza su una superficie? Dal momento che in generale una superficie è curva, la distanza tra due suoi punti misurata su di essa non concide con la distanza tra gli stessi punti misurata nello spazio euclideo; in particolare, questo significa che la formula 8.1 non è più vera in generale su una superficie arbitraria. Per far vedere come si misura una distanza su una superficie dovremo servirci della nozione, matematicamente imprecisa, di infinitesimo. La versione infinitesimale della 8.1 per $n = 2$ è

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{8.2}$$



In questa espressione, possiamo considerare dx e dy come quantità piccole nelle direzioni x e y. La formula 8.2 è valida per $\mathbb{R}^2$. L'espressione corrispondente per una superficie (o più precisamente per una superficie parametrizzata) è

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2. \tag{8.3}$$



Queste sono le notazioni classiche[1] con cui si indica la metrica di una superficie. Possiamo considerare la 8.3 come una versione infinitesimale "deformata" del teorema di Pitagora.

Esistono molti modi per definire metriche su superfici, come vedremo nel Capitolo 16. Una di esse è particolarmente semplice e importante. Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^n$. Il prodotto scalare $\cdot$ di $\mathbb{R}^n$ induce un prodotto scalare su $\mathcal{M}$ per restrizione. Se $\mathbf{v_p}$ e $\mathbf{w_p}$ sono vettori tangenti a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, possiamo considerare il prodotto scalare $\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}$, in quanto $\mathbf{v_p}$ e $\mathbf{w_p}$ sono anch'essi vettori tangenti a $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{p}$.

In questo capitolo avremo a che fare soltanto con proprietà locali della distanza, e pertanto potremo supporre senza ledere la generalità che $\mathcal{M}$ sia l'immagine di una parametrizzazione locale regolare e iniettiva. Tuttavia, le funzioni E, F e G possono essere definite per una qualunque parametrizzazione locale.

Definizione 8.1.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una superficie parametrizzata. Definiamo le funzioni* $E, F, G\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ponendo*

$$E = \|\mathbf{x}_u\|^2, \qquad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \qquad G = \|\mathbf{x}_v\|^2.$$

[1] Queste notazioni (compresa la scelta delle lettere E, F e G) incominciarono ad essere utilizzate agli inizi del secolo XIX. Si possono trovare, per esempio, nelle opere di Gauss. Si veda [Gauss2] e [Dom]. Gauss ebbe l'idea di studiare le proprietà di una superficie che sono indipendenti dal modo in cui essa è situata nello spazio, cioè le proprietà che si possono esprimere in funzione solo di E, F e G. Una di queste proprietà è data nel *Theorema Egregium* di Gauss, che verrà dimostrato nel Paragrafo 14.2.

Allora $ds^2_{\mathbf{x}} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ *è la* **prima forma fondamentale** *della superficie parametrizzata* $\mathbf{x}$ *o la* **metrica riemanniana** *indotta dalla metrica di* $\mathbb{R}^n$.

L'equivalenza della definizione formale di E, F e G con quella data dalla versione infinitesimale 8.3 si comprende meglio se si considerano curve su una superficie.

Lemma 8.1.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una curva contenuta in una superficie parametrizzata regolare e iniettiva* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Allora la funzione lunghezza d'arco* s (*l'ascissa curvilinea*) *della curva* $\boldsymbol{\alpha}$, *con inizio in* $\boldsymbol{\alpha}(c)$, *è data da*

$$s(t) = \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{8.4}$$

Dimostrazione. Poniamo $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big)$ per $a < t < b$. Per definizione di ascissa curvilinea e per il Corollario 6.1.3, a pagina 98, si ha

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_c^t \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|dt = \int_c^t \big\|u'(t)\mathbf{x}_u\big(u(t),v(t)\big) + v'(t)\mathbf{x}_v\big(u(t),v(t)\big)\big\|dt \\ &= \int_c^t \sqrt{u'(t)^2\big\|\mathbf{x}_u\big\|^2 + 2u'(t)v'(t)\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v + v'(t)^2\big\|\mathbf{x}_v\big\|^2}dt \\ &= \int_c^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt \end{aligned}$$

□

Dalla 8.4 segue che

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \tag{8.5}$$

Vogliamo dare una interpretazione della 8.3. Eleviamo al quadrato entrambi i membri della 8.5. Se ora moltiplichiamo (formalmente, anche se tale operazione non è corretta in senso rigoroso) per dt^2, otteniamo la 8.3.

Si osservi che il parametro t non è contenuto nel secondo membro della 8.3, se non per il fatto che u e v dipendono da t. Possiamo considerare ds come la **lunghezza infinitesimale d'arco**, dal momento che esso dà luogo alla funzione lunghezza d'arco quando la integriamo su una curva arbitraria. Geometricamente ds si può interpretare come la **distanza infinitesimale** dal punto $\mathbf{x}(u,v)$ al punto $\mathbf{x}(u+du, v+dv)$ misurata su la superficie.

Osserviamo anche che

$$\boldsymbol{\alpha}(t+dt) \approx \boldsymbol{\alpha}(t) + \boldsymbol{\alpha}'(t)dt = \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathbf{x}_u u'(t)dt + \mathbf{x}_v v'(t)dt,$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\big\|\boldsymbol{\alpha}(t+dt)-\boldsymbol{\alpha}(t)\big\| &\approx \big\|\mathbf{x}_u u'(t)+\mathbf{x}_v v'(t)\big\|dt\\ &= \sqrt{E\,u'^2+2F\,u'v'+G\,v'^2}\,dt = ds.\end{aligned}$$

Una delle nozioni fondamentali della teoria delle funzioni di due variabili è quella di **differenziale** di una funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; il differenziale df di f

è dato da

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

In generale, se $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ è una carta locale ed $f\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, poniamo

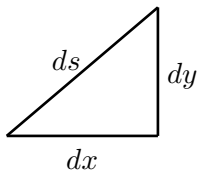
$$df = \frac{\partial (f\circ\mathbf{x})}{\partial u}du + \frac{\partial (f\circ\mathbf{x})}{\partial v}dv.$$

Chiamiamo df **il differenziale** della funzione f. I differenziali delle funzioni $\mathbf{x}(u,v) \longmapsto u$ e $\mathbf{x}(u,v) \longmapsto v$ saranno rappresentati da du e da dv rispettivamente. Nonostante le apparenze, ds sarà di fatto il differenziale di una funzione su una superficie soltanto in rare occasioni.

L'equazione 8.2 rappresenta il ds^2 per $\mathbb{R}^2$ scritto rispetto alle coordinate cartesiane x e y. L'espressione del ds^2 in coordinate polari è diversa.

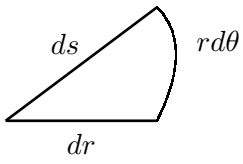
Lemma 8.1.2. *La metrica ds^2 su $\mathbb{R}^2$, data in coordinate cartesiane da*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$



in coordinate polari assume l'espressione

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$



Dimostrazione. Le formule di passaggio da coordinate rettangolari a coordinate polari sono:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\,\sin\theta. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\text{(8.6)} \qquad \begin{cases} dx &= -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr, \\ dy &= r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr. \end{cases}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (-r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr)^2 + (r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

□

Ci serve sapere in che modo l'espressione di una metrica si modifica per un cambiamento di coordinate.

Lemma 8.1.3. *Siano* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *ed* $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ *due parametrizzazioni su una superficie regolare* $\mathcal{M}$ *tali che* $\mathbf{x}(\mathcal{U})\cap\mathbf{y}(\mathcal{V})$ *non sia vuoto. Sia* $\mathbf{x}^{-1}\circ\mathbf{y} = (\bar{u},\bar{v})\colon \mathcal{U}\cap\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ *il cambiamento di coordinate associato, per cui*

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}\big(\bar{u}(u,v),\bar{v}(u,v)\big).$$

Supponiamo che su $\mathcal{M}$ *sia definita una metrica e denotiamo le metriche indotte su* $\mathbf{x}$ *e su* $\mathbf{y}$ *con*

$$ds^2_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}}d\bar{u}^2 + 2F_{\mathbf{x}}d\bar{u}d\bar{v} + G_{\mathbf{x}}d\bar{v}^2 \qquad e \qquad ds^2_{\mathbf{y}} = E_{\mathbf{y}}du^2 + 2F_{\mathbf{y}}du\,dv + G_{\mathbf{y}}dv^2.$$

Allora

$$\text{(8.7)} \qquad \begin{cases} E_{\mathbf{y}} &= E_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2 + 2F_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u} + G_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2, \\ F_{\mathbf{y}} &= E_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v} + F_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v} + \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right) + G_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}, \\ G_{\mathbf{y}} &= E_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2 + 2F_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v} + G_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Dimostrazione. Teniamo conto del Lemma 6.4.4 a pagina 105 per calcolare

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_u\cdot\mathbf{y}_u &= \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{u}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{v}}\right)\cdot\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{u}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\mathbf{x}_{\bar{v}}\right) \\ &= \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2\mathbf{x}_{\bar{u}}\cdot\mathbf{x}_{\bar{u}} + 2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)\mathbf{x}_{\bar{u}}\cdot\mathbf{x}_{\bar{v}} + \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2\mathbf{x}_{\bar{v}}\cdot\mathbf{x}_{\bar{v}} \\ &= \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2 E_{\mathbf{x}} + 2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)F_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2 G_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Le altre espressioni si dimostrano in modo simile. □

8.2 Isometrie e applicazioni conformi tra superfici

Nel Paragrafo 6.6 abbiamo introdotto la nozione di applicazione tra superfici di $\mathbb{R}^n$. Quand'anche l'applicazione Φ fosse un diffeomorfismo locale, l'immagine di una superficie tramite Φ può essere completamente diversa da tale superficie. (Esempi significativi di questo fatto sono le applicazioni **romanmap** e **crosscapmap** del Paragrafo 7.6, che trasformano una sfera nella superficie romana di Steiner e in una cuffia incrociata rispettivamente.) D'altra parte, le applicazioni differenziabili che conservano le distanze infinitesimali distorcono l'immagine molto meno. La ricerca e la caratterizzazione di tali applicazioni ci porta alla seguente definizione.

Definizione 8.2.1. *Siano $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_2$ due superfici regolari in $\mathbb{R}^n$. Un'applicazione tra superfici $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ si chiama* **un'isometria locale** *se la sua applicazione tangente soddisfa alla condizione*

$$\|\Phi_*(\mathbf{v_p})\| = \|\mathbf{v_p}\| \tag{8.8}$$

per tutti i vettori $\mathbf{v_p}$ tangenti a $\mathcal{M}_1$. **Un'isometria** *è un'applicazione tra superfici che è simultaneamente un'isometria locale ed un diffeomorfismo.*

Lemma 8.2.1. *Un'isometria locale è un diffeomorfismo locale.*

Dimostrazione. È facile vedere che la (8.8) implica che ogni applicazione tangente di un'isometria locale Φ sia iniettiva. Dal teorema della funzione inversa risulta allora che Φ è un diffeomorfismo locale. □

Ogni isometria di $\mathbb{R}^n$ che applica una superficie regolare $\mathcal{M}_1$ su una superficie regolare $\mathcal{M}_2$ si restringe ovviamente ad un'isometria tra $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$. Quando si studiano le superfici minime si vede che esistono anche isometrie tra superfici che non sono di questo tipo.

Ecco alcune riformulazioni elementari della definizione di isometria.

Lemma 8.2.2. *La condizione* (8.8) *è equivalente a ciascuna delle seguenti condizioni.*

(i) Per tutti i vettori $\mathbf{v_p}$ e $\mathbf{w_p}$ tangenti ad $\mathcal{M}_1$ si ha

$$\Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p}) = \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}. \tag{8.9}$$

(ii) Per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}_1$ *esistono vettori tangenti linearmente indipendenti* $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathcal{M}_{1\mathbf{p}}$ *tali che*

$$\text{(8.10)} \qquad \begin{cases} \Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{v_p}) &= \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{v_p}, \\ \Phi_*(\mathbf{w_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p}) &= \mathbf{w_p} \cdot \mathbf{w_p}, \\ \Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p}) &= \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}. \end{cases}$$

Dimostrazione. È chiaro che la (8.9) implica la (8.8). Reciprocamente, supponiamo che si abbia la (8.8). Dall'essere Φ_* un'applicazione lineare discende

$$\begin{aligned} \Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p}) &= \frac{1}{2}\big(\|\Phi_*(\mathbf{v_p} + \mathbf{w_p})\|^2 - \|\Phi_*(\mathbf{v_p})\|^2 - \|\Phi_*(\mathbf{w_p})\|^2\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\|(\mathbf{v_p} + \mathbf{w_p})\|^2 - \|\mathbf{v_p}\|^2 - \|\mathbf{w_p}\|^2\big) = \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}. \end{aligned}$$

È anche evidente che la (8.9) implica la (8.10). Reciprocamente, supponiamo che la (8.10) sia vera. Allora per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \|\Phi_*(a\,\mathbf{v_p} + b\,\mathbf{w_p})\|^2 &= \|a\,\Phi_*(\mathbf{v_p}) + b\,\Phi_*(\mathbf{w_p})\|^2 \\ &= a^2\|\Phi_*(\mathbf{v_p})\|^2 + b^2\|\Phi_*(\mathbf{w_p})\|^2 + 2a\,b\,\Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p}) \\ &= a^2\|\mathbf{v_p}\|^2 + b^2\|\mathbf{w_p}\|^2 + 2a\,b\,\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p} = \|a\,\mathbf{v_p} + b\,\mathbf{w_p}\|^2. \end{aligned}$$

Quindi si ha la (8.9). □

Mostriamo ora che un'applicazione tra superfici è un'isometria se e solo se conserva le metriche riemanniane.

Lemma 8.2.3. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale regolare e iniettiva, e sia* $\mathbf{y}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una parametrizzazione locale arbitraria. Siano*

$$ds^2_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}}du^2 + 2F_{\mathbf{x}}dudv + G_{\mathbf{x}}dv^2 \qquad e \qquad ds^2_{\mathbf{y}} = E_{\mathbf{y}}du^2 + 2F_{\mathbf{y}}dudv + G_{\mathbf{y}}dv^2$$

le metriche riemanniane indotte da $\mathbf{x}$ *e da* $\mathbf{y}$*. Allora l'applicazione*

$$\Phi = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}\colon \mathbf{x}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbf{y}(\mathcal{U})$$

è un'isometria locale se e solo se

$$\text{(8.11)} \qquad ds^2_{\mathbf{x}} = ds^2_{\mathbf{y}}.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che

$$\Phi_*(\mathbf{x}_u) = \big((\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1})_*\circ\mathbf{x}_*\big)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \mathbf{y}_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \mathbf{y}_u$$

e che, analogamente, $\Phi_*(\mathbf{x}_v) = \mathbf{y}_v$. Se Φ è un'isometria locale, allora

$$E_{\mathbf{y}} = \|\mathbf{y}_u\|^2 = \|\Phi_*(\mathbf{x}_u)\|^2 = \|\mathbf{x}_u\|^2 = E_{\mathbf{x}}.$$

Allo stesso modo si trova $F_{\mathbf{y}} = F_{\mathbf{x}}$ e $G_{\mathbf{y}} = G_{\mathbf{x}}$; pertanto si ha la (8.11).

Per dimostrare il reciproco, consideriamo una curva $\boldsymbol{\alpha}$ della forma

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big);$$

allora $(\Phi\circ\boldsymbol{\alpha})(t) = \mathbf{y}(u(t), v(t))$. Per il Lemma 6.1.3 sappiamo che

$$\boldsymbol{\alpha}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v \qquad \text{e} \qquad (\Phi\circ\boldsymbol{\alpha})' = u'\mathbf{y}_u + v'\mathbf{y}_v.$$

Pertanto

$$\text{(8.12)} \qquad \begin{cases} \|\boldsymbol{\alpha}'\|^2 &= E_{\mathbf{x}}u'^2 + 2F_{\mathbf{x}}u'v' + G_{\mathbf{x}}v'^2, \\ \|(\Phi\circ\boldsymbol{\alpha})'\|^2 &= E_{\mathbf{y}}u'^2 + 2F_{\mathbf{y}}u'v' + G_{\mathbf{y}}v'^2. \end{cases}$$

Allora la (8.11) e la (8.12) implicano che

$$\text{(8.13)} \qquad \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \|(\Phi\circ\boldsymbol{\alpha})'(t)\|.$$

Dal momento che ogni vettore tangente a $\mathbf{x}(\mathcal{U})$ si può rappresentare come il vettore $\boldsymbol{\alpha}'(0)$ per qualche curva $\boldsymbol{\alpha}$, si ha che Φ è un'isometria. □

Corollario 8.2.1. *Sia $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un'applicazione tra superfici, e consideriamo una parametrizzazione locale $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}_1$ di $\mathcal{M}_1$. Sia $\mathbf{y} = \Phi\circ\mathbf{x}$. Allora Φ è un'isometria locale se e solo se per ogni parametrizzazione locale di $\mathcal{M}_1$ risulta $ds^2_{\mathbf{x}} = ds^2_{\mathbf{y}}$.*

Una metrica riemanniana determina una funzione che misura le distanze su una superficie regolare.

Definizione 8.2.2. *Sia $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ una superficie regolare, e siano $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{M}$. Allora la* **distanza intrinseca** *$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ è l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve $\boldsymbol{\alpha}$ che sono interamente contenute in $\mathcal{M}$ e che uniscono $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$.*

In generale la distanza intrinseca $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ sarà più grande della distanza euclidea data da $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$.

Un'isometria conserva inoltre la distanza intrinseca.

Lemma 8.2.4. *Sia $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un'isometria. Allora Φ conserva le distanze intrinseche $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$ di $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ nel senso seguente:*

$$\boldsymbol{\rho}_2\big(\Phi(\mathbf{p}), \Phi(\mathbf{q})\big) = \boldsymbol{\rho}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \tag{8.14}$$

per tutti i punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}_1$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (c, d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con $\boldsymbol{\alpha}(a) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}(b) = \mathbf{q}$, dove $c < a < b < d$. Dalla definizione di isometria locale segue che

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] = \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt = \int_a^b \|(\Phi \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)\| dt = \mathbf{Length}[\Phi \circ \boldsymbol{\alpha}].$$

Dal momento che Φ è un diffeomorfismo, esiste una corrispondenza biunivoca tra le curve di $\mathcal{M}_1$ che uniscono $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ e le curve di $\mathcal{M}_2$ che passano per $\Phi(\mathbf{p})$ e per $\Phi(\mathbf{q})$. Dal momento che curve corrispondenti hanno la stessa lunghezza, segue la (8.14). □

Consideriamo ora una generalizzazione della nozione di isometria locale.

Definizione 8.2.3. *Siano $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ superfici regolari in $\mathbb{R}^n$. Un'applicazione tra superfici $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ è detta* **un'applicazione conforme** *se esiste una funzione $\lambda\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e positiva in tutti i punti, tale che*

$$\|\Phi_*(\mathbf{v_p})\| = \lambda(\mathbf{p})\|\mathbf{v_p}\| \tag{8.15}$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}_1$. Un **diffeomorfismo conforme** *è un'applicazione tra superfici che è simultaneamente un'applicazione conforme ed un diffeomorfismo.*

Lemma 8.2.5. *Un'applicazione conforme $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ conserva gli angoli tra vettori tangenti non nulli.*

Dimostrazione. La dimostrazione del fatto che la (8.9) è equivalente alla (8.8) si può riprendere e modificare per dimostrare che la (8.15) è equivalente alla

$$\Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p}) = \lambda(\mathbf{p})^2 \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p} \tag{8.16}$$

per tutti i vettori non nulli $\mathbf{v_p}$ e $\mathbf{w_p}$ tangenti a $\mathcal{M}_1$. Allora la (8.16) implica che

$$\frac{\Phi_*(\mathbf{v_p}) \cdot \Phi_*(\mathbf{w_p})}{\|\Phi_*(\mathbf{v_p})\| \, \|\Phi_*(\mathbf{w_p})\|} = \frac{\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}}{\|\mathbf{v_p}\| \, \|\mathbf{w_p}\|}.$$

Dalla definizione di angolo data a pagina 7 segue che Φ_* conserva gli angoli tra vettori tangenti. □

Ecco un esempio importante di applicazione conforme (già introdotta nel Paragrafo 4.4).

Definizione 8.2.4. L'applicazione stereografica $\boldsymbol{\Upsilon}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2(1)$ *è definita da*

$$\boldsymbol{\Upsilon}(p_1, p_2) = \frac{(2p_1, 2p_2, p_1^2 + p_2^2 - 1)}{p_1^2 + p_2^2 + 1}.$$

Abbreviamo la definizione di applicazione stereografica scrivendo

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{p}) = \frac{(2\mathbf{p}, \|\mathbf{p}\|^2 - 1)}{1 + \|\mathbf{p}\|^2}. \tag{8.17}$$

È facile vedere che $\boldsymbol{\Upsilon}$ è differenziabile, e che $\|\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{p})\| = 1$. Inoltre,

Lemma 8.2.6. $\boldsymbol{\Upsilon}$ *conserva gli angoli tra i vettori.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva. Segue dalla (8.17) che l'immagine di $\boldsymbol{\alpha}$ tramite $\boldsymbol{\Upsilon}$ è la curva

$$\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha} = \frac{(2\boldsymbol{\alpha}, \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 - 1)}{1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2};$$

questa equazione si può riscrivere nella forma

$$(1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2)(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha}) = (2\boldsymbol{\alpha}, \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 - 1). \tag{8.18}$$

Derivando la (8.18) si ottiene

$$2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}')(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha}) + (1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2)(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})' = 2(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}'). \tag{8.19}$$

Dal momento che $\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbb{R}^2) \subset S^2(1)$, si ha

$$\|\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha}\|^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad (\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})' = 0. \tag{8.20}$$

Dalla (8.19) e dalla (8.20) otteniamo

$$\begin{aligned}
4\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2 + 4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}')^2 &= 4\|(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}')\|^2 \\
&= \big\|2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}')(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha}) + (1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2)(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})'\big\|^2 \\
&= 4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}')^2\big\|(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})\big\|^2 + (1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2)^2\big\|(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})'\big\|^2 \\
&= 4(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}')^2 + (1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2)^2\big\|(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})'\big\|^2.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\big\|(\boldsymbol{\Upsilon} \circ \boldsymbol{\alpha})'\big\| = \frac{2\|\boldsymbol{\alpha}'\|}{1 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2}. \tag{8.21}$$

Dalla (8.21) concludiamo che

$$\|\boldsymbol{\Upsilon}_*(\mathbf{v_p})\| = \frac{2\|\mathbf{v_p}\|}{1+\|\mathbf{p}\|^2}. \tag{8.22}$$

per ogni $\mathbf{p}$ ed ogni vettore tangente $\mathbf{v_p}$ a $\mathbb{R}^2$ in $\mathbf{p}$. Quindi $\boldsymbol{\Upsilon}$ è conforme con fattore di conformità $\lambda(\mathbf{p}) = 2/(1+\|\mathbf{p}\|^2)$ □

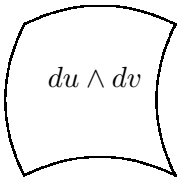
8.3 L'idea intuitiva di area su una superficie

L'ipercubo infinitesimale in $\mathbb{R}^n$ di lati $dx_1 \dots dx_n$ ha come volume il prodotto[2]

$$dV = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n;$$

chiameremo dV **elemento di volume** in $\mathbb{R}^n$. La corrispondente nozione per una superficie con metrica $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ è quella di **elemento d'area** dA, dato da

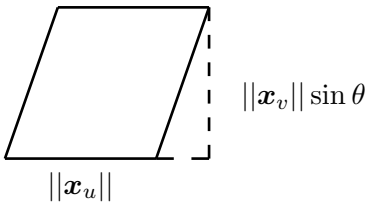
$$dA = \sqrt{E\,G - F^2}\, du \wedge dv. \tag{8.23}$$



Per una superficie parametrizzata $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è facile comprendere perché questa è la definizione più appropriata di elemento d'area. Per la (3.6) a pagina 43, si ha

$$\sqrt{E\,G - F^2} = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \|\mathbf{x}_u\|\,\|\mathbf{x}_v\| \sin\theta,$$

dove θ è l'angolo positivo tra i vettori $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. D'altra parte, $\|\mathbf{x}_u\|\,\|\mathbf{x}_v\| \sin\theta$ rappresenta l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$, con angolo θ tra i suoi lati.



Calcoliamo ora l'elemento d'area per la metrica usuale del piano, ma in coordinate polari. Ci serviremo del metodo adottato per ottenere la (8.1.2).

[2]Esistono due tipi di prodotti tra gli infinitesimi du e dv: il **prodotto simmetrico** $du\,dv$ che abbiamo utilizzato nella definizione di metrica ds^2 ed il **prodotto esterno** $du \wedge dv$. La differenza principale tra essi è che $dudv = dvdu$, mentre $du \wedge dv = -dv \wedge du$.

Lemma 8.3.1. *La metrica ds^2 in $\mathbb{R}^2$ data dalla* (8.2) *ha per elemento d'area*

$$dA = dx \wedge dy = r\, dr \wedge d\theta. \tag{8.24}$$

Dimostrazione. Tenendo conto che il prodotto esterno è antisimmetrico, dalla (8.6) segue

$$\begin{aligned} dA &= dx \wedge dy \\ &= (-r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr) \wedge (r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr) \\ &= -r^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta \wedge d\theta + \cos\theta\sin\theta\, dr \wedge dr \\ &\qquad -r\sin^2\theta\, d\theta \wedge dr + r\cos^2\theta\, dr \wedge d\theta \\ &= r\, dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

□

L'equazione (8.23) giustifica la seguente definizione di area di un sottoinsieme chiuso della traccia di una parametrizzazione. Ricordiamo che un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ è **limitato**, se esiste un numero M tale che $\|\mathbf{p}\| \leq M$ per ogni $\mathbf{p} \in S$. Un sottoinsieme **compatto** di $\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme che è chiuso e limitato.

Definizione 8.3.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione regolare iniettiva, e sia $S \subseteq \mathbf{x}(\mathcal{U})$ un sottoinsieme chiuso. Allora* **l'area** *di S è*

$$\mathbf{area}(S) = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(S)} \sqrt{E\,G - F^2}\, du \wedge dv. \tag{8.25}$$

Lemma 8.3.2. *La definizione di area è indipendente dalla scelta della parametrizzazione.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ed $\mathbf{y}\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni regolari iniettive, e supponiamo che $S \subseteq \mathbf{x}(\mathcal{W}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$. Un calcolo diretto ma lungo in cui si tiene conto del Lemma 8.1.3 mostra che

$$\sqrt{E_{\mathbf{y}}G_{\mathbf{y}} - F_{\mathbf{y}}^2} = \sqrt{E_{\mathbf{x}}G_{\mathbf{x}} - F_{\mathbf{x}}^2} \left| \frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v} \right|. \tag{8.26}$$

Ma

$$\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right|$$

è il determinante della matrice Jacobiana di $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$. Quindi, per la formula del cambiamento delle varabili negli integrali multipli, si ha

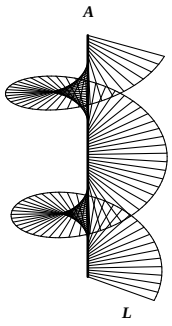
$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}^{-1}(S)} \sqrt{E_{\mathbf{y}}G_{\mathbf{y}} - F_{\mathbf{y}}^2}\, d\bar{u}\wedge d\bar{v} &= \int_{\mathbf{y}^{-1}(S)} \sqrt{E_{\mathbf{x}}G_{\mathbf{x}} - F_{\mathbf{x}}^2}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right| d\bar{u}\wedge d\bar{v} \\ &= \int_{\mathbf{y}^{-1}(S)} \sqrt{E_{\mathbf{x}}G_{\mathbf{x}} - F_{\mathbf{x}}^2}\, du\wedge dv\end{aligned}$$

□

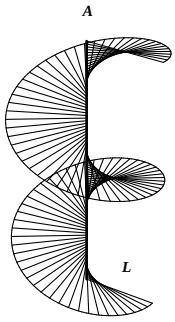
L'area di una superficie non si può calcolare in generale prendendo il limite dell'area delle sue approssimazioni poliedrali. Si veda, per esempio, [Krey1, pagine 115–117]. Di conseguenza, l'analogo per le superfici del Teorema 1.3.2 è falso.

8.4 Esercizi

1. Geometricamente **l'elicoide** si definisce come la superficie generata da un segmento di retta $\boldsymbol{L}$, ortogonale ad un asse $\boldsymbol{A}$, che mentre scivola lungo $\boldsymbol{A}$ (mantenendosi sempre perpendicolare ad esso), allo stesso tempo gli ruota intorno, ed entrambi i movimenti hanno velocità costante.



(a) **Definizione dell'elicoide**



(b) **Elicoide in direzione opposta**

2. Si trovino la metrica, l'elemento d'area e l'area totale di un toro circolare definito da

```
torus[a_,b_][u_,v_]:= {(a + b Cos[v])Cos[u],
                       (a + b Cos[v])Sin[u],b Sin[v]}
```

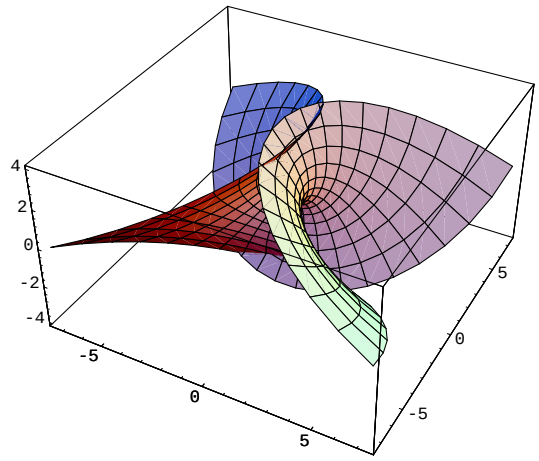
Si trovino la metrica e l'elemento d'area dell'elicoide parametrizzato da

$$\textbf{helicoid}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](u,v) = (a\,v\cos u, a\,v\sin u, b\,u), \tag{8.27}$$

Si calcoli l'area dell'insieme $\{\,\textbf{helicoid}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \mid 0 < p < 2\pi, c < q < d\,\}$. Infine, si rappresenti graficamente l'elicoide per $a = b = 1$.

3. Si trovino la metrica e l'elemento d'area della superficie di Enneper[Enn1], definita da

$$\textbf{enneper}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + u\,v^2, -v + \frac{v^3}{3} - v\,u^2, u^2 - v^2\right),$$



Superficie di Enneper

Si rappresenti graficamente la superficie di Enneper da diversi punti di vista. Si trovi almeno una angolazione che mostri che la superficie di Enneper ha un buco nel suo centro. Infine, si calcoli l'area dell'immagine dell'insieme $[-1,1]\times[-1,1]$ tramite **enneper**.

Capitolo 9

Superfici nello Spazio Tridimensionale

In questo capitolo studieremo la relazione esistente tra la geometria di una superficie nello spazio $\mathbb{R}^3$ e la geometria di $\mathbb{R}^3$. Lo strumento fondamentale per realizzare questo studio è il cosiddetto operatore di forma S ("shape operator", in inglese), che viene definito nel Paragrafo 9.1. L'operatore di forma in un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ è un'applicazione lineare $S\colon \mathcal{M}_\mathbf{p} \longrightarrow \mathcal{M}_\mathbf{p}$ che rende conto di come $\mathcal{M}$ si incurva nelle diverse direzioni. Si dimostra anche (Lemma 9.1.4) che l'operatore di forma si può considerare come l'applicazione tangente all'applicazione di Gauss di $\mathcal{M}$ con segno cambiato. Nel Paragrafo 9.2 viene definita una variante dell'operatore di forma che indichiamo con $\mathbf{k}$ e che prende il nome di curvatura normale; per $\mathbf{v_p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$ la curvatura normale $\mathbf{k}(\mathbf{v_p})$ è un numero reale che misura di quanto si incurva la superficie in direzione del vettore tangente $\mathbf{v_p}$. La curvatura normale $\mathbf{k}(\mathbf{v_p})$ è facile da interpretare geometricamente; tale curvatura è, a meno del segno, la curvatura della curva piana ottenuta intersecando $\mathcal{M}$ con il piano che contiene $\mathbf{v_p}$ ed è perpendicolare ad $\mathcal{M}$. Le tecniche per il calcolo dell'operatore di forma e della curvatura normale vengono descritte nel Paragrafo 9.3. Gli autovalori dell'operatore di forma in un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ risultano essere il massimo ed il minimo della curvatura normale in quel punto; essi vengono studiati nel Paragrafo 9.4. Le curvature più importanti di una superficie in $\mathbb{R}^3$ sono la curvatura di Gauss e la curvatura media; queste curvature vengono definite nel Paragrafo 9.5. Le definizioni delle forme fondamentali di una superficie, la prima, la seconda e la terza, vengono introdotte nel Paragrafo 9.6. Nel Paragrafo 9.7 vengono presentate le tecniche per il calcolo manuale della curvatura a partire dalle rappresentazioni parametriche delle superfici.

9.1 L'operatore di forma

Vogliamo introdurre uno strumento che dica come si incurva una superficie regolare $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$ quando ci si sposta nelle diverse direzioni. Un buon modo per farlo consiste nel misurare il modo in cui varia il campo normale unitario $\mathbf{U}$ della superficie punto per punto. Per calcolare la flessione di $\mathcal{M}$ ci serviamo di un operatore lineare chiamato operatore di forma. L'uso dell'operatore di forma ha avuto grande diffusione dopo la sua introduzione nel libro di O'Neill [ON1]; la sua apparizione è tuttavia avvenuta molto prima, ad esempio, implicitamente in Blashke[1] [Blas1] ed esplicitamente in [BuBu].[2]

L'operatore di forma applicato ad un vettore tangente $\mathbf{v_p}$ è l'opposto della derivata di $\mathbf{U}$ in direzione $\mathbf{v_p}$.

Definizione 9.1.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, e sia $\mathbf{U}$ un campo normale unitario sulla superficie $\mathcal{M}$, definito in un intorno di un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Per ogni vettore $\mathbf{v_p}$ tangente a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$, definiamo*

$$S(\mathbf{v_p}) = -\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{U}.$$

L'operatore S così definito si chiama **operatore di forma**.

È facile verificare che l'operatore di forma di un piano è identicamente nullo in tutti i suoi punti. Per superfici non piane, il campo normale unitario $\mathbf{U}$ della superficie varierà e ruoterà passando da un punto a un altro della stessa, e pertanto S sarà non nullo.

In un punto arbitrario di una superficie regolare orientabile esistono due possibili scelte del suo campo normale unitario: $\mathbf{U}$ e $-\mathbf{U}$. L'operatore di forma corrispondente a $-\mathbf{U}$ è l'opposto dell'operatore di forma corrispondente a $\mathbf{U}$.

Se $\mathcal{M}$ è non orientabile, il campo normale unitario $\mathbf{U}$ della superficie non si può definire in modo continuo su tutta $\mathcal{M}$. Questo fatto non è importante in questo

[1]

Wilhelm Johann Eugen Blaschke (1885-1962). Matematico tedesco. Nel 1919 gli fu assegnata una cattedra ad Amburgo dove fondò una importante scuola di geometria differenziale.

[2] Intorno al 1900 le notazioni analitico-vettoriali di Gibbs-Heaviside (sulle quali si possono trovare interessanti informazioni nel libro [Crowe]) si diffusero in geometria differenziale, nonostante il loro uso restasse controverso per altri 30 anni. Il libro di Burali-Forti e Burgatti [BuBu] contiene un divertente attacco agli oppositori delle nuove notazioni vettoriali. Nelle opere in diversi volumi di Darboux [Darb1] e di Bianchi [Bian] la maggior parte delle formule sono scritte componente per componente. Le notazioni vettoriali compatte sono oggigiorno naturalmente indispensabili sia per gli esseri umani che per i calcolatori.

capitolo, dal momento che tutti i calcoli che faremo saranno locali. Ci servirà soltanto calcolare su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U}$ di $\mathcal{M}$ sul quale $\mathbf{U}$ è definito in modo continuo.

Ricordiamo (Lemma 6.4.3, pagina 103) che ogni punto $\mathbf{q}$ del dominio di definizione di una superficie parametrizzata regolare $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ possiede un intorno $\mathcal{U}_{\mathbf{q}}$ tale che $\mathbf{x}(\mathcal{U}_{\mathbf{q}})$ sia una superficie regolare. Pertanto l'operatore di forma di una superficie parametrizzata regolare è ben definito. Reciprocamente, possiamo utilizzare le carte locali di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ per calcolare l'operatore di forma di $\mathcal{M}$.

Nei lemmi che seguono vengono stabilite alcune proprietà elementari dell'operatore di forma.

Lemma 9.1.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. Allora*

$$S(\mathbf{x}_u) = -\mathbf{U}_u \qquad e \qquad S(\mathbf{x}_v) = -\mathbf{U}_v.$$

Dimostrazione. Fissiamo v e definiamo una curva $\boldsymbol{\alpha}$ mediante $\boldsymbol{\alpha}(u) = \mathbf{x}(u, v)$. Allora, per il Lemma 5.6.2, pagina 89, si ha

$$S\big(\mathbf{x}_u(u,v)\big) = S\big(\boldsymbol{\alpha}'(u)\big) = -\boldsymbol{D}_{\alpha'(u)}\mathbf{U} = -(\mathbf{U} \circ \boldsymbol{\alpha})'(u).$$

Ma $(\mathbf{U} \circ \boldsymbol{\alpha})'$ è proprio $\mathbf{U}_u$. Analogamente, $S(\mathbf{x}_v) = -\mathbf{U}_v$ □

Lemma 9.1.2. *In ogni punto $\mathbf{p}$ di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, l'operatore di forma è un'applicazione lineare*

$$S\colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}.$$

Dimostrazione. La linearità di S risulta da $\boldsymbol{D}_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}} = a\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}} + b\boldsymbol{D}_{\mathbf{w}}$. Per dimostrare che S trasforma $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ in $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, e non semplicemente in $\mathbb{R}^3_{\mathbf{p}}$, deriviamo la condizione $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 1$ e utilizziamo la (5.17), pagina 84:

$$0 = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}[\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}] = 2\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}) = -2S(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}),$$

per ogni vettore tangente $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Dal momento che $S(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})$ è perpendicolare a $\mathbf{U}(\mathbf{p})$, esso deve essere tangente a $\mathcal{M}$, cioè, $S(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ □

Vogliamo ora ricavare un'importante relazione tra l'operatore di forma di una superficie e l'accelerazione di una curva sulla superficie.

Lemma 9.1.3. *Se $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva su una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ si ha*

$$\boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U} = S(\boldsymbol{\alpha}') \cdot \boldsymbol{\alpha}'.$$

Dimostrazione. Consideriamo la restrizione del campo di vettori $\mathbf{U}$ alla curva $\boldsymbol{\alpha}$ e utilizziamo il Lemma 5.6.2. Essendo $\boldsymbol{\alpha}(t) \in \mathcal{M}$ per ogni t, il campo dei vettori velocità $\boldsymbol{\alpha}'$ è sempre tangente a $\mathcal{M}$; pertanto,

$$\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{U} = 0.$$

Se deriviamo ora questa equazione e teniamo conto dei Lemmi 9.1.1 e 9.1.2, otteniamo

$$\boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U}' \cdot \boldsymbol{\alpha}' = S(\boldsymbol{\alpha}') \cdot \boldsymbol{\alpha}'$$

□

Si osservi che $\boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U}$ si può interpretare geometricamente come *la componente dell'accelerazione di* $\boldsymbol{\alpha}$ *nella direzione perpendicolare a* $\mathcal{M}$.

Di fatto risulta che l'operatore di forma non è altro che l'applicazione tangente dell'applicazione di Gauss con segno opposto.

Lemma 9.1.4. *Sia* $\mathcal{M}$ *una superficie regolare in* $\mathbb{R}^3$ *orientata da un campo di vettori normali e unitari* $\mathbf{U}$. *Consideriamo* $\mathbf{U}$ *come l'applicazione di Gauss* $\mathbf{U}\colon \mathcal{M} \longrightarrow S^2(1)$, *dove* $S^2(1)$ *denota la sfera unitaria in* $\mathbb{R}^3$. *Se* $\mathbf{v_p}$ *è un vettore tangente a* $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, *allora* $\mathbf{U}_*(\mathbf{v_p})$ *è parallelo a* $-S(\mathbf{v_p}) \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 5.3.2, pagina 75, si ha

$$\mathbf{U}_*(\mathbf{v_p}) = (\mathbf{v_p}[u_1], \mathbf{v_p}[u_2], \mathbf{v_p}[u_3])_{\mathbf{U(p)}}.$$

D'altra parte, il Lemma 5.5.1, a pagina 83, implica

$$-S(\mathbf{v_p}) = \boldsymbol{D}_\mathbf{v}(\mathbf{U}) = \big(\mathbf{v_p}[u_1], \mathbf{v_p}[u_2], \mathbf{v_p}[u_3]\big)_\mathbf{p}.$$

Poiché i vettori $\big(\mathbf{v_p}[u_1], \mathbf{v_p}[u_2], \mathbf{v_p}[u_3]\big)_{\mathbf{U(p)}}$ e $\big(\mathbf{v_p}[u_1], \mathbf{v_p}[u_2], \mathbf{v_p}[u_3]\big)_\mathbf{p}$ sono paralleli, segue l'asserto. □

Concluderemo questo paragrafo introduttivo mostrando una relazione fondamentale esistente tra gli operatori di forma delle superfici e i movimenti euclidei in $\mathbb{R}^3$.

Teorema 9.1.1. *Sia* $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un movimento euclideo che conserva l'orientazione, e siano* $\mathcal{M}_1$ *ed* $\mathcal{M}_2$ *due superfici regolari e orientate tali che* $F(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$. *Allora*

(i) *i campi normali unitari* $\mathbf{U}_1$ *e* $\mathbf{U}_2$ *di* $\mathcal{M}_1$ *ed* $\mathcal{M}_2$, *rispettivamente, si possono scegliere in modo tale che*

$$F_*(\mathbf{U}_1) = \mathbf{U}_2;$$

(ii) *gli operatori di forma S_1 e S_2 (relativi alla scelta delle normali data dalla (i)) sono legati dalla relazione*

$$S_2 \circ F_* = F_* \circ S_1.$$

Dimostrazione. Dal momento che F_* conserva lunghezze e prodotti scalari, risulta che $F_*(\mathbf{U}_1)$ è perpendicolare a $\mathcal{M}_2$ ed ha lunghezza unitaria. Pertanto $F_*(\mathbf{U}_1) = \pm\mathbf{U}_2$; scegliamo il segno positivo in tutti i punti di $\mathcal{M}_2$. Siano $\mathbf{p} \in \mathcal{M}_1$ e $\mathbf{v_p} \in \mathcal{M}_{1\mathbf{p}}$, e sia $\mathbf{w}_{F(\mathbf{p})} = F_*(\mathbf{v_p})$. Un movimento euclideo è una trasformazione affine; allora, dal Lemma 5.5.6, pagina 86, risulta che

$$\begin{aligned}(S_2 \circ F_*)(\mathbf{v_p}) &= S_2(\mathbf{w}_{F(\mathbf{p})}) = -\boldsymbol{D}_{\mathbf{w}}\mathbf{U}_2 = -\boldsymbol{D}_{\mathbf{w}}F_*(\mathbf{U}_1) \\ &= -F_*(\boldsymbol{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{U}_1) = -(F_* \circ S_1)(\mathbf{v_p}).\end{aligned}$$

Dato che $\mathbf{v_p}$ è arbitrario, si ottiene $S_2 \circ F_* = F_* \circ S_1$ □

9.2 Curvatura normale

Anche se l'operatore di forma misura come si incurva una superficie nelle diverse direzioni possibili in ognuno dei suoi punti, di solito sarà utile disporre di una funzione reale, chiamata curvatura normale, che ci fornisca le stesse informazioni. Anche se definiremo la curvatura normale per mezzo dell'operatore di forma, si tratta tuttavia di una nozione molto più antica (si vedano [Euler2], [Meu] e il Corollario 9.4.1). Occorre, innanzi tutto, precisare la nozione di direzione su una superficie.

Definizione 9.2.1. *Una* **direzione $\boldsymbol{L}$** *su una superficie regolare $\mathcal{M}$ è un sottospazio unidimensionale (cioè, una retta) del piano tangente a $\mathcal{M}$.*

Dal momento che un vettore non nullo $\mathbf{v_p}$ in un piano tangente $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ determina un unico sottospazio unidimensionale $\boldsymbol{L}$, a volte diciamo "la direzione $\mathbf{v_p}$" per indicare il sottospazio $\boldsymbol{L}$.

Definizione 9.2.2. *Sia $\mathbf{u_p}$ un vettore tangente ad una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ con $\|\mathbf{u_p}\| = 1$. La* **curvatura normale di $\mathcal{M}$ nella direzione di $\mathbf{u_p}$** *è*

$$\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = S(\mathbf{u_p}) \cdot \mathbf{u_p}.$$

In generale, se $\mathbf{v_p}$ è un vettore non nullo arbitrario tangente a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$, definiamo

$$\mathbf{k}(\mathbf{v_p}) = \frac{S(\mathbf{v_p}) \cdot \mathbf{v_p}}{\|\mathbf{v_p}\|^2}. \tag{9.1}$$

È facile dimostrare il seguente

Lemma 9.2.1. *Sia $\boldsymbol{L}$ una direzione in uno spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. Allora la curvatura normale $\mathbf{k}(\mathbf{v_p})$ è la stessa per tutti i vettori tangenti non nulli $\mathbf{v_p}$ in $\boldsymbol{L}$. Pertanto chiameremo* **curvatura normale nella direzione** $\boldsymbol{L}$ *questo valore della curvatura normale.*

Distingueremo ora due tipi di direzioni.

Definizione 9.2.3. *Sia $\boldsymbol{L}$ una direzione in uno spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, dove $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare. Se la curvatura normale in direzione $\boldsymbol{L}$ è zero, si dice che $\boldsymbol{L}$ è una* **direzione asintotica**. *Analogamente, se la curvatura normale si annulla per un vettore tangente $\mathbf{v_p}$ a $\mathcal{M}$, si dice che $\mathbf{v_p}$ è un* **vettore asintotico**.

Definizione 9.2.4. *Siano $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. I valori massimo e minimo della curvatura normale $\mathbf{k}$ di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$ si chiamano* **curvature principali** *di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$ e si denotano con $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. I vettori unitari $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ che individuano questi valori estremi si chiamano* **vettori principali**. *Le direzioni corrispondenti si chiamano* **direzioni principali**

Le curvature principali misurano la massima e la minima flessione di una superficie regolare $\mathcal{M}$ in ogni punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$.

Come per la curvatura di una curva nello spazio, esiste una importante interpretazione della curvatura normale di una superficie regolare.

Lemma 9.2.2. (Meusnier) *Sia $\mathbf{u_p}$ un vettore con lunghezza unitaria e tangente a $\mathcal{M}$ in un punto $\mathbf{p}$, e sia $\boldsymbol{\beta}$ una curva con velocità unitaria e tale che $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\beta}'(0) = \mathbf{u_p}$. Allora*

$$\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0) = 0, \\ \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0)\cos\theta & \text{se } \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0) \neq 0, \end{cases} \tag{9.2}$$

dove $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0)$ è la curvatura di $\boldsymbol{\beta}$ in 0 e $\cos\theta$ il coseno dell'angolo che formano la normale principale $\mathbf{N}(0)$ di $\boldsymbol{\beta}$ e il campo normale unitario $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ della superficie. Quindi tutte le curve su una superficie $\mathcal{M}$ che hanno la stessa tangente in un dato punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ hanno la stessa curvatura normale in $\mathbf{p}$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0) \neq 0$. Dal Lemma 9.1.3 e dal Teorema 3.2.1, a pagina 45, risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{u_p}) &= S(\mathbf{u_p}) \cdot \mathbf{u_p} = \boldsymbol{\beta}''(0) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}) \\ &= \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0)\mathbf{N}(0) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0)\cos\theta. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Analogamente, se $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0) = 0$, allora $\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = 0$ □

Per comprendere il significato geometrico della curvatura normale, è necessario trovare curve sulla superficie alle quali poter applicare il Lemma 9.2.2.

Definizione 9.2.5. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, e sia $\mathbf{u_p}$ un vettore unitario tangente a $\mathcal{M}$ nel punto $\mathbf{p}$. Denotiamo con $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u_p}, \mathbf{U}(\mathbf{p}))$ il piano determinato da $\mathbf{u_p}$ e dalla normale alla superficie $\mathbf{U}(\mathbf{p})$. Si chiama* **sezione normale** *di $\mathcal{M}$ in direzione di $\mathbf{u_p}$ l'intersezione di $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u_p}, \mathbf{U}(\mathbf{p}))$ con $\mathcal{M}$.*

Corollario 9.2.1. *Sia $\boldsymbol{\beta}$ una curva con velocità unitaria contenuta nell'intersezione di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ con una delle sue sezioni normali $\boldsymbol{\Pi}$ in un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Supponiamo $\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{p}$ e prendiamo $\mathbf{u_p} = \boldsymbol{\beta}'(0)$. Allora la curvatura normale $\mathbf{k}(\mathbf{u_p})$ di $\mathcal{M}$ e la curvatura di $\boldsymbol{\beta}$ sono legate dalla relazione*

$$\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = \pm\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0). \tag{9.4}$$

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0) = 0$, allora la (9.4) è una conseguenza immediata della (9.2), per cui possiamo supporre $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0) \neq 0$. Dal momento che $\boldsymbol{\beta}$ è una curva con velocità unitaria, $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](0)\mathbf{N}(0) = \boldsymbol{\beta}''(0)$ è perpendicolare a $\boldsymbol{\beta}'(0)$. D'altra parte, $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ e $\mathbf{N}(0)$ sono entrambi contenuti in $\boldsymbol{\Pi}$, quindi l'unica possibilità è che $\mathbf{N}(0) = \pm\mathbf{U}(\mathbf{p})$. Pertanto, $\cos\theta = \pm 1$ nella (9.2), e così si ha la (9.4). □

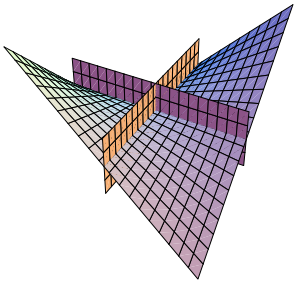
Il Corollario 9.2.1 ci offre un metodo eccellente per visualizzare una stima della curvatura normale. Supponiamo di voler conoscere la curvatura normale in un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ nelle diverse direzioni. Ogni vettore unitario $\mathbf{u_p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$, insieme con il campo normale unitario della superficie $\mathbf{U}(\mathbf{p})$, determina un piano $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u_p}, \mathbf{U}(\mathbf{p}))$. La sezione normale nella direzione di $\mathbf{u_p}$ è l'intersezione di tale piano $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u_p}, \mathbf{U}(\mathbf{p}))$ con $\mathcal{M}$. Questa intersezione è una curva piana contenuta in $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u_p}, \mathbf{U}(\mathbf{p}))$, la cui curvatura è data dalla (9.4). Tre casi sono possibili:

- Se $\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) > 0$, allora la sezione normale si incurva nella stessa direzione di $\mathbf{U}(\mathbf{p})$. Pertanto, in direzione di $\mathbf{u_p}$, $\mathcal{M}$ è incurvata verso $\mathbf{U}(\mathbf{p})$.

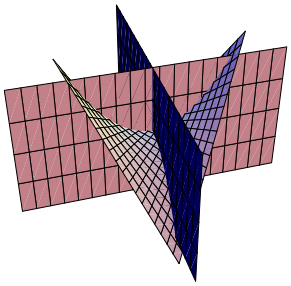
- Se $\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) < 0$, allora la sezione normale è incurvata in direzione opposta a $\mathbf{U}(\mathbf{p})$. Pertanto, in direzione di $\mathbf{u_p}$, $\mathcal{M}$ si incurva in direzione opposta a $\mathbf{U}(\mathbf{p})$.

- Se $\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = 0$, allora la curvatura della sezione normale si annulla in $\mathbf{p}$ e pertanto la normale principale della curva sezione normale non è definita. In questo caso è impossibile concludere che non esiste alcuna flessione di $\mathcal{M}$ nella direzione di $\mathbf{u_p}$, dal momento che $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]$ potrebbe eventualmente essere nulla soltanto nel punto $\mathbf{p}$, Anche se possiamo dedurre che la flessione è, in qualche modo, piccola.

Quando il vettore tangente unitario $\mathbf{u_p}$ ruota, la superficie si può incurvare in modi molto diversi. Un buon esempio che illustra questa situazione è dato da quanto accade nel punto centrale di un paraboloide iperbolico.



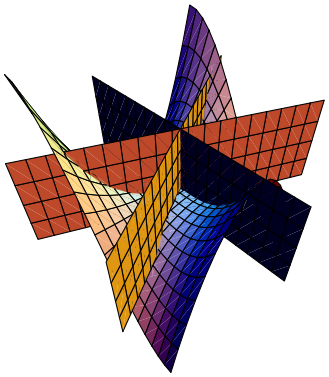
(a) **Sezioni normali di un paraboloide iperbolico passanti per le sue direzioni asintotiche.**



(b) **Sezioni normali di un paraboloide iperbolico passanti per le sue direzioni principali.**

Nella prima di queste figure, entrambe le sezioni normali intersecano il paraboloide iperbolico lungo linee rette; per questa ragione la curvatura normale determinata da ognuna di queste sezioni si annulla. Nella seconda figura invece la curvatura normale determinata da una delle sezioni normali è positiva, mentre per l'altra sezione normale la curvatura normale è negativa.

Le sezioni normali nel punto centrale di una sella di scimmia sono simili a quelle del paraboloide iperbolico seppure più complicate.



Sezioni normali della sella di scimmia

Queste rappresentazioni grafiche di superfici e delle loro sezioni normali sono buoni esempi di come si può utilizzare *Mathematica* per mostrare graficamente intersezioni tra superfici.

9.3 Calcolo dell'operatore di forma

In uno spazio vettoriale, gli operatori lineari simmetrici sono molto più semplici degli operatori lineari arbitrari. Per i nostri scopi, è molto importante che l'operatore di forma sia simmetrico, come risulta dal lemma seguente.

Lemma 9.3.1. *L'operatore di forma di una superficie regolare $\mathcal{M}$ è simmetrico, cioè,*

$$S(\mathbf{v_p}) \cdot \mathbf{w_p} = \mathbf{v_p} \cdot S(\mathbf{w_p})$$

per tutti i vettori $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}$ tangenti a $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ una carta locale di $\mathcal{M}$. Derivando l'identità $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u = 0$ rispetto a v si ottiene

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_u) = \mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \tag{9.5}$$

dove $\mathbf{U}_v$ è la derivata del campo di vettori $v \longmapsto \mathbf{U}(u, v)$ lungo una qualunque curva v-parametrica. Dal momento che $\mathbf{U}_v = -S(\mathbf{x}_v)$, la (9.5) diviene

$$S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv}. \tag{9.6}$$

Analogamente,

$$S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vu}. \tag{9.7}$$

Dalle (9.6) e (9.7), e dal fatto che $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, discende

$$S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vu} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u. \tag{9.8}$$

Siano quindi $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, e $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$. Scegliamo la carta locale $\mathbf{x}$ in modo che $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$. Possiamo scrivere allora

$$\begin{cases} \mathbf{v_p} &= a_{11}\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + a_{12}\mathbf{x}_v(u_0, v_0), \\ \mathbf{w_p} &= a_{21}\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + a_{22}\mathbf{x}_v(u_0, v_0). \end{cases} \tag{9.9}$$

Dalla (9.7) risulta (trascurando la valutazione in (u_0, v_0) nelle notazioni)

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v_p}) \cdot \mathbf{w_p} &= a_{11}a_{21}S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u + a_{11}a_{22}S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v \\ &\quad + a_{12}a_{21}S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u + a_{12}a_{22}S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= a_{11}a_{21}S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v + a_{21}a_{22}S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= \cdots = S(\mathbf{w_p}) \cdot \mathbf{v_p}, \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. □

Definizione 9.3.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una superficie parametrizzata regolare. Allora*

$$\text{(9.10)} \qquad \begin{cases} e = -\mathbf{U}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \\ f = -\mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vu} = -\mathbf{U}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ g = -\mathbf{U}_v \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{cases}$$

Nel linguaggio classico e, f e g si chiamano **coefficienti della seconda forma fondamentale**;[3] analogamente, le funzioni E, F e G, definite nel Paragrafo 8.1, sono dette **coefficienti della prima forma fondamentale** di $\mathbf{x}$. Noi continueremo a utilizzare questa terminologia. Nel Paragrafo 9.6 faremo uno studio più dettagliato di tali funzioni.

Vediamo ora come si esprime l'operatore di forma in funzione dei coefficienti e, f, g, E, F e G.

Teorema 9.3.1. *(***(Equazioni di Weingarten)**[4] **Sia** $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **una superficie parametrizzata regolare. Allora l'operatore di forma** S **di** $\mathbf{x}$ **è dato, rispetto alla base** $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$**, da**

$$\text{(9.11)} \qquad \begin{cases} -S(\mathbf{x}_u) = \mathbf{U}_u = \dfrac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}\mathbf{x}_u + \dfrac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2}\mathbf{x}_v, \\ -S(\mathbf{x}_v) = \mathbf{U}_v = \dfrac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2}\mathbf{x}_u + \dfrac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2}\mathbf{x}_v. \end{cases}$$

[3] Alcuni libri utilizzano L, M, N o ℓ, m, n al posto di e, f e g. Gauss utilizzò le notazioni D, D', D'' per le funzioni $e\sqrt{E\,G - F^2}$, $f\sqrt{E\,G - F^2}$ e $g\sqrt{E\,G - F^2}$.

[4]

Julius Weingarten (1836-1910). Professore presso la Technische Universität di Berlino. Una superficie per la quale esiste una certa relazione funzionale tra le curvature principali è chiamata una **superficie di Weingarten**.

Dimostrazione. Dal momento che $\mathbf{x}$ è regolare, $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ sono linearmente indipendenti, e possiamo scrivere

$$\begin{cases} -S(\mathbf{x}_u) = \mathbf{U}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{12}\mathbf{x}_v, \\ -S(\mathbf{x}_v) = \mathbf{U}_v = a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \end{cases} \tag{9.12}$$

per certe funzioni a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Per dimostrare le (9.11) è necessario calcolare i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} in (9.12). Se prendiamo il prodotto scalare di ognuna delle equazioni nella (9.12) con $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$, otteniamo

$$\begin{cases} -e = a_{11}E + a_{12}F, \\ -f = a_{11}F + a_{12}G, \\ -f = a_{21}E + a_{22}F, \\ -g = a_{21}F + a_{22}G. \end{cases} \tag{9.13}$$

Le equazioni (9.13) si possono scrivere in modo più conciso in forma matriciale:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix};$$

pertanto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{E\,G - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \frac{-1}{E\,G - F^2}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{E\,G - F^2}\begin{pmatrix} e\,G - f\,F & -e\,F + f\,E \\ f\,G - g\,F & -f\,F + g\,E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui risulta

$$\begin{cases} a_{11} = \dfrac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}, & a_{12} = \dfrac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2}, \\ a_{21} = \dfrac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2}, & a_{22} = \dfrac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2}. \end{cases} \tag{9.14}$$

A questo punto la (9.11) discende direttamente dalle (9.14) e (9.12). □

Si osservi che, anche se S è un operatore lineare simmetrico, tuttavia la matrice che lo rappresenta rispetto a $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ non è necessariamente simmetrica, in quanto $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ non sono, in generale, mutuamente ortogonali.

Esiste anche un modo di esprimere la curvatura normale in funzione di E, F, G, e, f e g.

Lemma 9.3.2. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Sia $\mathbf{x}$ una parametrizzazione di $\mathcal{M}$ con $\mathbf{p} = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Sia $\mathbf{v_p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$, e poniamo*

$$\mathbf{v_p} = a\,\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + b\,\mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

Allora la curvatura normale di $\mathcal{M}$ in direzione $\mathbf{v_p}$ è

$$\mathbf{k}(\mathbf{v_p}) = \frac{e\,a^2 + 2f\,a\,b + g\,b^2}{E\,a^2 + 2F\,a\,b + G\,b^2}.$$

Dimostrazione. Un calcolo semplice mostra che

$$\|\mathbf{v_p}\|^2 = \|a\,\mathbf{x}_u + b\,\mathbf{x}_v\|^2 = a^2E + 2a\,b\,F + b^2G$$

e

$$S(\mathbf{v_p}) \cdot \mathbf{v_p} = \big(a\,S(\mathbf{x}_u) + b\,S(\mathbf{x}_v)\big) \cdot (a\,\mathbf{x}_u + b\,\mathbf{x}_v) = a^2e + 2a\,b\,f + b^2g.$$

Pertanto, dalla 9.1,

$$\mathbf{k}(\mathbf{v_p}) = \frac{S(\mathbf{v_p}) \cdot \mathbf{v_p}}{\|\mathbf{v_p}\|^2} = \frac{e\,a^2 + 2f\,a\,b + g\,b^2}{E\,a^2 + 2F\,a\,b + G\,b^2}$$

□

9.4 Gli autovalori dell'operatore di forma

Ricordiamo un fatto importante di algebra lineare.

Lemma 9.4.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n munito di un prodotto scalare, e sia $A\colon V \longrightarrow V$ una trasformazione lineare simmetrica rispetto a tale prodotto. Allora gli autovalori (o valori propri) di A sono reali ed A è diagonalizzabile; cioè, esiste una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n\}$ di V tale che*

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j \qquad \textit{per } j = 1 \dots n,$$

dove $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ sono gli autovalori di A.

Sappiamo, per il Lemma 9.3.1, che l'operatore di forma S è un operatore lineare simmetrico su ogni spazio tangente di una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Quindi il Lemma 9.4.1 ci dice che gli autovalori di S sono reali. Questi autovalori rappresentano importanti dati geometrici associati ad ogni superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.

Invece di dimostrare il Lemma 9.4.1 nella sua forma più generale, lo dimostreremo nel caso particolare dell'operatore di forma.

Lemma 9.4.2. *Gli autovalori dell'operatore di forma S di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ in un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ sono precisamente le curvature principali $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$. Gli autovettori unitari corrispondenti sono vettori unitari principali, e viceversa. Se $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, allora S non è altro che la moltiplicazione per il valore comune di $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. In caso contrario, gli autovettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ di S sono ortogonali, ed S è dato da*

$$S\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{e}_1, \qquad S\mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_2\mathbf{e}_2. \tag{9.15}$$

Dimostrazione. Consideriamo la curvatura normale come una funzione $\mathbf{k}\colon S^1_{\mathbf{p}} \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $S^1_{\mathbf{p}}$ è l'insieme di vettori tangenti unitari nello spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Dal momento che $S^1_{\mathbf{p}}$ è una circonferenza, essa è compatta, e pertanto $\mathbf{k}$ assume il suo massimo in qualche vettore unitario, diciamo $\mathbf{e}_1 \in S^1_{\mathbf{p}}$. Scegliamo per $\mathbf{e}_2$ un qualunque vettore di $S^1_{\mathbf{p}}$ che sia perpendicolare a $\mathbf{e}_1$. Essendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale di $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, si ha

$$\begin{cases} S(\mathbf{e}_1) = \big(S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1\big)\mathbf{e}_1 + \big(S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_2\big)\mathbf{e}_2, \\ \\ S(\mathbf{e}_2) = \big(S(\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_1\big)\mathbf{e}_1 + \big(S(\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2\big)\mathbf{e}_2. \end{cases} \tag{9.16}$$

Dimostreremo ora che $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono autovettori di S.

Definiamo una funzione $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta)$ ponendo $\mathbf{u}(\theta) = (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2$, e poniamo $\mathbf{k}(\theta) = \mathbf{k}(\mathbf{u}(\theta))$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\theta) \;=\; & (S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1)\cos^2\theta + 2(S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_2)\,\sin\theta\cos\theta \\ & +(S(\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2)\,\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{9.17}$$

di modo che

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\theta}(\theta) = 2(S(\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2 - S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1)\,\sin\theta\cos\theta + 2S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

In particolare,

$$0 = \frac{d\mathbf{k}}{d\theta}(0) = 2S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_2, \tag{9.18}$$

in quanto $\mathbf{k}(\theta)$ ha un massimo in $\theta = 0$. Allora la (9.16) e la (9.18) implicano la (9.15). Dalla (9.15) si deduce che sia $\mathbf{e}_1$ che $\mathbf{e}_2$ sono autovettori di S, e dalla (9.17) risulta che le curvature principali di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$ sono gli autovalori di S. (Si veda anche (9.19).) Questo completa la dimostrazione. □

Le curvature principali determinano completamente la curvatura normale.

Corollario 9.4.1. (Eulero) *Siano* $\mathbf{k}_1$ *e* $\mathbf{k}_2$ *le curvature principali di una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *in* $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$*, e siano* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$ *i corrispondenti vettori principali unitari. Per* $\mathbf{u_p} = (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2$ *la curvatura normale* $\mathbf{k}(\mathbf{u_p})$ *è data da*

$$\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = \mathbf{k}_1(\mathbf{p})\cos^2\theta + \mathbf{k}_2(\mathbf{p})\,\sin^2\theta. \tag{9.19}$$

Dimostrazione. Dal momento che $S(\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_2 = 0$, la (9.17) si riduce alla (9.19). □

9.5 Curvatura di Gauss e curvatura media

La nozione di curvatura di una superficie è assai più complicata della corrispondente nozione di curvatura di una curva. Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva in $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{p}$ un punto della traccia di $\boldsymbol{\alpha}$. La curvatura di $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbf{p}$ misura di quanto $\boldsymbol{\alpha}$ si allontana dalla retta tangente a $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbf{p}$. Per analogia, la curvatura di una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ rende conto di quanto $\mathcal{M}$ si allontana dal piano tangente a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$. Per le superfici si presenta però una difficoltà che non si incontra nel caso delle curve: mentre una curva può allontanarsi da una delle sue rette tangenti soltanto lungo due direzioni, una superficie si può separare da uno dei suoi piani tangenti lungo tutta una infinità di direzioni. In generale, la rapidità con la quale una superficie si separa da uno dei suoi piani tangenti dipende dalla direzione nella quale ci si muove.

Ci sono alcune (diverse) nozioni di curvatura che possono essere definite su una superficie in $\mathbb{R}^3$, cioè:

- la curvatura normale $\mathbf{k}$;
- le curvature principali $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$;
- la curvatura media H;
- la curvatura di Gauss K.

Nel Paragrafo 9.2 abbiamo già definito la curvatura normale e le curvature principali di una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. In questo paragrafo introdurremo le definizioni di due nuove curvature, la curvatura di Gauss e la curvatura media, le curvature che risultano essere quelle di maggiore importanza nella teoria delle superfici.

Incominceremo con ricordare alcuni fatti di algebra lineare, relativi al determinante e alla traccia di una matrice, che ci saranno utili in quanto segue.

Lemma 9.5.1. *Se $A\colon V \longrightarrow V$ è una trasformazione lineare di uno spazio vettoriale V, poniamo*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad e \qquad trA = tr \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dove

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è una rappresentazione matriciale arbitraria di A. Allora $\det A$ e trA sono indipendenti dalla scelta della rappresentazione matriciale di A.

Dimostrazione. Dobbiamo utilizzare due proprietà dell'algebra delle matrici. Se a e b sono due matrici $n \times n$, allora

$$\det(a\,b) = \det(a)\det(b) \tag{9.20}$$

e

$$\mathrm{tr}(a\,b) = \mathrm{tr}(b\,a). \tag{9.21}$$

Se a è una matrice che rappresenta la trasformazione lineare A, allora qualunque altra rappresentazione matriciale di A è della forma $c^{-1}ac$. Ma se a e c sono matrici $n \times n$ con c non singolare, allora dalla (9.20) risulta

$$\det(c^{-1}a\,c) = \det(c)^{-1}\det(a)\det(c) = \det(a),$$

mentre, per la 9.21,

$$\mathrm{tr}(c^{-1}a\,c) = \mathrm{tr}(a\,c\,c^{-1}) = \mathrm{tr}(a)$$

□

Definizione 9.5.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. La* **curvatura di Gauss** *K e la* **curvatura media** *H di $\mathcal{M}$ sono le funzioni $K, H\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da*

$$K(\mathbf{p}) = \det\big(S(\mathbf{p})\big) \qquad e \qquad H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}tr\big(S(\mathbf{p})\big). \tag{9.22}$$

Il Lemma 9.5.1 implica che le definizioni di K e H non dipendano dalla scelta effettuata per la rappresentazione matriciale dell'operatore di forma. Si osservi inoltre che, l'operatore di forma S e la curvatura media H dipendono dalla scelta del campo normale unitario $\mathbf{U}$ della superficie, la curvatura di Gauss K è indipendente da tale scelta. Il nome "curvatura media" venne introdotto da Germain.[5]

Definizione 9.5.2. *Una* **superficie minima** *in* $\mathbb{R}^3$ *è una superficie regolare la cui curvatura media è nulla in tutti i suoi punti. Una superficie regolare si dice* **piatta** *se la sua curvatura di Gauss si annulla in tutti i suoi punti.*

Si può dimostrare che le superfici la cui area è minima sono di fatto minime nel senso che la sua curvatura media si annulla identicamente.

La curvatura di Gauss ci permette di distinguere quattro diversi tipi di punti su una superficie.

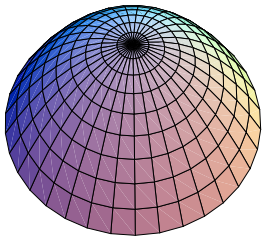
Definizione 9.5.3. *Sia* $\mathbf{p}$ *un punto su una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$*. Si dice che*

- $\mathbf{p}$ *è un* **punto ellittico** *se* $K(\mathbf{p}) > 0$ (equivalentemente, se $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ hanno lo stesso segno);
- $\mathbf{p}$ è un **punto iperbolico** se $K(\mathbf{p}) < 0$ (equivalentemente, se $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ hanno segni opposti);
- $\mathbf{p}$ è un **punto parabolico** se $K(\mathbf{p}) = 0$, ma $S(\mathbf{p}) \neq 0$ (equivalentemente, se soltanto uno, tra $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$, è uguale a zero);
- $\mathbf{p}$ è un **punto planare** se $K(\mathbf{p}) = 0$ e $S(\mathbf{p}) = 0$ (equivalentemente, se $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 0$).

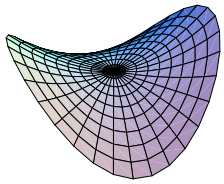
In genere, è possibile osservare una superficie e riconoscere quali tra i suoi punti sono ellittici, quali iperbolici, quali parabolici e quali planari. Ecco alcuni esempi di superfici i cui punti sono tutti di uno stesso tipo.

[5]

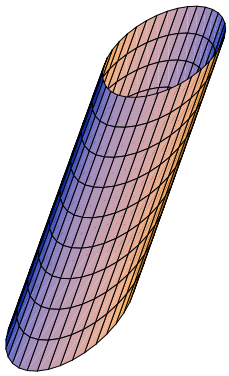
Sophie Germain (1776-1831). Matematica francese, più nota per i suoi studi sui fenomeni elastici e sull'ultimo teorema di Fermat. Sui suoi risultati in geometria ed in teoria dei numeri, Germain ebbe (sotto lo pseudonimo di "M. Blanc") una corrispondenza epistolare con Gauss.



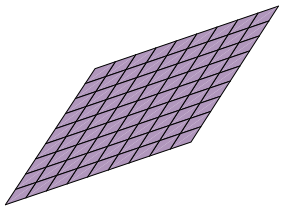
(a) **Superficie che ha solo punti ellittici**



(b) **Superficie che ha solo punti iperbolici**



(a) **Superficie che ha solo punti parabolici**



(b) **Superficie che ha solo punti planari**

Ci sono due modi particolarmente utili di scegliere una base dello spazio tangente di una superficie in $\mathbb{R}^3$. Ciascuno di essi dà luogo a formule per il calcolo della curvatura di Gauss e della curvatura media, formule che vengono stabilite nei due teoremi seguenti.

Teorema 9.5.1. *La curvatura di Gauss e la curvatura media di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ sono legate alle curvature principali mediante le formule*

$$K = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 \qquad e \qquad H = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Dimostrazione. Se scegliamo per $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ una base ortonormale di autovettori dell'opera-

tore di forma S, l'espressione matriciale di S rispetto a tale base è

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_2 \end{pmatrix},$$

di modo che

$$K = \det\begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 \qquad \text{e} \qquad H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

□

Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Le curvature di Gauss e media sono funzioni $K, H\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$; denotiamo con $K(\mathbf{p})$ e $H(\mathbf{p})$ i valori di K e H in $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$.

Dovremmo utilizzare una notazione leggermente diversa per una superficie parametrizzata regolare $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Per essere precisi, $K, H\colon \mathbf{x}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Tuttavia continueremo a servirci in questo caso della notazione convenzionale e abbrevieremo $K \circ \mathbf{x}$ con K e $H \circ \mathbf{x}$ con H. Quindi $K(u, v)$ e $H(u, v)$ indicheranno i valori della curvatura di Gauss e della curvatura media in $\mathbf{x}(u, v)$.

Teorema 9.5.2. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. Allora la curvatura di Gauss e la curvatura media di $\mathbf{x}$ sono date dalle formule*

$$K = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2}, \tag{9.23}$$

$$H = \frac{e\,G - 2f\,F + g\,E}{2(E\,G - F^2)}, \tag{9.24}$$

dove e, f e g sono i coefficienti della seconda forma fondamentale di $\mathbf{x}$, ed E, F, G sono i coefficienti della sua prima forma fondamentale.

Dimostrazione. In questo caso calcoliamo K ed H utilizzando la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Dalle equazioni di Weingarten (Teorema 9.3.1) si ottiene

$$\begin{aligned} K &= \det\begin{pmatrix} -\dfrac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2} & -\dfrac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2} \\ -\dfrac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2} & -\dfrac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(f\,F - e\,G)(f\,F - g\,E) - (e\,F - f\,E)(g\,F - f\,G)}{(E\,G - F^2)^2} = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\begin{pmatrix} -\dfrac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2} & -\dfrac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2} \\ -\dfrac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2} & -\dfrac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{(f\,F - e\,G) + (f\,F - g\,E)}{2(E\,G - F^2)} = \frac{e\,G - 2f\,F + g\,E}{2(E\,G - F^2)}$$

□

L'importanza del Teorema 9.5.1 è puramente teorica, in quanto il Teorema 9.5.2 non è altro che un calcolo. Normalmente si utilizza prima il Teorema 9.5.2 per calcolare K ed H, e poi si fa appello al Teorema 9.5.1 per determinare le curvature principali. In modo più esplicito,

Corollario 9.5.1. *Le curvature principali* $\mathbf{k}_1$ *e* $\mathbf{k}_2$ *sono le radici dell'equazione di secondo grado*

$$\mathbf{k}^2 - 2H\mathbf{k} + K = 0.$$

Pertanto possiamo scegliere $\mathbf{k}_1$ *e* $\mathbf{k}_2$ *in modo che*

$$\mathbf{k}_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \qquad e \qquad \mathbf{k}_2 = H - \sqrt{H^2 - K}. \tag{9.25}$$

Corollario 9.5.2. *Supponiamo che* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *abbia curvatura di Gauss negativa* K *in* $\mathbf{p}$*. Allora*:

(i) esistono esattamente due direzioni asintotiche in $\mathbf{p}$*, e le direzioni principali sono le loro bisettrici*;

(ii) le due direzioni asintotiche sono perpendicolari tra loro se e solo se la curvatura media H *di* $\mathcal{M}$ *si annulla in* $\mathbf{p}$*.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i vettori principali unitari corrispondenti a $\mathbf{k}_1(\mathbf{p})$ e $\mathbf{k}_2(\mathbf{p})$. Allora $K(\mathbf{p}) = \mathbf{k}_1(\mathbf{p})\mathbf{k}_2(\mathbf{p}) < 0$ implica che $\mathbf{k}_1(\mathbf{p})$ e $\mathbf{k}_1(\mathbf{p})$ siano di segno opposto. Il Corollario 9.4.1 implica che esista θ con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ tale che

$$\tan^2\theta = -\frac{\mathbf{k}_1(\mathbf{p})}{\mathbf{k}_2(\mathbf{p})}.$$

Poniamo $\mathbf{u}_\mathbf{p}(\theta) = (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2$. Allora la 9.19 implica che $\mathbf{u}_\mathbf{p}(\theta)$ e $\mathbf{u}_\mathbf{p}(-\theta)$ siano vettori asintotici in $\mathbf{p}$ linearmente indipendenti. L'angolo tra $\mathbf{u}_\mathbf{p}(\theta)$ e $\mathbf{u}_\mathbf{p}(-\theta)$ è 2θ, ed è chiaro che $\mathbf{e}_1$ biseca l'angolo tra $\mathbf{u}_\mathbf{p}(\theta)$ e $\mathbf{u}_\mathbf{p}(-\theta)$. Questo prova la (i). Per la (ii) osserviamo che $H(\mathbf{p}) = 0$ se e solo se $\theta = \pm\pi/4$ □

Omettiamo qui le formule per il calcolo delle curvature principali in funzione di E, F, G, e, f, g in quanto in generale esse sono prive di interesse e di utilità. Tuttavia c'è un caso speciale nel quale le formule per $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ sono degne di nota.

Corollario 9.5.3. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare per la quale $f = F = 0$. Allora le curvature principali sono e/E e g/G.*

Dimostrazione. Quando $F = f = 0$, le equazioni di Weingarten 9.11 si riducono a

$$S(\mathbf{x}_u) = \frac{e}{E}\mathbf{x}_u \qquad \text{e} \qquad S(\mathbf{x}_v) = \frac{g}{G}\mathbf{x}_v.$$

Quindi, per definizione, e/E e g/G sono gli autovalori dell'operatore di forma S □

Le formule classiche per il calcolo di K e H per una superficie parametrizzata $\mathbf{x}$ sono la (9.23) e la (9.24). Di solito il calcolo manuale e diretto di K ed H è alquanto tedioso. È quindi preferibile calcolare le funzioni E, F, G ed e, f, g prima di affrontare il calcolo delle funzioni di curvatura.

Il calcolo di E, F, G è diretto: prima si calcolano le derivate prime $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$, e poi i prodotti scalari $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ e $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$.

Per il calcolo di e, f, g esistono due metodi. Il metodo diretto, a partire dalle definizioni, richiede il calcolo del campo normale unitario della superficie mediante la formula (6.7), usando poi la definizione 9.10. Il secondo metodo evita il calcolo del campo normale unitario della superficie, e fa invece uso del prodotto misto di vettori, che si può calcolare mediante un determinante.

Lemma 9.5.2. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. Allora*

$$\begin{cases} e &= \dfrac{(\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{uu}\\ \mathbf{x}_u\\ \mathbf{x}_v\end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}}, \\ f &= \dfrac{(\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{uv}\\ \mathbf{x}_u\\ \mathbf{x}_v\end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}}, \\ g &= \dfrac{(\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \dfrac{\det\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{vv}\\ \mathbf{x}_u\\ \mathbf{x}_v\end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}}. \end{cases} \tag{9.26}$$

Dimostrazione. Dalle (3.5) e (9.10) risulta che

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{x}_{uu} \cdot \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{(\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}}.$$

Le rimanenti formule si dimostrano in modo analogo. □

Possiamo anche, almeno teoricamente, calcolare K e H per una superficie parametrizzata regolare $\mathbf{x}$ direttamente in funzione delle derivate di $\mathbf{x}$ del primo e del secondo ordine. Ecco le formule relative.

Corollario 9.5.4. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. Allora la curvatura di Gauss e la curvatura media di $\mathcal{M}$ sono date dalle formule*

$$K = \frac{(\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)^2}{\big(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\big)^2}, \tag{9.27}$$

$$H = \frac{(\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)\|\mathbf{x}_v\|^2 - 2(\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + (\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)\|\mathbf{x}_u\|^2}{2\big(\|\mathbf{x}_u\|^2\|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2\big)^{\frac{3}{2}}}. \tag{9.28}$$

Dimostrazione. Le equazioni (9.27) e (9.28) seguono direttamente dalla (9.23) e dal Lemma 9.5.2, semplicemente esprimendo e, f, g, E, F e G in modo esplicito come prodotti scalari. □

9.6 Le tre forme fondamentali

Nella geometria differenziale classica, come si può vedere ad esempio nell'autorevole libro [Eisen1] di Eisenhart[6], si trovano frequenti riferimenti alla "seconda forma fondamentale" di una superficie in $\mathbb{R}^3$. Questa nozione è sostanzialmente equivalente a quella dell'operatore di forma S.

Definizione 9.6.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. La* **seconda forma fondamentale** *di $\mathcal{M}$ è la forma bilineare simmetrica* $\mathbf{II}$ *sullo spazio tangente $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ data da*

$$\mathbf{II}(\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}) = S(\mathbf{v_p}) \cdot \mathbf{w_p}$$

per tutti i $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$.

[6]

Luther Pfahler Eisenhart (1876-1965). Geometra differenziale americano. Fu professore e decano presso l'Università di Princeton.

Dal momento che c'è una seconda forma fondamentale, dovrà esserci anche una **prima forma fondamentale**. Questa forma non è altro che il prodotto scalare tra vettori tangenti:

$$\mathbf{I}(\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}) = \mathbf{v_p} \cdot \mathbf{w_p}.$$

Si osservi che la prima forma fondamentale $\mathbf{I}$ è ben definita anche se $\mathcal{M}$ non è una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Il lemma seguente è una conseguenza immediata delle definizioni.

Lemma 9.6.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. Allora*

$$\mathbf{I}(a\,\mathbf{x}_u + b\,\mathbf{x}_v, a\,\mathbf{x}_u + b\,\mathbf{x}_v) = E\,a^2 + 2F\,a\,b + G\,b^2, \tag{9.29}$$

e

$$\mathbf{II}(a\,\mathbf{x}_u + b\,\mathbf{x}_v, a\,\mathbf{x}_u + b\,\mathbf{x}_v) = e\,a^2 + 2f\,a\,b + g\,b^2. \tag{9.30}$$

Pertanto

$$\mathbf{k}(\mathbf{v_p}) = \frac{\mathbf{II}(\mathbf{v_p}, \mathbf{v_p})}{\mathbf{I}(\mathbf{v_p}, \mathbf{v_p})}$$

per ogni vettore tangente $\mathbf{v_p}$ non nullo.

Le uguaglianze (9.29) e (9.30) giustificano la denominazione di coefficienti della prima forma fondamentale per E, F e G, e di coefficienti della seconda forma fondamentale per e, f e g.

Infine, esiste anche una **terza forma fondamentale III** per una superficie in $\mathbb{R}^3$, definita da

$$\mathbf{III}(\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p}) = S(\mathbf{v_p}) \cdot S(\mathbf{w_p})$$

per $\mathbf{v_p}, \mathbf{w_p} \in \mathcal{M}_\mathbf{p}$. Osserviamo che **III**, a differenza di **II**, non dipende dalla scelta del campo normale unitario $\mathbf{U}$ della superficie. La terza forma fondamentale **III** non contiene nuove informazioni, giacché si può esprimere in funzione di **I** e **II**, come ora vedremo.

Lemma 9.6.2. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Tra la prima, la seconda e la terza forma fondamentale di $\mathcal{M}$ esiste la relazione seguente*

$$\mathbf{III} - 2H\,\mathbf{II} + K\,\mathbf{I} = 0, \tag{9.31}$$

dove H e K rappresentano rispettivamente la curvatura media e la curvatura di Gauss di $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Anche se la (9.31) risulta dal Corollario 9.5.1 e dal teorema di Cayley-Hamilton,[7] che afferma che ogni matrice è una radice del suo polinomio caratteristico, preferiamo darne qui una dimostrazione diretta. Per far questo, osserviamo innanzi tutto che $H\,\mathbf{II}$ è indipendente dalla scelta del campo normale unitario $\mathbf{U}$. Pertanto la (9.31) ha senso anche se $\mathcal{M}$ non è orientabile.

Dal momento che $\mathbf{III} - 2H\,\mathbf{II} + K\,\mathbf{I}$ è una forma bilineare simmetrica, ci basterà dimostrare che, per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, si ha

$$(\mathbf{III} - 2H\,\mathbf{II} + K\,\mathbf{I})(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \tag{9.32}$$

per $i, j = 1, 2$, dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è una base arbitraria di $\mathcal{M}_\mathbf{p}$. Scegliendo come $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ due vettori principali, linearmente indipendenti e di lunghezza unitaria, si ha

$$(\mathbf{III} - 2H\,\mathbf{II} + K\,\mathbf{I})(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0,$$

in quanto ogni termine si annulla separatamente. Inoltre,

$$(\mathbf{III} - 2H\,\mathbf{II} + K\,\mathbf{I})(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \mathbf{k}_1^2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 = 0.$$

Analogamente, $(\mathbf{III} - 2H\,\mathbf{II} + K\,\mathbf{I})(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$. Pertanto la (9.31) è vera in generale. □

9.7 Esempi di calcolo manuale di curvature

Le funzioni geometriche più importanti che abbiamo sinora definito per una superficie in $\mathbb{R}^3$ sono le quattro curvature. Cioè, in ordine di importanza,

- la curvatura di Gauss K,
- la curvatura media H,
- le curvature principali $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$.

In questo paragrafo mostreremo come si calcolano manualmente K ed H per la sella di scimmia e per il toro. Nello stesso tempo, calcoleremo i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale per queste due superfici.

[7]

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Matematico irlandese, noto soprattutto per la scoperta dei quaternioni, che sarebbe avvenuta all'improvviso mentre attraversava il Brougham Bridge a Dublino, e per i suoi studi in dinamica.

La sella di scimmia

Per la sella di scimmia, parametrizzata da

$$\mathbf{monkeysaddle}(u,v) = (u, v, u^3 - 3u\,v^2),$$

si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}
\mathbf{monkeysaddle}_u(u,v) &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2),\\
\mathbf{monkeysaddle}_v(u,v) &= (0, 1, -6u\,v),\\
\mathbf{monkeysaddle}_{uu}(u,v) &= (0, 0, 6u),\\
\mathbf{monkeysaddle}_{uv}(u,v) &= (0, 0, -6v),\\
\mathbf{monkeysaddle}_{vv}(u,v) &= (0, 0, -6u).
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$E = 1 + (3u^2 - 3v^2)^2, \qquad F = -6u\,v(3u^2 - 3v^2), \qquad G = 1 + 36u^2v^2.$$

Inoltre, un campo normale unitario della superficie è

$$\mathbf{U} = \frac{(-3u^2 + 3v^2, 6u\,v, 1)}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}},$$

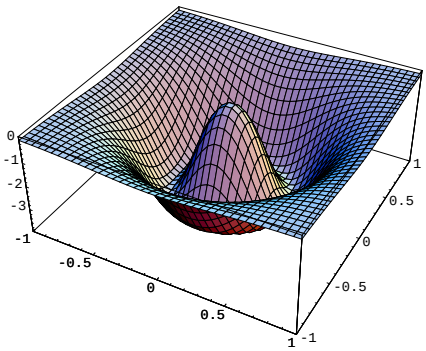
da cui segue

$$\begin{aligned}
e &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{monkeysaddle}_{uu} = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}},\\
f &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{monkeysaddle}_{uv} = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}},\\
g &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{monkeysaddle}_{vv} = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}.
\end{aligned}$$

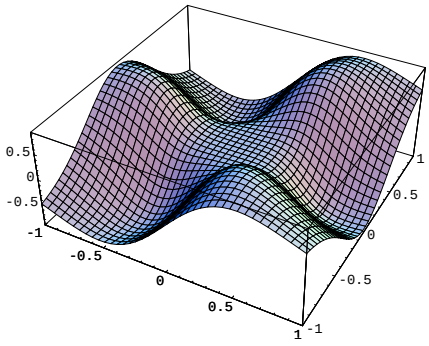
Quindi

$$K = \frac{-36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2}, \qquad H = \frac{-27u^5 + 54u^3v^2 + 81u\,v^4}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si osserva facilmente, considerando l'espressione di K, che $(0,0,0)$ è un punto planare della sella di scimmia, e che ogni altro punto è iperbolico. Inoltre, la curvatura di Gauss della sella di scimmia è invariante per rotazioni attorno all'asse z, nonostante la sella di scimmia non possieda questa proprietà .



(a) **Curvatura di Gauss della sella di scimmia**



(b) **Curvatura media della sella di scimmia**

Il toro

Calcoliamo la curvatura di Gauss e la curvatura media del toro parametrizzato da

$$\mathbf{torus}(u,v) = \big((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v\big).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{torus}_u(u,v) &= \big(-(a+b\cos v)\sin u, (a+b\cos v)\cos u, 0\big),\\
\mathbf{torus}_v(u,v) &= \big(-b\sin v\cos u, -b\sin v\sin u, b\cos v\big),
\end{aligned}$$

e pertanto

$$E = (a+b\cos v)^2, \qquad F = 0, \qquad G = b^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\mathbf{torus}_{uu}(u,v) &= \big(-(a+b\cos v)\cos u, -(a+b\cos v)\sin u, 0\big),\\
\mathbf{torus}_{uv}(u,v) &= \big(b\sin v\sin u, -b\sin v\cos u, 0\big),\\
\mathbf{torus}_{vv}(u,v) &= \big(-b\cos v\cos u, -b\cos v\sin u, -b\sin v\big),
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det\begin{pmatrix} -(a+b\cos v)\cos u & -(a+b\cos v)\sin u & 0 \\ -(a+b\cos v)\sin u & (a+b\cos v)\cos u & 0 \\ -b\sin v\cos u & -b\sin v\sin u & b\cos v \end{pmatrix}}{b(a+b\cos v)} \\ &= -\cos v(a+b\cos v), \end{aligned}$$

$$f = \frac{\det\begin{pmatrix} b\sin v\sin u & -b\sin v\cos u & 0 \\ -(a+b\cos v)\sin u & (a+b\cos v)\cos u & 0 \\ -b\sin v\cos u & -b\sin v\sin u & b\cos v \end{pmatrix}}{b(a+b\cos v)} = 0,$$

$$g = \frac{\det\begin{pmatrix} -b\cos v\cos u & -b\cos v\sin u & -b\sin v \\ -(a+b\cos v)\sin u & (a+b\cos v)\cos u & 0 \\ -b\sin v\cos u & -b\sin v\sin u & b\cos v \end{pmatrix}}{b(a+b\cos v)} = -b,$$

per cui

$$K = \frac{\cos v}{b(a+b\cos v)}, \qquad H = -\frac{a+2b\cos v}{2b(a+b\cos v)},$$
$$\mathbf{k}_1 = -\frac{\cos v}{a+b\cos v}, \qquad \mathbf{k}_2 = -\frac{1}{b}.$$

Si vede dunque che la curvatura di Gauss K del toro si annulla lungo le curve $v = \pm\pi/2$, e che i punti di queste curve sono di fatto punti parabolici. L'insieme dei punti iperbolici è

$$\left\{ \mathbf{torus}(u,v) \;\middle|\; \frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2} \right\},$$

e l'insieme dei punti ellittici è

$$\left\{ \mathbf{torus}(u,v) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Punti ellittici, punti iperbolici e punti parabolici su un toro

Nella figura, i punti più oscuri sono iperbolici, i più chiari sono ellittici, e i punti parabolici hanno un colore intermedio.

9.8 Un teorema globale per la curvatura

Ricordiamo il seguente risultato fondamentale sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ (si veda a pagina 140):

Lemma 9.8.1. *Sia S un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$, e sia $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f raggiunge il suo massimo valore in qualche punto $\mathbf{p} \in S$.*

Per una dimostrazione di questo lemma fondamentale, si veda [Buck, pagina 74].

Intuitivamente, è prevedibile che su ogni superficie compatta $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, ci sia un punto $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}$ alla massima distanza dall'origine, in cui la superficie si piega verso l'origine. Sembrerebbe quindi che la curvatura di Gauss K di $\mathcal{M}$ sia positiva in $\mathbf{p}_0$. Vogliamo dimostrare che questo è proprio quanto si verifica. Nella dimostrazione intervengono risultati standard del calcolo differenziale riguardanti un massimo di una funzione differenziabile di una variabile.

Teorema 9.8.1. *Se $\mathcal{M}$ è una superficie regolare compatta in $\mathbb{R}^3$, c'è almeno un punto $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}$, nel quale la curvatura di Gauss K è strettamente positiva.*

Dimostrazione. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^2$. Allora f è continua (di fatto differenziabile), potendosi esprimere in funzione delle coordinate naturali di $\mathbb{R}^3$ nella forma $f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. Per il Lemma 9.8.1, l'insieme dei valori che f assume su $\mathcal{M}$ raggiunge il suo massimo in qualche punto $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}$. Sia $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}_0}$ un vettore tangente unitario, e scegliamo una curva con velocità unitaria $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ tale che $a < 0 < b$, $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}_0$ e $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$. Siccome la funzione $g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g = f \circ \boldsymbol{\alpha}$ ha un massimo in 0, risulta che

$$g'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad g''(0) \leq 0.$$

Ma $g(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}(t)$, per cui

$$0 = g'(0) = 2\boldsymbol{\alpha}'(0) \cdot \boldsymbol{\alpha}(0) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_0. \tag{9.33}$$

Nella (9.33), $\mathbf{v}$ può essere un arbitrario vettore tangente unitario, e quindi il raggio vettore in $\mathbf{p}_0$ deve essere normale a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}_0$. È chiaro che $\mathbf{p}_0 \neq 0$, per cui la (9.33) implica che $\mathbf{p}_0/\|\mathbf{p}_0\|$ è un vettore unitario normale a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}_0$. Inoltre,

$$0 \geq g''(0) = 2\boldsymbol{\alpha}''(0) \cdot \boldsymbol{\alpha}(0) + 2\boldsymbol{\alpha}'(0) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(0) = 2\big(\boldsymbol{\alpha}''(0) \cdot \mathbf{p}_0 + 1\big),$$

e quindi $\boldsymbol{\alpha}''(0) \cdot \mathbf{p}_0 \leq -1$, cioè

$$\mathbf{k}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}''(0) \cdot \frac{\mathbf{p}_0}{\|\mathbf{p}_0\|} \leq -\frac{1}{\|\mathbf{p}_0\|}, \tag{9.34}$$

dove $\mathbf{k}(\mathbf{v})$ è la curvatura normale determinata dal vettore tangente $\mathbf{v}$ e dal vettore normale unitario $\mathbf{p}_0/\|\mathbf{p}_0\|$. In particolare, per le curvature principali di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}_0$ (rispetto a $\mathbf{p}_0/\|\mathbf{p}_0\|$) si ha la disuguaglianza

$$\mathbf{k}_1(\mathbf{p}_0), \mathbf{k}_2(\mathbf{p}_0) \leq -1/\|\mathbf{p}_0\|.$$

Questo comporta che per la curvatura di Gauss di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}_0$ si abbia

$$K(\mathbf{p}_0) = \mathbf{k}_1(\mathbf{p}_0)\mathbf{k}_2(\mathbf{p}_0) \geq \frac{1}{\|\mathbf{p}_0\|^2} > 0$$

□

D'altra parte, esistono superfici non compatte con curvatura di Gauss positiva (si veda l'esercizio 11). Per quanto riguarda le superfici a curvatura negativa, si ha il seguente risultato:

Corollario 9.8.1. *Ogni superficie in $\mathbb{R}^3$ con curvatura di Gauss ovunque negativa deve essere non compatta.*

9.9 Esercizi

1. Si descrivano, per le seguenti superfici, gli insiemi dei punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari. Non è necessario effettuare i calcoli.

   (a) Una sfera.

   (b) Un ellissoide.

   (c) Un paraboloide.

   (d) Un paraboloide iperbolico.

   (e) Un iperboloide a una falda.

   (f) Un iperboloide a due falde.

   (g) Un cilindro sopra un'ellisse.

   (h) Un cilindro sopra una parabola.

   (i) Un cilindro sopra un'iperbole.

   (j) Un cilindro sopra la curva $y = x^3$.

(k) Un cono sopra una circonferenza.

2. Si descriva la forma generale dell'immagine dell'applicazione di Gauss delle superfici elencate nell'esercizio 1. Non è necessario effettuare i calcoli.

3. Si dimostri il Lemma 9.2.1.

4. Si dimostri che i movimenti euclidei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che conservano l'orientazione lasciano immutate sia le curvature principali che i vettori principali.

5. Si dimostri che la curvatura media $H(\mathbf{p})$ di una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ è data da
$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbf{k}(\theta) d\theta,$$
dove $\mathbf{k}(\theta)$ denota la curvatura normale utilizzata nel Lemma 9.4.2.

6. Si calcolino i coefficienti della prima forma fondamentale, i coefficienti della seconda forma fondamentale, il campo normale unitario, la curvatura media e le curvature principali delle seguenti superfici:

   - il toro definito a pagina 141. Si rappresentino graficamente la curvatura di Gauss e la curvatura media.
   - l'elicoide definito a pagina 141.
   - la superficie minima di Enneper definita a pagina 142.

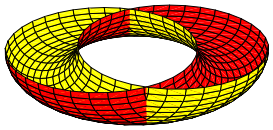
7. Si calcolino i coefficienti della prima forma fondamentale, i coefficienti della seconda forma fondamentale, il campo normale unitario, la curvatura media e le curvature principali della parametrizzazione definita da $\mathbf{y}(u, v) = (u^2 + v, v^2 + u, u\,v)$.

8. La **superficie di traslazione** determinata dalle curve $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è data dalla parametrizzazione
$$(u, v) \longmapsto \boldsymbol{\alpha}(u) + \boldsymbol{\gamma}(v).$$
Si tratta della superficie formata spostando $\boldsymbol{\alpha}$ parallelamente a se stessa in modo che un punto della curva si muova lungo $\boldsymbol{\gamma}$. Si dimostri che per una superficie di traslazione si ha $f = 0$.

9. Si dimostri che la **cupola boema** definita da

$$\mathbf{bohdom}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}](u,v) = (a\cos u, a\sin u + b\cos v, c\sin v)$$

è la superficie di traslazione (si veda esercizio 8) di due ellissi. Si calcolino ala curvatura gaussiana, la curvatura media e le curvature principali di $(u,v) \longmapsto \mathbf{bohdom}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}](u,v)$.



Una cupola boema
$(u,v) \longmapsto \mathbf{bohdom}[8,3,3][u,v]$

10. Si dimostri il seguente lemma.

Lemma 9.9.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e siano $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ ed $\mathbf{y}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ due parametrizzazioni coerentemente orientate su $\mathcal{M}$ con intersezione $\mathbf{x}(\mathcal{U}) \cap \mathbf{y}(\mathcal{V})$ non vuota. Sia $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} = (\bar{u},\bar{v})\colon \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ il cambio di coordinate associato, per cui*

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}\big(\bar{u}(u,v),\bar{v}(u,v)\big).$$

Siano $e_{\mathbf{x}}$, $f_{\mathbf{x}}$ e $g_{\mathbf{x}}$ i coefficienti della seconda forma fondamentale di $\mathbf{x}$, e siano $e_{\mathbf{y}}$, $f_{\mathbf{y}}$ e $g_{\mathbf{y}}$ i coefficienti della seconda forma fondamentale di $\mathbf{y}$. Allora

$$\left\{\begin{array}{rcl} e_{\mathbf{y}} &=& e_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2 + 2f_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u} + g_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2, \\ f_{\mathbf{y}} &=& e_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v} + f_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v} + \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right) + g_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}, \\ g_{\mathbf{y}} &=& e_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2 + 2f_{\mathbf{x}}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v} + g_{\mathbf{x}}\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2. \end{array}\right. \tag{9.35}$$

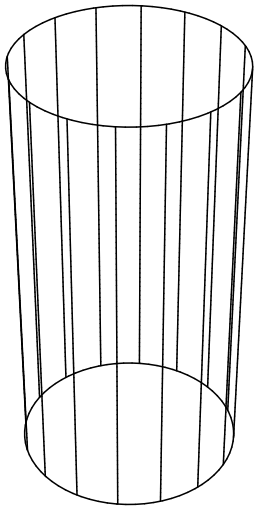
11. Si diano esempi dei seguenti tipi:

- Una superficie non compatta con curvatura di Gauss negativa;
- Una superficie non compatta con curvatura di Gauss identicamente nulla;
- Una superficie non compatta con curvatura di Gauss positiva;
- Una superficie non compatta contenente punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari.

12. Si dimostri che non ci sono superfici minime compatte in $\mathbb{R}^3$.

Capitolo 10

Curve Asintotiche su Superfici



Iniziamo in questo capitolo lo studio delle curve notevoli sulle superfici in $\mathbb{R}^3$. Una curva asintotica su una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ è una curva il cui vettore velocità punta sempre in una direzione lungo la quale la curvatura normale di $\mathcal{M}$ è nulla. In un certo senso $\mathcal{M}$ si incurva lungo una linea asintotica meno di quanto non faccia lungo una curva qualunque. Per esempio, le rette $v \longmapsto (\cos u, \sin u, v)$ sono curve asintotiche sul cilindro $(u, v) \longmapsto (\cos u, \sin u, v)$. È vero (Corollario 10.1.1) che ogni retta contenuta in una superficie è sempre una curva asintotica. Tuttavia, anche altre curve possono essere curve asintotiche. Nel Paragrafo 10.1 ricaviamo l'equazione differenziale a cui deve soddisfare una curva affinché sia una curva asintotica. Inoltre dimostriamo il Teorema 10.1.3, che permette di mettere in relazione la curvatura di Gauss di $\mathcal{M}$ con la torsione delle curve asintotiche della superficie.

Dal momento che in questo capitolo faremo principalmente calcoli locali, supporremo sempre che le superfici considerate siano orientabili, salvo menzione esplicita del contrario. Questo significa che sarà sempre possibile scegliere un campo unitario $\mathbf{U}$ normale alla superficie $\mathcal{M}$.

10.1 Curve asintotiche

Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. A pagina 148 abbiamo definito una direzione asintotica in un punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ come una direzione nella quale la curvatura normale di $\mathcal{M}$ si annulla.

Il seguente lemma è conseguenza immediata delle definizioni.

Lemma 10.1.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Allora*

(i) In un punto ellittico di $\mathcal{M}$ non esistono direzioni asintotiche.

(ii) In un punto iperbolico di $\mathcal{M}$ esistono esattamente due direzioni asintotiche.

(iii) In un punto parabolico di $\mathcal{M}$ esiste esattamente una direzione asintotica.

(iv) In un punto planare di $\mathcal{M}$ ogni direzione è asintotica.

I punti iperbolici verranno considerati con maggior attenzione nel Teorema 10.1.1.

Definizione 10.1.1. *Una* **curva asintotica** *è una curva $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathcal{M}$ la cui curvatura normale nella direzione di $\boldsymbol{\alpha}'$ si annulla; cioè,*

$$\mathbf{k}\big(\boldsymbol{\alpha}'(t)\big) = 0$$

per ogni t nel dominio di definizione di $\boldsymbol{\alpha}$.

Nel lemma seguente viene data una descrizione alternativa di una curva asintotica.

Lemma 10.1.2. *Una curva $\boldsymbol{\alpha}$ su una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ è asintotica se e solo se il suo vettore accelerazione è in ogni punto un vettore tangente a $\mathcal{M}$.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $\boldsymbol{\alpha}$ sia una curva con velocità unitaria. Se $\mathbf{U}$ denota il campo normale unitario della superficie $\mathcal{M}$, allora derivando $\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{U} = 0$ si ottiene

$$0 = \boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{U}' + \boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{k}(\boldsymbol{\alpha}') + \boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U}.$$

Pertanto $\mathbf{k}(\boldsymbol{\alpha}')$ si annulla se e solo se $\boldsymbol{\alpha}''$ è perpendicolare a $\mathbf{U}$ □

L'equazione differenziale di una curva asintotica si ottiene nel modo seguente.

Lemma 10.1.3. *Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva asintotica contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale $\mathbf{x}$ di una superficie. Poniamo $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Allora vale l'una o l'altra delle due condizioni equivalenti:*

(i)

$$e\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)u'(t)^2 + 2f\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)u'(t)v'(t) + g\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)v'(t)^2 = 0 \tag{10.1}$$

per ogni t.

(ii) $\mathbf{II}\big(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)\big) = 0$.

Dimostrazione. Il Corollario 6.1.3, a pagina 98, implica che $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$. Pertanto, per il Lemma 9.3.2, a pagina 154, si ha

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{\alpha}'(t)) = \frac{e(\boldsymbol{\alpha}(t))u'(t)^2 + 2f(\boldsymbol{\alpha}(t))u'(t)v'(t) + g(\boldsymbol{\alpha}(t))v'(t)^2}{E(\boldsymbol{\alpha}(t))u'(t)^2 + 2F(\boldsymbol{\alpha}(t))u'(t)v'(t) + G(\boldsymbol{\alpha}(t))v'(t)^2}. \tag{10.2}$$

Dunque la (10.1) si ottiene immediatamente dalla (10.2). □

L'equazione (10.1) si può scrivere in modo più conciso nel modo seguente

$$e\,u'^2 + 2f\,u'v' + g\,v'^2 = 0. \tag{10.3}$$

L'equazione (10.3) è detta **equazione differenziale delle curve asintotiche** di una superficie. Dal momento che e, f e g hanno lo stesso denominatore, la (10.3) è equivalente a

$$\widetilde{e}u'^2 + 2\widetilde{f}u'v' + \widetilde{g}v'^2 = 0, \tag{10.4}$$

dove[1]

$$\widetilde{e} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{f} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{g} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{vv} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}.$$

Teorema 10.1.1. *In un intorno di un punto iperbolico* $\mathbf{p}$ *di una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *esistono due famiglie distinte di curve asintotiche.*

Dimostrazione. In un intorno di un punto iperbolico $\mathbf{p}$ l'equazione

$$\widetilde{e}a^2 + 2\widetilde{f}a\,b + \widetilde{g}b^2 = 0$$

ha radici reali. Si ha pertanto una fattorizzazione

$$\widetilde{e}a^2 + 2\widetilde{f}ab + \widetilde{g}b^2 = (A\,a + B\,b)(C\,a + D\,b)$$

[1]Le notazioni di Gauss sono: $D = \widetilde{e}$, $D' = \widetilde{f}$, $D'' = \widetilde{g}$.

dove A, B, C e D sono reali. Quindi l'equazione differenziale delle curve asintotiche si può riscrivere anche nella forma:

$$(A\,u' + B\,v')(C\,u' + D\,v') = 0, \tag{10.5}$$

dove ora A, B, C e D sono funzioni reali. Una famiglia di curve asintotiche è costituita dalle curve soluzioni di $A\,u' + B\,v' = 0$, e l'altra dalle curve soluzioni di $C\,u' + D\,v' = 0$ □

Diamo ora una caratterizzazione di una curva asintotica in funzione della curvatura di essa considerata come curva in $\mathbb{R}^3$.

Teorema 10.1.2. *Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva regolare su una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, e denotiamo con $\{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}\}$ il suo campo di riferimenti di Frenet e con $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ la curvatura di $\boldsymbol{\alpha}$. Sia inoltre $\mathbf{U}$ il campo normale unitario della superficie $\mathcal{M}$. Allora $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva asintotica se e solo se in ogni punto $\boldsymbol{\alpha}(t)$ si ha o $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}](t) = 0$ oppure $\mathbf{N}(t)\cdot\mathbf{U} = 0$.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $\boldsymbol{\alpha}$ abbia velocità unitaria. La prima formula di Frenet, (si veda a pagina 45) se la curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ è non nulla, è

$$\mathbf{T}' = \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]\mathbf{N}. \tag{10.6}$$

Osserviamo, tuttavia, che la (10.6) ha senso anche se $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ è zero, dal momento che in questo caso possiamo scegliere per $\mathbf{N}$ un campo di vettori arbitrario lungo $\boldsymbol{\alpha}$. Allora, per la (9.3), si ha

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{\alpha}') = \boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U} = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{U} = \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]\mathbf{N} \cdot \mathbf{U}.$$

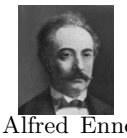
Risulta così che, in ogni punto $\boldsymbol{\alpha}(t)$, o $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}] = 0$, oppure $\mathbf{N}$ è ben definito ed è perpendicolare a $\mathbf{U}$ □

Corollario 10.1.1. *Ogni linea retta contenuta in una superficie regolare è una curva asintotica.*

Dimostrazione. La curvatura di una linea retta è identicamente nulla. □

Teorema 10.1.3. (Beltrami[2] -Enneper[3]) *Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva asintotica su una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, e supponiamo che la curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ di $\boldsymbol{\alpha}$ non si annulli.*

[2]



Eugenio Beltrami (1835-1900). Professore presso l'Università di Pavia. Egli trovò il primo modello concreto di geometria non euclidea, pubblicato nel suo articolo [Beltr].

[3] Alfred Enneper (1830-1885). Professore all'Università di Göttingen. Enneper studiò anche le superfici minime e le superfici a curvatura costante negativa.

Allora la torsione $\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\alpha}]$ *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *e la curvatura di Gauss* K *di* $\mathcal{M}$ *sono legate* (*lungo* $\boldsymbol{\alpha}$) *dalla relazione*

$$K \circ \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\alpha}]^2. \tag{10.7}$$

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $\boldsymbol{\alpha}$ abbia velocità unitaria. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva asintotica con curvatura non nulla, dal Teorema 10.1.2 si deduce

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} = 0.$$

Pertanto, $\mathbf{U} = \pm\mathbf{B}$. La terza formula di Frenet nella (3.10) implica

$$\boldsymbol{\tau}[\boldsymbol{\alpha}]^2 = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}' = \frac{d\mathbf{U}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds}. \tag{10.8}$$

D'altra parte, dal momento che la seconda forma fondamentale $\mathbf{II}$ di $\mathcal{M}$ è nulla lungo $\boldsymbol{\alpha}$, l'equazione (9.31) per la terza forma fondamentale si riduce a

$$0 = (\mathbf{III} + K\mathbf{I})(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}') = \frac{d\mathbf{U}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds} + K. \tag{10.9}$$

Ora, la (10.7) risulta dalla (10.8) e dalla (10.9). □

Corollario 10.1.2. *Ogni curva asintotica su una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *di curvatura costante negativa ha torsione costante.*

Definizione 10.1.2. *Una* **parametrizzazione locale asintotica** *su una superficie regolare* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *è una parametrizzazione locale per la quale le linee coordinate sono curve asintotiche.*

Teorema 10.1.4. *Sia* $\mathbf{x}$ *una parametrizzazione locale per la quale* f *non si annulla mai. Allora* $\mathbf{x}$ *è una parametrizzazione locale asintotica se e solo se sia* e *che* g *sono identicamente nulle.*

Dimostrazione. Se la curva $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$ è asintotica, dal Lemma 10.1.2 risulta che $e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{U} = 0$. Analogamente, se $v \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$ è asintotica, allora $g = 0$. Reciprocamente, se e e g sono identicamente nulle, l'equazione differenziale delle curve asintotiche si riduce a

$$f\, u'v' = 0.$$

Ovviamente, $u = u_0$ e $v = v_0$ sono soluzioni di questa equazione differenziale. In altri termini, le curve coordinate sono asintotiche. □

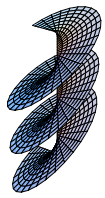
10.2 Esempi di curve asintotiche

Il paraboloide iperbolico

Parametrizziamo il paraboloide iperbolico $z = xy$ ponendo $u = x$ e $v = y$; un calcolo semplice mostra che $e = g = 0$ e che $f = 1/\sqrt{1 + u^2 + v^2}$. Pertanto, per il Teorema 10.1.4, ognuna delle curve $u \longmapsto (u, v, u\,v)$ e $v \longmapsto (u, v, u\,v)$ è asintotica. Di fatto, tali curve sono linee rette. Quindi $(u, v) \longmapsto (u, v, u\,v)$ è una parametrizzazione locale asintotica.

L'elicoide ellittico

L'elicoide ellittico è definito da $\mathbf{helicoid}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}](u, v) = (a\,v\cos u, b\,v\,\sin u, c\,u)$. Come nel caso del paraboloide iperbolico, questa parametrizzazione dell'elicoide ellittico è asintotica, ma a differenza di quanto accade per il paraboloide iperbolico, in questo caso soltanto le curve coordinate v sono linee rette. Le curve coordinate u sono, naturalmente, eliche ellittiche. Il Teorema 10.1.3 ci dice che la curvatura di Gauss dell'elicoide ellittico, ristretta a ognuna di queste eliche ellittiche, è uguale a meno il quadrato della torsione di tale elica.



L'elicoide ellittico

Verifichiamo questo fatto. Calcoliamo, innanzi tutto, la curvatura di Gauss dell'elicoide:

$$\frac{-4a^2b^2c^2}{(a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2b^2v^2 + a^2c^2\cos(2u) - b^2c^2\cos(2u))}$$

Adesso calcoliamo l'opposto del quadrato della torsione dell'elica ellittica $u \longmapsto (a\,v\cos u, b\,v\,\sin v, c\,u)$:

$$\frac{-4a^2b^2c^2}{(a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2b^2v^2 + a^2c^2\cos(2u) - b^2c^2\cos(2u))}$$

Le due funzioni sono uguali.

La sella di scimmia

Parametrizziamo la sella di scimmia $z = \mathfrak{Re}(x + iy)^3$ mediante $X(u, v) = (u, v, u^3 - uv^2)$. Il punto $(0, 0, 0)$ è un punto planare, e pertanto ogni direzione in $(0, 0, 0)$ è una direzione asintotica. Questo non significa, tuttavia, che in tale punto esistano curve asintotiche in tutte le direzioni. Ma è facile trovare tre linee rette che passano per

$(0,0,0)$ e che sono totalmente contenute nella superficie:

$$\begin{aligned} v &\longmapsto (0,v,0),\\ v &\longmapsto \left(\frac{v}{\sqrt{3}},v,0\right),\\ v &\longmapsto \left(-\frac{v}{\sqrt{3}},v,0\right). \end{aligned}$$

È possibile verificare che ognuna di queste curve soddisfa all'equazione differenziale delle curve asintotiche, che è, in questo caso,

$$u\,u'^2 - 2v\,u'v' - u\,v'^2 = 0.$$

La superficie ad imbuto

Consideriamo la superficie regolare immagine della parametrizzazione
$\mathbf{x}\colon (0,\infty)\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{x}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \log r).$$

Questa è una parametrizzazione della superficie data in forma non parametrica dall'equazione

$$z = (1/2)\log(x^2+y^2).$$

Effettuando i calcoli otteniamo:

$$e = \frac{-1}{r\sqrt{1+r^2}}, \qquad f = 0, \qquad g = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Pertanto, l'equazione differenziale delle curve asintotiche è, in questo caso,

$$-\frac{r'^2}{r} + r\theta'^2 = 0, \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \theta' = \pm\frac{r'}{r}. \tag{10.10}$$

Le due equazioni $\theta' = \pm r'/r$ hanno come soluzioni

$$\theta + 2u = \log r, \qquad \theta + 2v = -\log r,$$

dove u e v sono costanti di integrazione. Risolvendo queste equazioni in r e θ in funzione di u e v, si ottiene

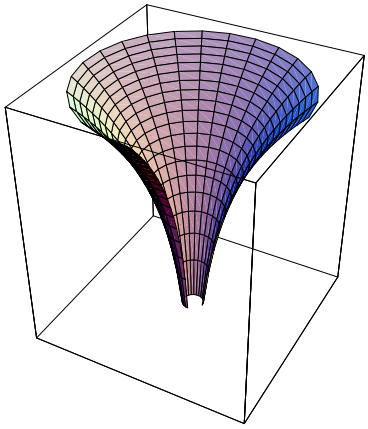
$$\theta = -u - v \qquad \text{e} \qquad r = e^{(u-v)}.$$

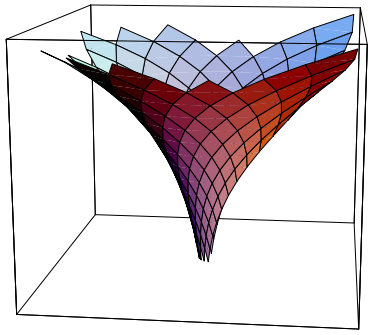
pertanto, la parametrizzazione locale $\mathbf{y}$ definita da

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}(r,\theta) = \big(e^{(u-v)}\cos(u+v), -e^{(u-v)}\sin(u+v), u-v\big)$$

è una parametrizzazione locale asintotica.

Rappresentiamo graficamente la superficie a imbuto con le due parametrizzazioni che abbiamo trovato.





10.3 Esercizi

1. Si dimostri che l'equazione differenziale delle curve asintotiche di una parametrizzazione di Monge $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, h(u,v))$ è

$$h_{uu}u'^2 + 2h_{uv}u'v' + h_{vv}v'^2 = 0.$$

2. Si dimostri che l'equazione differenziale delle curve asintotiche di una parametrizzazione locale polare della forma $\mathbf{x}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\sin\theta, h(r))$ è

$$h''(r)r'^2 + h'(r)r\,\theta'^2 = 0.$$

3. Si trovi l'equazione differenziale delle curve asintotiche del toro $(u,v) \longmapsto ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\,\sin u, b\,\sin v)$.

4. Si trovino e si rappresentino graficamente le curve asintotiche del paraboloide iperbolico generalizzato $z = x^{2n} - y^{2n}$.

5. Si trovino e si rappresentino graficamente le curve asintotiche della superficie definita da $z = x^m y^n$.

6. Si dimostri che le curvature di Gauss e media dell'elicoide circolare definito da $X(u,v) = (av\cos u, av\sin u, bu)$ sono date, rispettivamente, da

$$K = -\frac{c^2}{(c^2 + a^2v^2)^2}, \qquad H = 0.$$

   Si concluda da queste formule che la restrizione della curvatura di Gauss ad ogni curva u-parametrica è costante.

Capitolo 11

Superfici Rigate

In questo capitolo ci occupiamo di un'importante classe di superfici che sono costituite da rette. Tali rette sono automaticamente curve asintotiche in virtù del Corollario 10.1.1. Una superficie rigata è una superficie generata da una retta che si muove lungo una curva.

Definizione 11.0.1. *Una* **superficie rigata** $\mathcal{M}$ *in* $\mathbb{R}^3$ *è una superficie che contiene almeno una famiglia ad un parametro di rette. Quindi una superficie rigata ammette una parametrizzazione* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *della forma*

$$\mathbf{x}(u, v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\,\boldsymbol{\gamma}(u),$$

dove $\boldsymbol{\alpha}$ *e* $\boldsymbol{\gamma}$ *sono curve in* $\mathbb{R}^3$ *con* $\boldsymbol{\alpha}'$ *sempre diverso da* 0. *Si dice che* $\mathbf{x}$ *è una* **parametrizzazione locale rigata**. *La curva* $\boldsymbol{\alpha}$ *è chiamata la* **direttrice propria** *o* **curva base** *della superficie rigata, mentre* $\boldsymbol{\gamma}$ *è detta semplicemente* **curva direttrice**. *Le* **generatrici** *della superficie rigata sono le rette* $v \longmapsto \boldsymbol{\alpha}(u) + v\,\boldsymbol{\gamma}(u)$.

Definizione 11.0.2. *Talvolta su una superficie rigata* $\mathcal{M}$ *ci sono due distinte parametrizzazioni locali rigate. In questo caso si dice che* $\mathbf{x}$ *è* **doppiamente rigata**.

Come caso particolare del Corollario 10.1.1, a pagina 176, si ha

Lemma 11.0.1. *Le generatrici di una superficie rigata* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *sono curve asintotiche.*

Inoltre,

Lemma 11.0.2. *La curvatura di Gauss di una superficie rigata* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ *è ovunque non positiva.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale rigata su $\mathcal{M}$, allora $\mathbf{x}_{vv} = 0$; di conseguenza deve aversi $g = 0$. Quindi per il Teorema 9.5.2, a pagina 160, si ha che

$$K = \frac{-f^2}{E\,G - F^2} \leq 0 \tag{11.1}$$

□

Studieremo le superfici rigate piatte (cioè, le superfici rigate con curvatura di Gauss nulla) nel Paragrafo 11.2. Diamo innanzi tutto alcuni esempi.

11.1 Esempi di superfici rigate

L'iperboloide ellittico ad una falda

L'iperboloide ellittico ad una falda è definito in forma non parametrica da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{11.2}$$

I piani perpendicolari all'asse z intersecano la superficie lungo ellissi, mentre i piani paralleli all'asse z la intersecano in iperboli. La sua parametrizzazione usuale $X(u, v) = (a\cosh v\cos u, b\cosh v\sin u, c\sinh v)$, non mette in evidenza le generatrici.

Mostriamo che l'iperboloide ellittico ad una falda è una superficie doppiamente rigata trovando su di esso due parametrizzazioni locali rigate. Definiamo

$$\begin{aligned}&\mathbf{ellipticalhyperboloid}^{\pm}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}](u, v)\\ &\quad = \mathbf{ellipse}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](u) \pm v\big(\mathbf{ellipse}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]'(u) + (0, 0, c)\big),\end{aligned}$$

dove $\mathbf{ellipse}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ è l'usuale parametrizzazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nel piano xy data da

$$\mathbf{ellipse}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](u) = (a\cos u, b\sin u, 0). \tag{11.3}$$

Allora si può verificare che

$$\begin{aligned}&\mathbf{ellipticalhyperboloid}^{\pm}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\\ &\qquad = \big(a(\cos u \mp v\sin u), b(\sin u \pm v\cos u), \pm c\,v\big).\end{aligned} \tag{11.4}$$

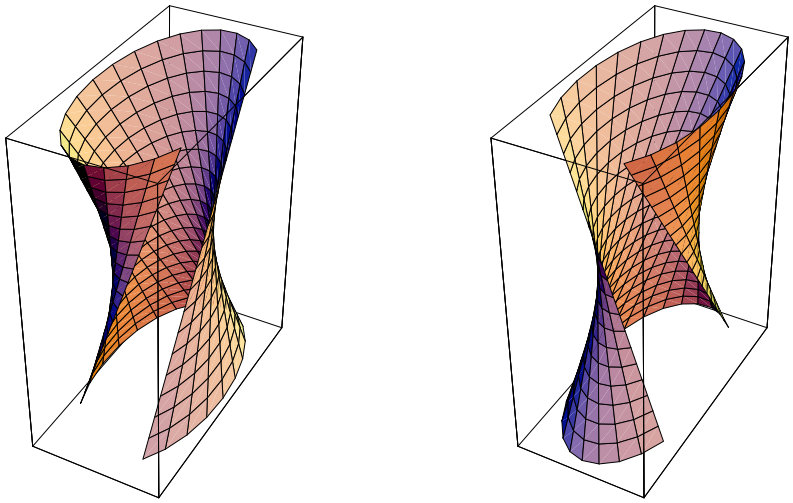
Con un semplice calcolo in cui si tiene conto della (11.4) si verifica che sia **ellipticalhyperboloid**$^+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ che **ellipticalhyperboloid**$^-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ sono parametrizzazioni di (11.2). Quindi l'iperboloide ellittico è doppiamente rigato. La curva base è in entrambi i casi un'ellisse data dalla (11.3).

Le curvature di Gauss e media di
ellipticalhyperboloid$^+_-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$ e di **ellipticalhyperboloid**$^-_+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$ sono rispettivamente

$$\frac{c^2}{(c^2+a^2v^2+c^2v^2)^2}$$

e

$$\frac{c(a^2-c^2-a^2v^2-c^2v^2)}{2a(c^2+a^2v^2+c^2v^2)^{3/2}}.$$



(a) **ellipticalhyperboloid**$^+$ (b) **ellipticalhyperboloid**$^-$

Il paraboloide iperbolico generale

Il paraboloide iperbolico generale è definito in forma non parametrica da

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

È anch'esso doppiamente rigato, dal momento che può essere parametrizzato in due modi:

$$\begin{aligned} \textbf{genhypparab}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^{\pm}(u,v) &= (a\,u, 0, u^2) + v(a, \pm b, 2u) \\ &= (a(u+v), \pm b\,v, u^2 + 2u\,v). \end{aligned}$$

Entrambe le parametrizzazioni si possono ottenere con la stessa formula permettendo a b di assumere sia valori positivi che valori negativi.

Il conoide di Plücker

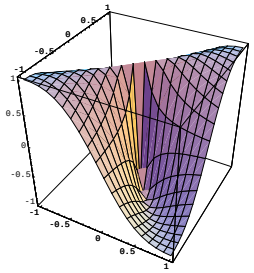
La superficie definita in forma non parametrica da

$$z = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}$$

è chiamata **conoide di Plücker**.[1] La parametrizzazione di Monge di questa superficie è

$$\mathbf{plucker}(u, v) = \left(u, v, \frac{2u\,v}{u^2 + v^2}\right),$$

Con questa parametrizzazione *Mathematica* non disegna le generatrici:



```
ParametricPlot3D[
plucker[u,v]//Evaluate,
{u,-1,1},{v,-1,1}];
```

$(u, v) \longmapsto \mathbf{plucker}(u, v)$

Per vedere le generatrici, dobbiamo passare da (u, v) a (r, θ)

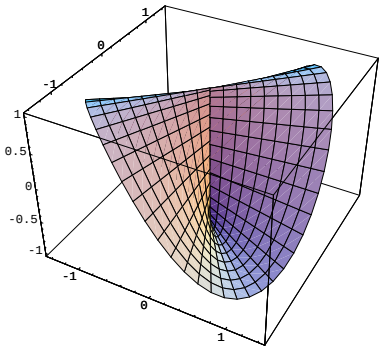
$$\begin{aligned} \mathbf{plucker}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 2\cos\theta\sin\theta) \\ &= (0, 0, 2\cos\theta\sin\theta) + r(\cos\theta, \sin\theta, 0); \end{aligned}$$

in questo modo l'asse z è la direttrice propria e la circonferenza $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ è un'altra direttrice di $(r, \theta) \longmapsto \mathbf{plucker}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

La rappresentazione grafica con *Mathematica* di questa parametrizzazione del conoide di Plücker fa apparire le generatrici; esse si appoggiano tutte all'asse delle z.

[1]

Julius Plücker (1801-1868). Sino al 1846 le ricerche originali di Plücker si svolsero nell'ambito della geometria analitica, ma nel 1846 egli divenne professore di fisica a Bonn. Plücker ebbe scarsi contatti con Jacobi e con Steiner. A partire dal 1846 egli dedicò le sue energie alla fisica sperimentale per quasi vent'anni. Alla fine della sua vita egli tornò alla matematica, ed inventò la geometria delle rette.



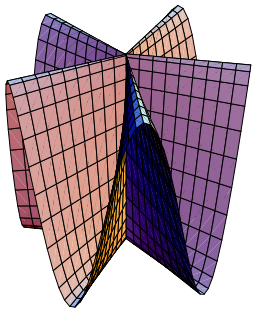

```
ParametricPlot3D[
plucker[r Cos[theta],
r Sin[theta]]
//Simplify//Evaluate,
{r,0,Sqrt[2]},
{theta,0,2Pi},
PlotPoints->{10,60}];
```

$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, 2\cos\theta\sin\theta)$

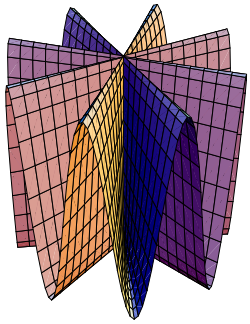
È facile definire una generalizzazione del conoide di Plücker che ha n pieghe invece di 2:

$$\mathbf{pluckerpolar}[\boldsymbol{n}](r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin n\theta),$$

Ogni superficie $\mathbf{pluckerpolar}[\boldsymbol{n}]$ è una superficie rigata con generatrici passanti per l'asse delle z.



(a) $(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin 5\theta)$



(b) $(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin 8\theta)$

Il nastro di Möbius come superficie rigata

Possiamo riscrivere la definizione 7.2, a pagina 123, del nastro di Möbius nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{moebiusstrip}[\boldsymbol{a}](u, v) &= a(\cos u, \sin u, 0) \\ &\quad + v\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos u, \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin u, \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Si vede dalla (11.5) che **moebiusstrip[*a*]** è una superficie rigata con curva base o direttrice propria

$$u \longmapsto (\cos u, \sin u, 0)$$

e con un'altra direttrice data da

$$u \longmapsto \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos u, \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin u, \sin\left(\frac{u}{2}\right)\right),$$

che è una curva su una sfera di raggio 1. Possiamo calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale, la curvatura di Gauss e la curvatura media. Ad esempio, i valori di F e di G sono 0 e 1; per E si trova:

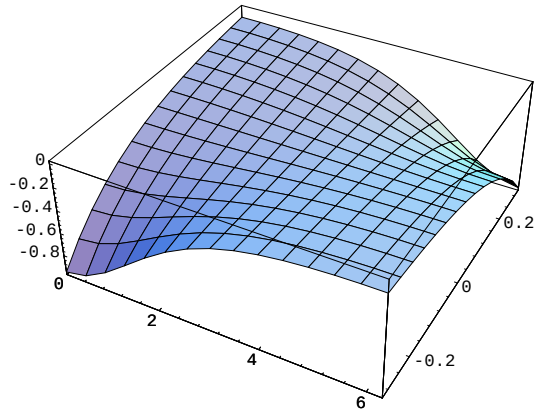
$$\frac{4a^2 + 3v^2 + 8av\cos(u/2) + 2v^2 cos(u/2)}{4}$$

Inoltre, possiamo calcolare la curvatura di Gauss e la curvatura media del nastro di Möbius

$$K = \frac{-4a^2}{(4a^2 + 3v^2 + 8av\cos(u/2) + 2v^2\cos u)^2}$$

$$H = \frac{-2(2(a^2 + v^2) + 4av\cos(u/2) + v^2\cos u)\sin(u/2)}{(4a^2 + 3v^2 + 8av\cos(u/2) + 2v^2\cos u)^{3/2}}$$

Ecco un grafico della curvatura gaussiana del nastro di Möbius.



Curvatura di Gauss di un nastro di Möbius

Quindi la curvatura di Gauss di questa particolare parametrizzazione non si annulla mai, ciò che significa che questa parametrizzazione non è localmente isometrica al nastro di Möbius piatto che uno costruisce con una striscia di carta.

11.2 Superfici rigate piatte

Ricordiamo che una superficie piatta è una superficie la cui curvatura di Gauss si annulla dappertutto. Diamo un criterio per la piattezza di una superficie rigata.

Lemma 11.2.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie rigata. Allora la componente g della seconda forma fondamentale di $\mathcal{M}$ si annulla. Di conseguenza, $\mathcal{M}$ è piatta se e solo se $f = 0$.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata della (11.1) □

Ora consideriamo tre superfici rigate classiche che sono piatte.

Definizione 11.2.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie rigata. Allora*

(i) *$\mathcal{M}$ è la* **rigata circoscritta** *ad una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se $\mathcal{M}$ può essere parametrizzata da*

$$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{tandev}[\boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\,\boldsymbol{\alpha}'(u);$$

(ii) *$\mathcal{M}$ è un* **cilindro generalizzato**, *se $\mathcal{M}$ può essere parametrizzata nel modo seguente*

$$\mathbf{y}(u,v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\,\mathbf{q},$$

dove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ è un punto fissato;

(iii) *$\mathcal{M}$ è un* **cono generalizzato**, *se $\mathcal{M}$ può essere parametrizzata da*

$$\mathbf{z}(u,v) = \mathbf{p} + v\,\boldsymbol{\alpha}(u),$$

dove $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ è a punto fissato. (Quindi $\mathbf{p}$ può essere interpretato come il **vertice** *del cono.)*

Lemma 11.2.2. *I criteri per la regolarità delle rigate circoscritte, dei cilindri generalizzati e dei coni generalizzati sono i seguenti.*

(i) *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare la cui curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$ è ovunque diversa da zero. Allora la rigata circoscritta $\mathbf{x}$ ad $\boldsymbol{\alpha}$ è regolare dappertutto tranne che lungo $\boldsymbol{\alpha}$.*

(ii) *Un cilindro generalizzato $\mathbf{y}(u,v) = \boldsymbol{\beta}(u) + v\,\mathbf{q}$ è regolare in tutti i punti nei quali $\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{q}$ non si annulla.*

(iii) Un cono generalizzato $\mathbf{z}(u,v) = \mathbf{p} + v\,\boldsymbol{\gamma}(u)$ *è regolare dovunque* $v\,\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}'$ *è diversa da zero. Un cono generalizzato non è mai regolare nel suo vertice.*

Dimostrazione. Per una rigata circoscritta $\mathbf{x}$ si ha

$$(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u,v) = (\boldsymbol{\alpha}' + v\,\boldsymbol{\alpha}'') \times \boldsymbol{\alpha}' = v\,\boldsymbol{\alpha}'' \times \boldsymbol{\alpha}'. \tag{11.6}$$

Se $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}] \neq 0$, allora $\boldsymbol{\alpha}'' \times \boldsymbol{\alpha}'$ è ovunque diversa da zero per la (3.23). Quindi la (11.6) implica che $\mathbf{x}$ sia regolare se $v \neq 0$. Le altre affermazioni si dimostrano in modo simile. □

Teorema 11.2.1. *Se* $\mathcal{M}$ *è una rigata circoscritta, un cilindro generalizzato oppure un cono generalizzato, allora* $\mathcal{M}$ *è piatta.*

Dimostrazione. Per il Lemma 11.2.1 basta dimostrare che $f = 0$ in ognuno dei tre casi. Per una rigata circoscritta $\mathbf{x}$ si ha $\mathbf{x}_u = \boldsymbol{\alpha}' + v\,\boldsymbol{\alpha}''$, $\mathbf{x}_v = \boldsymbol{\alpha}'$, e

$$\mathbf{x}_{uu} = \boldsymbol{\alpha}'' + v\,\boldsymbol{\alpha}''', \qquad \mathbf{x}_{uv} = \boldsymbol{\alpha}'', \qquad \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Quindi

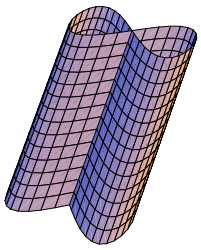
$$f = \frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}'' \\ \boldsymbol{\alpha}' + v\,\boldsymbol{\alpha}'' \\ \boldsymbol{\alpha}' \end{pmatrix}}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = 0.$$

È ovvio che $f = 0$ per un cilindro generalizzato $\mathbf{y}$, essendo $\mathbf{x}_{uv} = 0$. Infine, per un cono generalizzato, calcoliamo

$$f = \frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}' \\ v\,\boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = 0$$

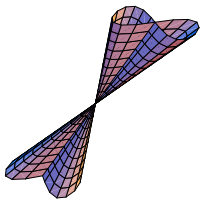
□

Ecco le tipiche rappresentazioni grafiche di un cono e di un cilindro su una curva a otto.



Cilindro sopra una curva a otto

```
ParametricPlot3D[
cylinder[{0,1,1},
inscurve[3,0,eight]][u,v]
//Evaluate,
{u,0,2Pi},{v,0,2},
Axes->None,
Boxed->False,
PlotPoints->{40,15}];
```



Cono sopra una curva a otto

```
ParametricPlot3D[
cone[{0,0,0},
inscurve[3,2,
(eight[#]+{1,1})&]][u,v]
//Evaluate,
{u,0,2Pi},{v,-2,2},
Axes->None,
Boxed->False];
```

11.3 Rigate circoscritte

Sappiamo dal Lemma 11.2.2 che la superficie **tandev**[$\boldsymbol{\alpha}$] è singolare lungo la curva $\boldsymbol{\alpha}$. Vogliamo ora dimostrare che **tandev**[$\boldsymbol{\alpha}$] è costituita da due falde che si incontrano lungo la curva $\boldsymbol{\alpha}$ formando uno spigolo affilato, chiamato lo **spigolo di regresso**.

Teorema 11.3.1. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva analitica di velocità unitaria, con* $a < 0 < b$*, e sia* $\mathbf{x}$ *la rigata circoscritta ad* $\boldsymbol{\alpha}$*. Allora l'intersezione della traccia di* $\mathbf{x}$ *con il piano perpendicolare ad* $\boldsymbol{\alpha}$ *in* $\boldsymbol{\alpha}(0)$ *è una parabola semicubica con una cuspide in* $\boldsymbol{\alpha}(0)$*.*

Dimostrazione. Calcoliamo le prime quattro derivate di $\boldsymbol{\alpha}$ e teniamo conto delle formule di Frenet (Teorema 3.2.1, a pagina 45):

$$
(11.7)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}'(s) &= \mathbf{T}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}''(s) &= \boldsymbol{\kappa}(s)\mathbf{N}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}'''(s) &= -\boldsymbol{\kappa}(s)^2\mathbf{T}(s) + \boldsymbol{\kappa}'(s)\mathbf{N}(s) + \boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{\tau}(s)\mathbf{B}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}''''(s) &= -3\boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{\kappa}'(s)\mathbf{T}(s) + \big(-\boldsymbol{\kappa}(s)^3 + \boldsymbol{\kappa}''(s) - \boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{\tau}(s)^2\big)\mathbf{N}(s) \\ & \qquad + \big(2\boldsymbol{\kappa}'(s)\boldsymbol{\tau}(s) + \boldsymbol{\kappa}(s)\boldsymbol{\tau}'(s)\big)\mathbf{B}(s). \end{cases}
$$

Sviluppando $\boldsymbol{\alpha}$ in serie di potenze in un intorno di $\boldsymbol{\alpha}(0)$, e tenendo conto della (11.7), otteniamo

$$
\begin{aligned}
(11.8)\quad \boldsymbol{\alpha}(s) &= \boldsymbol{\alpha}(0) + s\boldsymbol{\alpha}'(0) + \frac{s^2}{2}\boldsymbol{\alpha}''(0) + \frac{s^3}{6}\boldsymbol{\alpha}'''(0) + \frac{s^4}{24}\boldsymbol{\alpha}''''(0) + O(s^5) \\
&= \boldsymbol{\alpha}(0) + \mathbf{T}(0)\left(s - \frac{s^3}{6}\boldsymbol{\kappa}(0)^2 - \frac{s^4}{8}\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\kappa}'(0)\right) \\
&\quad + \mathbf{N}(0)\left(\frac{s^2}{2}\boldsymbol{\kappa}(0) + \frac{s^3}{6}\boldsymbol{\kappa}'(0) + \frac{s^4}{24}\big(-\boldsymbol{\kappa}(0)^3 + \boldsymbol{\kappa}''(0) - \boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}(0)^2\big)\right) \\
&\quad + \mathbf{B}(0)\left(\frac{s^3}{6}\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}(0) + \frac{s^4}{24}\big(2\boldsymbol{\kappa}'(0)\boldsymbol{\tau}(0) + \boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}'(0)\big)\right) + O(s^5).
\end{aligned}
$$

Derivando entrambi i membri della (11.8), troviamo

$$
\begin{aligned}
(11.9)\quad \boldsymbol{\alpha}'(s) &= \mathbf{T}(0)\left(1 - \frac{s^2}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)^2 - \frac{s^3}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\kappa}'(0)\right) \\
&\quad + \mathbf{N}(0)\left(s\boldsymbol{\kappa}(0) + \frac{s^2}{2}\boldsymbol{\kappa}'(0) + \frac{s^3}{6}\big(-\boldsymbol{\kappa}(0)^3 + \boldsymbol{\kappa}''(0) - \boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}(0)^2\big)\right) \\
&\quad + \mathbf{B}(0)\left(\frac{s^2}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}(0) + \frac{s^3}{6}\big(2\boldsymbol{\kappa}'(0)\boldsymbol{\tau}(0) + \boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}'(0)\big)\right) + O(s^4).
\end{aligned}
$$

Sia ora $\mathbf{x}$ la rigata circoscritta ad $\boldsymbol{\alpha}$. Dalle (11.8) e (11.9) si ottiene

$$
\begin{aligned}
(11.10)\ \mathbf{x}(u,v) &= \boldsymbol{\alpha}(u) + v\,\boldsymbol{\alpha}'(u) \\
&= \boldsymbol{\alpha}(0) + \mathbf{T}(0)\left(u - \frac{u^3}{6}\boldsymbol{\kappa}(0)^2 + v - \frac{u^2 v}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)^2 - \frac{u^3 v}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\kappa}'(0)\right) \\
&\quad + \mathbf{N}(0)\left(\frac{u^2}{2}\boldsymbol{\kappa}(0) + \frac{u^3}{6}\boldsymbol{\kappa}'(0) + u\,v\,\boldsymbol{\kappa}(0) + \frac{u^2 v}{2}\boldsymbol{\kappa}'(0)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{u^3 v}{6}\big(-\boldsymbol{\kappa}(0)^3 + \boldsymbol{\kappa}''(0) - \boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}(0)^2\big)\right) \\
&\quad + \mathbf{B}(0)\left(\left(\frac{u^3}{6} + \frac{u^2 v}{2}\right)\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}(0)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{u^3 v}{6}\big(2\boldsymbol{\kappa}'(0)\boldsymbol{\tau}(0) + \boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\tau}'(0)\big)\right) + O(u^4).
\end{aligned}
$$

Vogliamo trovare l'intersezione di $\mathbf{x}$ con il piano perpendicolare ad $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\alpha}(0)$. Quindi poniamo il coefficiente di $\mathbf{T}(0)$ nella (11.10) uguale a zero e risolviamo rispetto a v. Allora

$$
v = -\frac{u - \dfrac{u^3}{6}\boldsymbol{\kappa}(0)^2 + O(u^4)}{1 - \dfrac{u^2}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)^2 - \dfrac{u^3}{2}\boldsymbol{\kappa}(0)\boldsymbol{\kappa}'(0) + O(u^4) = -u - \boldsymbol{\kappa}(0)^2\dfrac{u^3}{3} + O(u^4)}.
$$

Sostituendo questo valore di v nella (11.10), si ottengono sviluppi in serie per i coefficienti di $\mathbf{N}(0)$ e di $\mathbf{B}(0)$:

$$
(11.11)\qquad \begin{cases} \text{coefficiente di } \mathbf{N}(0) &= -\dfrac{u^2}{2}\boldsymbol{\kappa}(0) - \dfrac{u^3}{3}\boldsymbol{\kappa}'(0) + \cdots, \\ \text{coefficiente di } \mathbf{B}(0) &= -\dfrac{u^3}{3}\boldsymbol{\kappa}(0)^2\boldsymbol{\tau}(0) + \cdots . \end{cases}
$$

Se si trascurano i termini di ordine superiore, la curva piana descritta dalla (11.11) è data in forma implicita da un'equazione del tipo

$$y^2 = ax^3,$$

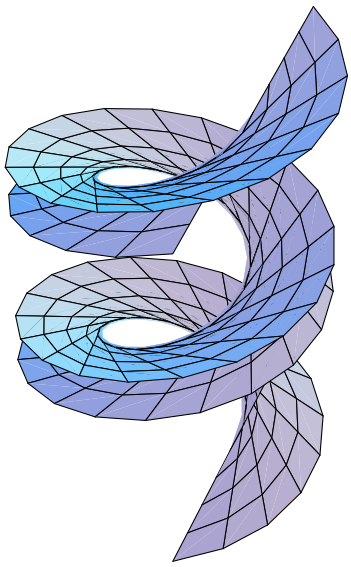
che è una parabola semicubica. □

Il seguente lemma si dimostra facilmente.

Lemma 11.3.1. *Sia* $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva con velocità unitaria. Allora i coefficienti della metrica della rigata circoscritta* $\mathbf{tandev}[\boldsymbol{\beta}]$ *dipendono solo dalla curvatura di* $\boldsymbol{\beta}$*. Esplicitamente*:

$$E = 1 + v^2\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]^2, \qquad F = 1, \qquad G = 1.$$

Dal momento che per ogni elica esiste una circonferenza con la stessa curvatura, il Lemma 11.3.1 implica che la rigata circoscritta ad un'elica può essere costruita da una striscia di carta ritagliando un disco e avvolgendo la parte rimanente attorno a un cilindro.
Ecco come si rappresenta la rigata circoscritta ad un'elica circolare:



Rigata circoscritta ad un' elica circolare

Capitolo 12

Superfici di Rotazione

Le superfici di rotazione formano una delle classi più semplici e non banali di superfici. La sfera, il toro ed il paraboloide $z = x^2 + y^2$ sono tutte superfici di rotazione. Un ellissoide è una superficie di rotazione se due dei suoi assi sono uguali. La superficie esterna di molti oggetti con cui si ha a che fare nella vita di ogni giorno, come tazze, bicchieri di vetro, e gambe di sedie, è spesso una superficie di rotazione. Una superficie di rotazione viene generata dalla rotazione di una curva piana attorno a una retta in $\mathbb{R}^3$. Più precisamente:

Definizione 12.0.1. *Siano* $\boldsymbol{\Pi}$ *un piano in* $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{L}$ *una retta in* $\boldsymbol{\Pi}$ *e* $\boldsymbol{C}$ *una curva contenuta in* $\boldsymbol{\Pi}$. *Quando* $\boldsymbol{C}$ *viene fatto ruotare in* $\mathbb{R}^3$ *attorno a* $\boldsymbol{L}$, *l'insieme di punti* $\mathcal{M}$ *che si ottiene viene detto la* **superficie di rotazione** *generata da* $\boldsymbol{C}$, *e* $\boldsymbol{C}$ *è chiamata la* **curva profilo** *di* $\mathcal{M}$. *La retta* $\boldsymbol{L}$ *è detta* **l'asse di rotazione** *di* $\mathcal{M}$.

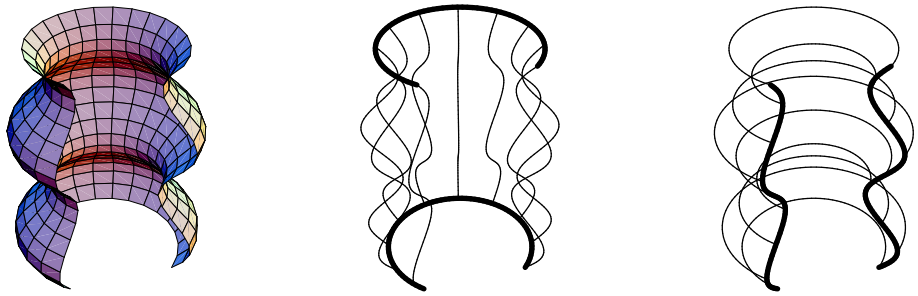
Per comodità scegliamo come $\boldsymbol{\Pi}$ il piano xz e come $\boldsymbol{L}$ l'asse z. Supporremo anche che l'insieme $\boldsymbol{C}$ ammetta una parametrizzazione $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ differenziabile. Scriviamo $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$.

Definizione 12.0.2. *La parametrizzazione* $\mathbf{surfrev}[\boldsymbol{\alpha}]\colon [0,2\pi]\times(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$\mathbf{surfrev}[\boldsymbol{\alpha}](u,v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big). \tag{12.1}$$

è chiamata la **parametrizzazione standard** *della superficie di rotazione* $\mathcal{M}$.

In genere si suppone $\varphi(v) \geq 0$ in (12.1) per evitare che la curva profilo intersechi l'asse di rotazione. Inizialmente noi però non faremo questa ipotesi, e d'altronde le formule per la curvatura che ricaveremo valgono anche nel caso generale.



(a) (b) (c)

La superficie di rotazione generata dalla curva
$t \longmapsto (2 + (1/2)\sin 2t, t)$
con i meridiani ed i paralleli

Un meridiano sulla terra è una circonferenza massima che passa per i poli nord e sud. Un parallelo è una circonferenza sulla terra parallela all'equatore. Queste nozioni hanno un corrispettivo su una superficie di rotazione arbitraria.

Definizione 12.0.3. *Sia $\boldsymbol{C}$ una curva contenuta in un piano $\boldsymbol{\Pi} \subset \mathbb{R}^3$, e sia $\mathcal{M}[\boldsymbol{C}]$ la superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$ generata dalla rotazione di $\boldsymbol{C}$ attorno a una retta $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{\Pi}$. Un* **meridiano** *su $\mathcal{M}[\boldsymbol{C}]$ è l'intersezione di $\mathcal{M}[\boldsymbol{C}]$ con un piano contenente l'asse della superficie di rotazione $\boldsymbol{L}$. Un* **parallelo** *su $\mathcal{M}[\boldsymbol{C}]$ è l'intersezione di $\mathcal{M}[\boldsymbol{C}]$ con un piano ortogonale all'asse della superficie di rotazione.*

Nel Teorema 12.1.2 dimostriamo che tutti i meridiani ed i paralleli di una superficie di rotazione sono curve principali. (Si veda la definizione di curva principale a pagina 195.) Inoltre, per una superficie di rotazione parametrizzata dalla (12.1), i meridiani ed i paralleli sono linee coordinate. Dal momento che **ParametricPlot3D** disegna sempre le curve coordinate, si ha che *Mathematica mostra automaticamente approssimazioni poligonali dei meridiani e dei paralleli su ogni superficie di rotazione.*

Nel Paragrafo 12.1 dimostriamo alcune proprietà generali delle curve principali. Le curvature di Gauss e media di una superficie di rotazione vengono calcolate nel Paragrafo 12.2. Nel Paragrafo 12.3 dimostriamo che ogni superficie di rotazione che sia anche una superficie minima è contenuta in un catenoide oppure in un piano. Il catenoide viene messo a confronto con un iperboloide di rotazione nel Paragrafo 12.4.

Tra le superfici di rotazione più interessanti ci sono quelle a curvatura costante. Ad esse è dedicato il Capitolo 13.

Darboux in ([Darb2, Volume 1, pagina 128] è molto efficace quando osserva che una superficie di rotazione gode di una importante proprietà cinematica: mentre ruota attorno al suo asse, essa scivola su se stessa. In un linguaggio più moderno, noi diremmo che una superficie di rotazione è l'orbita di una curva in un piano $\mathbf{\Pi}$ rispetto ad un gruppo ad un parametro di rotazioni di $\mathbb{R}^3$ attorno ad una retta contenuta in $\mathbf{\Pi}$. Una generalizzazione della rotazione in $\mathbb{R}^3$ è il **moto elicoidale**, cioè il movimento euclideo che è la composizione di una rotazione attorno ad un asse e di una traslazione parallela ad esso. Anche gli elicoidi generalizzati godono di una proprietà cinematica: quando un elicoide generalizzato si muove di moto elicoidale, esso scivola su se stesso. Nel linguaggio moderno, un elicoide generalizzato è l'orbita di una curva in un piano $\mathbf{\Pi}$ sotto l'azione di un gruppo ad un parametro di movimenti elicoidali di $\mathbb{R}^3$ attorno ad un retta contenuta in $\mathbf{\Pi}$.

12.1 Linee di curvatura o curve principali

Le curve principali hanno importanza pari a quella delle curve asintotiche che abbiamo studiato nel Capitolo 10.

Definizione 12.1.1. *Una curva $\boldsymbol{\alpha}$ su una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ è detta una* **curva principale** *(linea di curvatura) se il suo vettore velocità $\boldsymbol{\alpha}'$ ha sempre come direzione una direzione principale, cioè se*

$$S(\boldsymbol{\alpha}') = \mathbf{k}_i \boldsymbol{\alpha}',$$

dove $\mathbf{k}_i$ è una curvatura principale di $\mathcal{M}$.

Il seguente lemma fornisce un'utile caratterizzazione dei vettori principali.

Lemma 12.1.1. *Un vettore tangente $\mathbf{v_p}$ a una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ non nullo è principale se e solo se*

$$S(\mathbf{v_p}) \times \mathbf{v_p} = \mathbf{0}.$$

Quindi una curva $\boldsymbol{\alpha}$ di $\mathcal{M}$ è una curva principale se e solo se $S(\boldsymbol{\alpha}') \times \boldsymbol{\alpha}' = 0$.

Dimostrazione. Se $S(\mathbf{v_p}) = \mathbf{k}_i \mathbf{v_p}$, allora $S(\mathbf{v_p}) \times \mathbf{v_p} = \mathbf{k}_i \mathbf{v_p} \times \mathbf{v_p} = 0$. Reciprocamente, se $S(\mathbf{v_p}) \times \mathbf{v_p} = 0$, allora $S(\mathbf{v_p})$ e $\mathbf{v_p}$ sono linearmente dipendenti. □

Nella maggior parte dei casi le curve principali si trovano con considerazioni geometriche. Per esempio, ci si può servire di terne di famiglie di superfici ortogonali per

costruire curve principali. Un altro esempio è dato dal teorema seguente, dovuto a Joachimsthal[1] (si veda [Joach1]); esso fornisce un metodo semplice ma estremamente utile per trovare curve principali. Esso dà un semplice criterio per stabilire quando l'intersezione di due superfici è una curva principale su entrambe.

Teorema 12.1.1. (Joachimsthal) *Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva contenuta nell'intersezione di due superfici regolari $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Denotiamo con $\mathbf{U}_i$ il campo unitario normale a $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$. Supponiamo che lungo $\boldsymbol{\alpha}$ le superfici $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ si incontrino formando un angolo costante, cioè siano tali che $\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2$ sia costante lungo $\boldsymbol{\alpha}$. Allora $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva principale in $\mathcal{M}_1$ se e solo se essa è una curva principale in $\mathcal{M}_2$.*

Dimostrazione. Lungo la curva di intersezione si ha

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{U}_1\right) \cdot \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_1 \cdot \left(\frac{d}{dt}\mathbf{U}_2\right). \tag{12.2}$$

Supponiamo che la curva di intersezione $\boldsymbol{\alpha}$ sia una curva principale lungo $\mathcal{M}_1$. Allora

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_1 = -\mathbf{k}_1\boldsymbol{\alpha}', \tag{12.3}$$

dove $\mathbf{k}_1$ è una curvatura principale su $\mathcal{M}_1$. Ma $\boldsymbol{\alpha}'$ è ortogonale anche a $\mathbf{U}_2$, e quindi dalla (12.2) e dalla (12.3) risulta che

$$\mathbf{U}_1 \cdot \left(\frac{d}{dt}\mathbf{U}_2\right) = 0. \tag{12.4}$$

Dal momento che $d\mathbf{U}_2/dt$ è perpendicolare anche a $\mathbf{U}_2$, segue dalla (12.4) che

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_2 = -\mathbf{k}_2\boldsymbol{\alpha}'$$

per qualche $\mathbf{k}_2$. In altre parole, $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva principale in $\mathcal{M}_2$ □

Come importante applicazione del Teorema 12.1.1 vogliamo trovare le curve principali su una superficie di rotazione.

Teorema 12.1.2. *Supponiamo che la superficie di rotazione $\mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}]$ generata da una curva piana $\boldsymbol{\alpha}$ sia una superficie regolare. Allora i meridiani e i paralleli su $\mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}]$ sono curve principali.*

[1] Ferdinand Joachimsthal (1818-861). Matematico tedesco. Il Teorema (12.1.1) è il contributo più importante di Joachimsthal alla geometria differenziale. Joachimsthal fu un grande didatta. Il suo libro [Joach2] fu uno dei primi a spiegare i risultati ottenuti dalla scuola di Monge e da Gauss.

Dimostrazione. Ogni meridiano si ottiene intersecando $\mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}]$ con un piano $\boldsymbol{\Pi}_{\text{meridiano}}$ contenente l'asse di rotazione di $\mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}]$. Se $\mathbf{p} \in \mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}] \cap \boldsymbol{\Pi}_{\text{meridiano}}$ è chiaro che il campo $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ normale a $\mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}]$ sta in $\boldsymbol{\Pi}_{\text{meridiano}}$. Quindi $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ e il campo unitario normale a $\boldsymbol{\Pi}_{\text{meridiano}}$ sono ortogonali. Allora il Teorema 12.1.1 implica che i meridiani sono curve principali.

Sia poi $\boldsymbol{\Pi}_{\text{parallelo}}$ un piano ortogonale all'asse di $\mathcal{M}[\boldsymbol{\alpha}]$. Grazie alla simmetria assiale, il campo unitario $\mathbf{U}$ normale a $\mathcal{M}$ forma un angolo costante con il campo unitario normale a $\boldsymbol{\Pi}_{\text{parallelo}}$. Ancora per il Teorema 12.1.1 si ha che i paralleli sono curve principali. □

Le curve principali danno origine ad una classe importante di parametrizzazioni per le quali il calcolo della curvatura è particolarmente semplice.

Definizione 12.1.2. *Una* **parametrizzazione principale** *è una parametrizzazione* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *per la quale le curve*

$$u \longmapsto \mathbf{x}(u, v) \qquad e \qquad v \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$$

sono curve principali.

Lemma 12.1.2. *Una parametrizzazione* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *è principale se e solo se*

$$F = f = 0. \tag{12.5}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{x}$ è principale, allora sia $\mathbf{x}_u$ che $\mathbf{x}_v$ sono autovettori dell'operatore di forma. Allora il Lemma 9.4.2 (a pagina 155) implica la (12.5). Reciprocamente, la (12.5) e le equazioni di Weingarten (Teorema 9.3.1, a pagina 152) implicano che $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ siano autovettori dell'operatore di forma. □

Vedremo nel Paragrafo 12.2 che la parametrizzazione standard (12.1) di una superficie di rotazione è una parametrizzazione principale.

12.2 Le curvature di una superficie di rotazione

Calcoliamo innanzi tutto i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale e anche il campo normale unitario per una generica superficie di rotazione.

Lemma 12.2.1. *Sia* $\mathcal{M}$ *una superficie di rotazione con curva profilo* $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la parametrizzazione standard* (12.1) *di* $\mathcal{M}$. *Allora*

$$E = \varphi^2, \qquad F = 0, \qquad G = \varphi'^2 + \psi'^2. \tag{12.6}$$

Pertanto $\mathbf{x}$ *è regolare ogniqualvolta le funzioni* φ *e* $\varphi'^2 + \psi'^2$ *sono diverse da zero. Quando questo accade,*

$$e = \frac{-|\varphi|\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \qquad f = 0, \qquad g = \frac{\operatorname{sign}(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \tag{12.7}$$

e il campo normale unitario è dato da

$$\mathbf{U}(u,v) = \operatorname{sign}(\varphi)\frac{(\psi'\cos u, \psi'\sin u, -\varphi')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}. \tag{12.8}$$

Dimostrazione. Dalla (12.1) segue che le derivate parziali prime di $\mathbf{x}$ sono date da

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u &= \big(-\varphi(v)\sin u, \varphi(v)\cos u, 0\big), \\ \mathbf{x}_v &= \big(\varphi'(v)\cos u, \varphi'(v)\sin u, \psi'(v)\big). \end{cases} \tag{12.9}$$

Allora la (12.6) risulta immediatamente dalla (12.9) e dalle definizioni di E, F e G. Allo stesso modo, le derivate parziali seconde di $\mathbf{x}$ sono

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} &= \big(-\varphi(v)\cos u, -\varphi(v)\sin u, 0\big), \\ \mathbf{x}_{uv} &= \big(-\varphi'(v)\sin u, \varphi'(v)\cos u, 0\big), \\ \mathbf{x}_{vv} &= \big(\varphi''(v)\cos u, \varphi''(v)\sin u, \psi''(v)\big). \end{cases} \tag{12.10}$$

Calcoliamo poi e, f e g servendoci del Lemma 9.5.2, a pagina 162:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \frac{\det\begin{pmatrix} -\varphi\cos u & -\varphi\sin u & 0 \\ -\varphi\sin u & \varphi\cos u & 0 \\ \varphi'\cos u & \varphi'\sin u & \psi' \end{pmatrix}}{\sqrt{\varphi^2(\varphi'^2 + \psi'^2)}} \\ &= \frac{-\varphi^2\psi'}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} = \frac{-|\varphi|\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \end{aligned}$$

$$f = \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \frac{\det\begin{pmatrix} -\varphi'\sin u & \varphi'\cos u & 0 \\ -\varphi\sin u & \varphi\cos u & 0 \\ \varphi'\cos u & \varphi'\sin u & \psi' \end{pmatrix}}{\sqrt{\varphi^2(\varphi'^2 + \psi'^2)}} = 0,$$

$$g = \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{vv} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \frac{\det\begin{pmatrix} \varphi'' \cos u & \varphi'' \sin u & \psi'' \\ -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \end{pmatrix}}{\sqrt{\varphi^2(\varphi'^2 + \psi'^2)}}$$

$$= \frac{\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} = \frac{\mathrm{sign}(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Infine, per la (12.8) utilizziamo la (12.9) e calcoliamo:

$$\mathbf{U} = \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & \mathbf{x}_u & \\ & \mathbf{x}_v & \end{pmatrix}}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \end{pmatrix}}{\sqrt{\varphi^2(\varphi'^2 + \psi'^2)}}$$

$$= \frac{(\varphi\psi' \cos u, \varphi\psi' \sin u, -\varphi\varphi')}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} = \mathrm{sign}(\varphi)\frac{(\psi' \cos u, \psi' \sin u, -\varphi')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

□

Corollario 12.2.1. *La parametrizzazione standard* (12.1) *di una superficie di rotazione è una parametrizzazione principale.*

Dimostrazione. Dal momento che $F = f = 0$ per $\mathbf{x}$, il corollario è conseguenza immediata del Lemma 12.1.2. □

A questo punto potremmo calcolare la curvatura gaussiana K utilizzando il Teorema 9.5.2; preferiamo tuttavia ricavare prima le curvature principali. Ricordiamo che $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$ è un parallelo e che $v \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$ è un meridiano. Sappiamo che per il Teorema 12.1.2 queste curve coordinate sono curve principali. Quindi le curvature principali di una superficie di rotazione hanno un significato particolare, e perció le denotiamo con $\mathbf{k}_\pi$ e $\mathbf{k}_\mu$ invece che con le solite $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. Qui $\mathbf{k}_\pi$ è la curvatura del parallelo $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$ e $\mathbf{k}_\mu$ è la curvatura del meridiano $v \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$.

Teorema 12.2.1. *Le curvature principali di una superficie di rotazione parametrizzata dalla parametrizzazione standard* (12.1) *sono date da*

$$\begin{cases} \mathbf{k}_\mu = \dfrac{g}{G} = \dfrac{\mathrm{sign}(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{k}_\pi = \dfrac{e}{E} = \dfrac{-\psi'}{|\varphi|\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}. \end{cases} \tag{12.11}$$

La curvatura gaussiana è data da

$$K = \frac{-\psi'^2\varphi'' + \varphi'\psi'\psi''}{\varphi(\varphi'^2 + \psi'^2)^2}, \tag{12.12}$$

mentre la curvatura media è data da

$$H = \frac{\varphi(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') - \psi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{2|\varphi|(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}. \tag{12.13}$$

Dimostrazione. Dal momento che $F = f = 0$, risulta che

$$\left\{ \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} \right\}$$

forma una base ortonormale che diagonalizza l'operatore di forma S nei punti in cui $\mathbf{x}$ è regolare. Per il Teorema 9.3.1 si ha allora

$$S(\mathbf{x}_u) = \frac{e}{E}\mathbf{x}_u \qquad \text{e} \qquad S(\mathbf{x}_v) = \frac{g}{G}\mathbf{x}_v. \tag{12.14}$$

Quindi per definizione $\mathbf{k}_\pi = e/E$ e $\mathbf{k}_\mu = g/G$. Ora la (12.11) segue dalla (12.6) e dalla (12.7).

Infine, la (12.12) e la (12.13) discendono dal fatto che $K = \mathbf{k}_\pi\mathbf{k}_\mu$ e $H = (\mathbf{k}_\pi + \mathbf{k}_\mu)/2$ □

Corollario 12.2.2. *Per una superficie di rotazione sia le curvature K, H, $\mathbf{k}_\mu$, $\mathbf{k}_\pi$ che le funzioni E, F, G, e, f, g sono costanti lungo i paralleli.*

Dimostrazione. Tutte queste quantità sono esprimibili in funzione di φ, di ψ e delle loro derivate. Ma φ e ψ non dipendono da u □

Dalla descrizione geometrica della curvatura normale data nel Paragrafo 9.2 sappiamo che $\mathbf{k}_\mu$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ coincide, a meno del segno, con la curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ del meridiano per $\mathbf{p}$. La prima delle equazioni (12.11) conferma questo fatto.

Possiamo sempre supporre che ogni curva profilo abbia velocità unitaria. In tal caso, le formule che abbiamo ricavato sinora per una superficie di rotazione si semplificano notevolmente.

Corollario 12.2.3. *Sia $\mathbf{x}$ la parametrizzazione standard* (12.1) *di una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$ la cui curva profilo $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$ ha velocità unitaria. Allora*

$$E = \varphi^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$

$$e = -|\varphi|\psi', \qquad f = 0, \qquad g = \operatorname{sign}(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi''),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\mu &= \operatorname{sign}(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi''), & \mathbf{k}_\pi &= \frac{-\psi'}{|\varphi|}, \\ H &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sign}(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') - \frac{\psi'}{|\varphi|}\right), & K &= \frac{-\varphi''}{\varphi}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal momento che $1 = \|\boldsymbol{\alpha}'\| = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$, tutte le formule, eccettuata l'ultima, seguono immediatamente dalle (12.6), (12.7) e (12.11). La formula per K discende dalla (12.12) e dal fatto che $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$. □

12.3 Il catenoide

Il **catenoide** è la superficie di rotazione generata da una catenaria ed ha parametrizzazione

$$\mathbf{catenoid}[c](u,v) = \left(c\cos u\cosh\left(\frac{v}{c}\right), c\,\sin u\cosh\left(\frac{v}{c}\right), v\right).$$

Le curvature principali del catenoide si calcolano facilmente. Si trova

$$\mathbf{k}_\mu = -\mathbf{k}_\pi = \frac{1}{c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Quindi $H = 0$ e

$$K = \frac{-1}{c^2\cosh\left(\frac{v}{c}\right)^4}.$$

Dunque il catenoide è una superficie minima. (Si veda a pagina 158 per la definizione di superficie minima.) Un piano è anch'esso una superficie minima, dal momento che il suo operatore di forma è identicamente nullo, e quindi entrambe le curvature principali sono uguali a zero. Vogliamo ora dimostrare che queste due sono di fatto le uniche superfici di rotazione che sono allo stesso tempo anche superfici minime.

Teorema 12.3.1. *Una superficie di rotazione $\mathcal{M}$ che è una superficie minima è contenuta o in un piano oppure in un catenoide.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ una parametrizzazione la cui traccia è contenuta in $\mathcal{M}$, e sia $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$ la curva profilo. Allora $\mathbf{x}$ è data dalla (12.1). Ci sono tre casi da considerare.

Caso 1. ψ' è identicamente uguale a 0. Allora ψ è costante, e quindi $\mathcal{M}$ è parte di un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Caso 2. ψ' non è mai uguale a 0. Allora per il teorema della funzione inversa, ψ ammette un'inversa ψ^{-1}. Definiamo

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\alpha}\big(\psi^{-1}(t)\big) = \big(h(t), t\big),$$

dove $h = \varphi \circ \psi^{-1}$, e una nuova parametrizzazione $\mathbf{y}$ ponendo

$$\mathbf{y}(u, v) = \big(h(v)\cos u, h(v)\sin u, v\big).$$

Dal momento che $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ è una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$, si ha che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ hanno la stessa traccia. Basta quindi dimostrare che la superficie di rotazione $\mathbf{y}$ è parte di un catenoide.

Le equazioni (12.11) divengono

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \mathbf{k}_\mu & = & \dfrac{g}{G} & = & \dfrac{h''}{(h'^2+1)^{3/2}}, \\ \mathbf{k}_\pi & = & \dfrac{e}{E} & = & -\dfrac{1}{h\sqrt{h'^2+1}}. \end{array} \right. \tag{12.15}$$

Dall'ipotesi che sia $H = 0$ e dalla (12.15) segue che h deve essere soluzione dell'equazione differenziale

$$h''h = 1 + h'^2. \tag{12.16}$$

Per risolvere la (12.16) innanzi tutto la riscriviamo nella forma

$$\frac{2h'h''}{1+h'^2} = \frac{2h'}{h}. \tag{12.17}$$

Integrando entrambi i membri della (12.17) si ottiene

$$\log(1 + h'^2) = \log h^2 - \log c^2.$$

Prendendo l'esponenziale di questa equazione si trova

$$1 + h'^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 \tag{12.18}$$

per qualche costante $c \neq 0$. A sua volta, questa equazione differenziale può essere messa nella forma

$$\frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2 - 1}} = \frac{1}{c}. \tag{12.19}$$

Entrambi i membri della (12.19) possono essere integrati e si trova

$$\cosh^{-1}\left(\frac{h}{c}\right) = \frac{v}{c} + b.$$

Pertanto la soluzione della (12.16) è

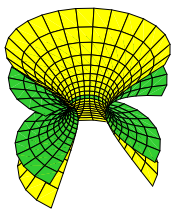
$$h(v) = c\cosh\Big(\frac{v}{c} + b\Big),$$

e quindi $\mathcal{M}$ è parte di un catenoide.

Caso 3. ψ' è nulla in alcuni punti, ma diversa da zero in altri. In realtà, questo caso non può verificarsi. Supponiamo, per esempio, che $\psi'(v_0) = 0$, ma $\psi'(v) > 0$ per $v < v_0$. Per il Caso 2 la curva profilo è una catenaria per $v < v_0$, la cui inclinazione è data da φ'/ψ'. Allora $\psi'(v_0) = 0$ implica che l'inclinazione diviene infinita in v_0. Ma questo è impossibile, per il fatto che la curva profilo è il grafico della funzione cosh □

12.4 L'iperboloide di rotazione

L'iperboloide di rotazione ad una falda (generato come superficie di rotazione) è un caso speciale dell'iperboloide ellittico generale ad una falda. La forma di una piccola porzione dell' iperboloide di rotazione attorno al parallelo minimo (la *circonferenza di gola*) è simile a quella del catenoide, porzioni grandi sono alquanto diverse, come sono pure diverse le rispettive applicazioni di Gauss. L'immagine dell'applicazione di Gauss dell'intero iperboloide di rotazione lascia fuori dei dischi attorno ai poli nord e sud, mentre l'immagine dell'applicazione di Gauss dell'intero catenoide omette solo i poli nord e sud.



Iperboloide di rotazione e catenoide

```
ParametricPlot3D[
{Append[hyperboloid[1,1,1][u,v],
FaceForm[Yellow]],
Append[catenoid[1][u,v],
FaceForm[LimeGreen]]}
//Evaluate,
{u,0,3Pi/2},{v,-2,2},
Lighting->False,
Boxed->False,Axes->None];
```

Se si calcola la curvatura gaussiana dell'iperboloide di rotazione $(a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, b\sinh v)$ si trova

$$K = \frac{-4b^2}{(-a^2 + b^2 + a^2\cosh(2v) + b^2\cosh(2v))^2}$$

12.5 Esercizi

1. Si dimostri che la superficie di rotazione generata dal grafico di una funzione $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, che può essere parametrizzata da

$$\mathbf{graph}[h](t) = \big(t, h(t)\big),$$

è data da

$$\mathbf{surfrev}[\mathbf{graph}[h]](u, v) = \big(v\cos u, v\sin u, h(v)\big).$$

Si trovino E, F, G, e, f, g, $\mathbf{k}_\mu$, $\mathbf{k}_\pi$ e K.

2. Si disegnino le superfici di rotazione corrispondenti alle seguenti curve: cicloide, cissoide, spirale logaritmica, lemniscata, cardioide, asteroide, deltoide, nefroide, triangolo.

3. Si dimostri il seguente reciproco del Teorema di Joachimsthal (Teorema 12.1.1).

Teorema 12.5.1. *Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva contenuta nell'intersezione di due superfici regolari $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo che $\boldsymbol{\alpha}$ sia una curva principale sia in $\mathcal{M}_1$ che in $\mathcal{M}_2$. Allora le normali a $\mathcal{M}_1$ e a $\mathcal{M}_2$ si incontrano formando un angolo costante lungo $\boldsymbol{\alpha}$.*

Capitolo 13

Superfici a Curvatura di Gauss Costante

La sfera, il piano, il cilindro e il cono sono gli esempi più noti di superfici a curvatura di Gauss costante, ma ce ne sono molti altri. Nei Paragrafi 13.2 e 13.3 studiamo le superfici di rotazione che hanno curvatura di Gauss costante. Per questo ci servono alcuni richiami sugli integrali ellittici di Legendre,[1] che faremo nel Paragrafo 13.1. Le superfici di rotazione a curvatura costante positiva vengono trattate nel Paragrafo 13.2. Oltre alla sfera, ce ne sono altri due tipi; uno ha una forma affusolata, simile a quella di un pallone da football americano, l'altro è a forma di botte. Il risultato corrispondente per le superfici di rotazione a curvatura costante negativa viene dimostrato nel Paragrafo 13.3. Ci sono ancora tre tipi. Il più famoso di questi è la pseudosfera, che è la superficie di rotazione generata da una trattrice. Ci sono molte superfici esotiche con curvatura di Gauss costante. Per esempio, nel Paragrafo 13.4 definiamo e studiamo la superficie di Dini e nel Paragrafo 13.5 la superficie di Kuen.

[1]

Adrien Marie Legendre (1752-1833). Matematico francese che portò numerosi contributi alla teoria dei numeri ed alla teoria delle funzioni ellittiche. Nel 1782 Legendre determinò la forza di attrazione per certi solidi di rotazione introducendo una serie infinita di polinomi che ora si chiamano polinomi di Legendre. Nella sua opera in tre volumi **Traité des fonctions elliptiques** (1825,1826,1830) Legendre fondò la teoria degli integrali ellittici.

13.1 L'integrale ellittico di seconda specie

Faremo una piccola digressione nel complicato argomento delle funzioni e degli integrali ellittici, di cui avremo bisogno per studiare le superfici di rotazione a curvatura gaussiana costante.

Definizione 13.1.1. L'integrale ellittico di seconda specie *è definito da*

$$E(\phi|m) = \int_0^{\phi} (1 - m\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

L'integrale ellittico completo di seconda specie *è*

$$E\left(\tfrac{\pi}{2}|m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Si osservi che per $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ si ha $E(\phi|1) = \sin\phi$; quindi $E(\phi|m)$ può essere considerata una generalizzazione della funzione seno. La corrispondente generalizzazione di sinh risulta essere $-i\,E(i\phi| - m)$ in quanto

$$-i\,E(i\phi| - m) = \int_0^{\phi} (1 - m\sinh^2\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

come si può verificare con un cambiamento di variabili nell'integrale e sfruttando l'identità $\sinh i\,x = i\sin x$. Ci serviremo di $\phi \longmapsto E(\phi|m)$ nel nostro studio delle superfici di rotazione a curvatura costante positiva e di $\phi \longmapsto -i\,E(i\phi| - m)$ in quello delle superfici di rotazione a curvatura costante negativa.

13.2 Superfici di rotazione a curvatura costante positiva

Sappiamo che la sfera $S^2(a)$ è una superficie di rotazione e che può essere parametrizzata da

$$\mathbf{sphere}[\boldsymbol{a}](u,v) = (a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v);$$

inoltre, la sfera ha curvatura di Gauss costante positiva $K = 1/a^2$. Non è difficile vedere che la sfera non è la sola superficie in $\mathbb{R}^3$ che ha curvatura costante. Per esempio, possiamo prendere una superficie a forma di coppa fatta di qualche materiale non elastico, come una mezza pallina da ping-pong. Allora questa coppa può essere deformata (esercitando una piccola pressione da parti opposte con pollice ed indice), senza stiramento alcuno, in molti modi diversi. Non essendovi stiramenti ed essendo la curvatura di Gauss un invariante isometrico (si veda il Capitolo 14), questa coppa

deformata ha ancora curvatura costante positiva. D'altra parte, è intuitivamente chiaro che un'intera pallina da ping-pong non può essere deformata allo stesso modo. Il Teorema di Liebmann afferma che l'intera sfera $S^2(a)$ è di fatto rigida.

È comunque sorprendente che esistano altre superfici di rotazione in $\mathbb{R}^3$ che hanno curvatura costante positiva. Per trovarle procediamo un po' al contrario: supponiamo che sia data una superficie di rotazione $\mathcal{M}$ con curvatura costante positiva, e poi cerchiamo le condizioni alle quali una parametrizzazione $\mathbf{x}$ di $\mathcal{M}$ deve soddisfare.

Troviamo innanzi tutto le curve profilo di una superficie di rotazione con curvatura di Gauss costante positiva.

Teorema 13.2.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie di rotazione la cui curvatura gaussiana è una costante positiva $1/a^2$, dove $a > 0$. Allora $\mathcal{M}$ è parte di una superficie parametrizzata da una applicazione $\mathbf{x}$ della forma*

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big),$$

dove

$$\text{(13.1)} \qquad \begin{cases} \varphi(v) &= b\cos\Big(\dfrac{v}{a}\Big), \\ \psi(v) &= \displaystyle\int_0^{\,v} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\left(\sin\Big(\frac{t}{a}\Big)\right)^2}\, dt = a\, E\left(\frac{v}{a}\,\middle|\,\frac{b^2}{a^2}\right), \end{cases}$$

per qualche costante $b > 0$. Il parametro v può variare in uno dei seguenti intervalli:

$$\begin{aligned} &\textit{se} \quad b = a, \quad \textit{allora} \quad -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}; \\ &\textit{se} \quad b < a, \quad \textit{allora} \quad -\infty \le v \le \infty; \\ &\textit{se} \quad b > a, \quad \textit{allora} \quad -a\arcsin\Big(\frac{a}{b}\Big) \le v \le a\arcsin\Big(\frac{a}{b}\Big). \end{aligned}$$

La parametrizzazione $\mathbf{x}$ è regolare in (u, v) se e solo se $\varphi(v) \neq 0$, cioè per $v \neq (n + 1/2)\pi\, a$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $\mathbf{x}$ sia data dalla (12.1), a pagina 193, e che la curva profilo $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$ abbia velocità unitaria; allora $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$. Se $\mathcal{M}$ ha curvatura costante positiva $1/a^2$, allora il Corollario 12.2.3, a pagina 200, implica che φ soddisfa all'equazione differenziale $\varphi'' + \varphi/a^2 = 0$, la cui soluzione generale è $\varphi(v) = b\cos(v/a + c)$. Ancora senza che venga meno la generalità, possiamo supporre che sia $c = 0$; questo equivale a traslare la curva profilo lungo l'asse di rotazione in modo che tale curva sia più distante dall'asse di rotazione quando

$v = 0$. Possiamo anche supporre, prendendo, se necessario, l'immagine speculare della superficie, che sia $b > 0$. In tal modo otteniamo la prima equazione della (13.1).

Possiamo supporre che $\psi'(v) \geq 0$ per ogni v; diversamente sostituiamo v con $-v$. Allora $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ implica che $\psi'(v) = \sqrt{1 - (b^2/a^2)\,(\sin(v/a))^2}$, e quando integriamo questa equazione da 0 a v otteniamo la seconda equazione della (13.1).

Affinché $\psi(v)$ sia ben definita, è necessario che $1 - (b^2/a^2)(\sin(v/a))^2$ sia positivo. Per $b < a$ questa quantità è sempre positiva, e quindi $\psi(v)$ è definita per ogni v. Quando $b = a$ la curva profilo è parte di una circonferenza; in questo caso il fatto che $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ assicura che la curva profilo non si sovrappone a se stessa ed è quindi una semicirconferenza. Se $b > a$ allora $1 - (b^2/a^2)\big(\sin(v/a)\big)^2 \geq 0$ se e solo se $-a \arcsin(a/b) \leq v \leq a \arcsin(a/b)$. □

Curve profilo per superfici a curvatura costante positiva

Teorema 13.2.2. *Sia $\mathcal{S}(a,b)$ la superficie di rotazione la cui curva profilo è $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$ con φ, ψ date dalla* (13.1)*.*

(i) *$\mathcal{S}(a,a)$ è un'ordinaria sfera di raggio a.*

(ii) (*Tipo a forma di fuso*) *Se $0 < b < a$, allora $\mathcal{S}(a,b)$ è una superficie di rotazione che rassomiglia a una collana infinita di pietre a forma di fuso o di pallone da football americano, con i vertici sull'asse di rotazione.*

(iii) (*Tipo a botte*) *Se $0 < a < b$, allora $\mathcal{S}(a,b)$ è a forma di botte e non incontra l'asse di rotazione.*

Dimostrazione. Quando $b = a$, la curva profilo è

$$v \longmapsto \left(a\cos\left(\frac{v}{a}\right), a\sin\left(\frac{v}{a}\right)\right)$$

con $-\pi/2 \leq v/a \leq \pi/2$. Quindi nel caso (i) la curva profilo è una semicirconferenza di lunghezza πa, che quando ruota attorno all'asse z genera una sfera $S^2(a)$ di raggio a.

Nel caso (ii) l'espressione sotto la radice quadrata nella definizione di ψ nella (13.1) è sempre positiva, e quindi φ è definita per $-\pi/2 \leq v/a \leq \pi/2$, proprio come

nel caso (i). La curva profilo è

$$v \longmapsto \left(a\cos\Big(\frac{v}{a}\Big), \int_0^{\,v} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\left(\sin\Big(\frac{t}{a}\Big)\right)^2}\, dt \right) = \left(a\cos\Big(\frac{v}{a}\Big), aE\left(\frac{v}{a}\middle|\frac{b^2}{a^2}\right)\right).$$

Quindi questa curva descrive un arco scemo[2] rispetto alla semicirconferenza ed incontra l'asse z quando ψ vale

$$\pm\int_0^{\frac{\pi a}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\left(\sin\Big(\frac{t}{a}\Big)\right)^2}\, dt = \pm a\, E\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{b^2}{a^2}\right);$$

la sua lunghezza tra questi punti è uguale a πa, che è la stessa lunghezza della semicirconferenza nel caso (i). La differenza principale tra il caso (ii) e il caso (i) è che se si permette alla curva profilo di attraversare l'asse z, si ottiene una curva che procede a zigzag creando continue anse lungo l'asse z, invece di formare una circonferenza.

Infine, quando $b > a$ la curva profilo è definita solo sull'intervallo

$$-a\arcsin\Big(\frac{a}{b}\Big) \le t \le a\arcsin\Big(\frac{a}{b}\Big),$$

in quanto al di fuori di questo intervallo l'espressione sotto la radice quadrata diventa negativa. La superficie di rotazione che ne scaturisce rassomiglia ad una botte quando b è un po' più grande di a. □

(a) $b < a$ (b) $b > a$

Superfici $\mathcal{S}(a,b)$ a curvatura costante $1/a^2$

13.3 Superfici di rotazione a curvatura costante negativa

La ricerca delle superfici di rotazione con curvatura costante negativa procede lungo le stesse linee di quelle del Paragrafo 13.2. Tuttavia, le superfici che si trovano sono alquanto diverse.

[2]Nelle costruzioni un arco è detto scemo quando l'intradosso è un arco di circonferenza minore di una semicirconferenza

Teorema 13.3.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie di rotazione la cui curvatura di Gauss è una costante negativa $-1/a^2$. Allora $\mathcal{M}$ è parte di una superficie parametrizzata da una applicazione* $\mathbf{x}$ *tale che*

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big),$$

dove la curva profilo $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \psi)$ è una dei seguenti tipi:

(i) (*Pseudosfera*)

$$\boldsymbol{\alpha}(v) = \begin{cases} \left(a\,e^{-v/a}, \displaystyle\int_0^v \sqrt{1-e^{-2t/a}}\,dt\right) & \text{per } 0 \le v < \infty, \\ \left(a\,e^{v/a}, \displaystyle\int_0^v \sqrt{1-e^{2t/a}}\,dt\right) & \text{per } -\infty < v \le 0. \end{cases} \tag{13.2}$$

(ii) (*Tipo iperboloide*)

$$\begin{cases} \varphi(v) &= b\cosh\Big(\dfrac{v}{a}\Big), \\ \psi(v) &= \displaystyle\int_0^{\,v} \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\left(\sinh\Big(\frac{t}{a}\Big)\right)^2}\,dt = -i\,a\,E\left(\frac{i\,v}{a}\,\middle|\,\frac{-b^2}{a^2}\right), \end{cases} \tag{13.3}$$

per qualche costante $b > 0$, e v è limitata da

$$-a\sinh^{-1}\Big(\frac{a}{b}\Big) \le v \le a\sinh^{-1}\Big(\frac{a}{b}\Big).$$

(iii) (*Tipo conico*)

$$\begin{cases} \varphi(v) &= b\sinh\Big(\dfrac{v}{a}\Big), \\ \psi(v) &= \displaystyle\int_0^{\,v} \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\left(\cosh\Big(\frac{t}{a}\Big)\right)^2}\,dt \\ &\qquad = -i\sqrt{a^2-b^2}\,E\left(\dfrac{i\,v}{a}\,\middle|\,\dfrac{-b^2}{a^2-b^2}\right), \end{cases} \tag{13.4}$$

per qualche costante b con $0 < b \le a$, e v è limitata da

$$-a\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) \le v \le a\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right).$$

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, si può supporre $a > 0$. La soluzione generale dell'equazione $\varphi'' - \varphi/a^2 = 0$ è

$$\varphi(v) = A\,e^{v/a} + B\,e^{-v/a}. \tag{13.5}$$

Caso 1. Supponiamo innanzi tutto che A nella (13.5) sia uguale a zero. Possiamo anche supporre che sia $B > 0$ scambiando v con $-v$ se necessario. Inoltre, utilizzando il cambiamento di variabile $v \longmapsto v + a \log B - a \log a$, possiamo prendere $B = a$; allora $\varphi(v) = ae^{-v/a}$. Essendo

$$0 \leq \psi'(v)^2 = 1 - \varphi'(v)^2 = 1 - e^{-2v/a},$$

deve aversi $v \geq 0$. In tal modo otteniamo la prima delle possibilità nella (13.2). In modo analogo, se $B = 0$ si ha la seconda possibilità.

Ora supponiamo che A e B siano entrambi diversi da zero nella (13.5). Utilizzando, se necessario, il cambiamento di variabili

$$v \longmapsto v + \frac{a}{2} \log \left| \frac{B}{A} \right|$$

possiamo supporre $|A| = |B|$.

Caso 2. Quando $A = B$, passando, se necessario, all'immagine speculare della curva profilo, possiamo supporre $A > 0$. Allora

$$\varphi(v) = A \left(e^{v/a} + e^{-v/a} \right) = 2A \cosh\left(\frac{v}{a}\right).$$

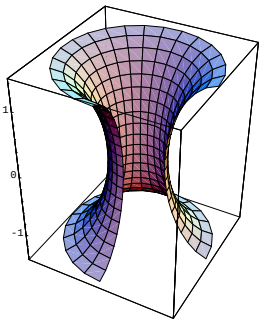
Se si pone $b = A/2$ si ottiene (13.3).

Caso 3. Se $A = -B$, possiamo supporre $A > 0$. (Se necessario, possiamo cambiare v con $-v$.) Quindi la (13.5) diviene

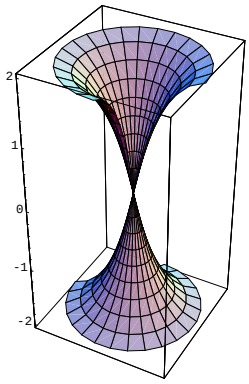
$$\varphi(v) = A \left(e^{v/a} - e^{-v/a} \right) = 2A \sinh\left(\frac{v}{a}\right).$$

Ora poniamo $b = 2A$ e otteniamo la (13.4). □

Curve profilo per superfici a curvatura costante negativa



Superficie di tipo iperbolico
a curvatura costante negativa



Superficie di tipo conico
a curvatura costante negativa

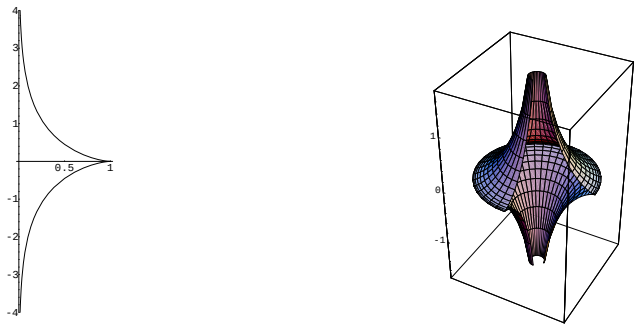
Corollario 13.3.1. *La superficie di rotazione la cui curva profilo è data dalla* (13.2) *è la* **pseudosfera**, *la superficie di rotazione di una trattrice.*

Dimostrazione. Questo fatto è una immediata conseguenza della parte (i) del Teorema 13.3.1, che conduce a una parametrizzazione della trattrice. □

Possiamo quindi definire la pseudosfera con

$$\textbf{pseudosphere}[\boldsymbol{a}](u,v) = a\big(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v + \log(\tan(v/2))\big), \tag{13.6}$$

Non è difficile verificare che pseudosphere$[\boldsymbol{a}]$ ha curvatura costante $-1/a^2$.



Una pseudosfera e una sua curva profilo

13.4 Superficie di Dini

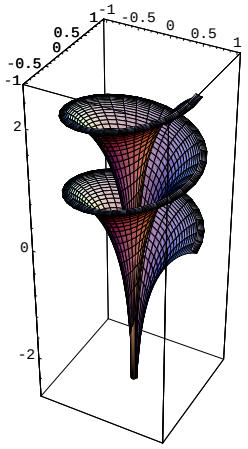
La pseudosfera privata di un semimeridiano e poi avvitata come nella figura che segue si chiama **superficie di Dini**[3]; la parametrizzazione esplicita di questa superficie, ottenuta utilizzando il comando **genhel** su una trattrice, è:

$$\mathbf{dini}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](u,v) = \big(a\cos u\sin v, a\sin u\sin v, a\cos u + \log\big(\tan(v/2)\big) + b\,u\big),$$

Calcoliamo la curvatura di Gauss della superficie di Dini. Si ha

$$K = -\frac{1}{a^2+b^2}$$

Quindi, a differenza di quanto accade con una sfera ritorta, la superficie di Dini ha curvatura di Gauss costante. Nella figura seguente mostriamo una rappresentazione grafica della superficie di Dini che pone in evidenza come questa superficie si ottenga tramite una particolare deformazione della pseudosfera:




```
ParametricPlot3D[
dini[1,0.2][u,v]
//Evaluate,
{u,0,4Pi},{v,0.001,2},
PlotPoints->{60,40}];
```

Superficie di Dini

Il seguente teorema si trova nel volume 1, pagina 353, delle **Lezioni di Geometria Differenziale** di Luigi Bianchi[4] ([Bian]).

[3]

Ulisse Dini (1845-1918). Matematico pisano che svolse principalmente a Pisa la sua attività. Portò contributi fondamentali alla teoria delle superfici e all'analisi reale. Una sua statua si trova non lontano dalla torre pendente.

[4]

Luigi Bianchi (1856-1928). Matematico italiano che svolse principalmente a Pisa la sua attività. Nonostante sia ricordato soprattutto per le "identità di Bianchi", egli portò contributi fondamentali anche alla teoria delle superfici.

Teorema 13.4.1. *Sia $\mathcal{M}$ un elicoide generalizzato con la proprietà che i suoi meridiani sono linee di curvatura. Allora $\mathcal{M}$ è parte di una superficie di Dini.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che la curva generatrice dell'elicoide generalizzato sia della forma

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(t, \psi(t)\big),$$

in modo che

$$\mathbf{genhel}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\alpha}](u, v) = \big(v\cos u, v\sin u, c\,u + \psi(v)\big).$$

Si verifica facilmente, che la formula per il campo normale unitario $\mathbf{U}$ di $\mathbf{genhel}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\alpha}]$ è

$$\mathbf{U}(u, v) = \frac{(-c\,\sin u + v\,\psi'(v)\cos u, c\cos u + v\,\psi'(v)\sin u, -v)}{\sqrt{c^2 + v^2 + v^2\psi'(v)^2}}.$$

Il meridiano

$$v \longmapsto \mathbf{genhel}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\alpha}](u, v)$$

dell'elicoide generalizzato è la sua intersezione con un piano $\mathbf{\Pi}$ che contiene il suo asse. Il campo normale unitario di tale piano è

$$\mathbf{V}(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0).$$

Supponiamo ora che $\boldsymbol{\alpha}$ sia una linea di curvatura dell'elicoide generalizzato. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$ è automaticamente una linea di curvatura sul piano $\mathbf{\Pi}$, il Teorema 12.5.1, a pagina 204, (reciproco del Teorema di Joachimsthal, Teorema 12.1.1), implica che i campi di vettori $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ formino un angolo costante σ lungo $\boldsymbol{\alpha}$. Pertanto

$$\cos\sigma = \mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2 + v^2\psi'(v)^2}}. \tag{13.7}$$

Allora la (13.7) implica che ψ soddisfa all'equazione differenziale

$$v^2\big(1 + \psi'(v)^2\big) = c^2\tan^2\sigma. \tag{13.8}$$

Ma la (13.8) implica che $\boldsymbol{\alpha}$ sia una trattrice, per il fatto che verifica l'equazione differenziale della trattrice,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Pertanto l'elicoide generalizzato è una superficie di Dini. □

13.5 Superficie di Kuen

Una delle più complicate superfici con curvatura costante negativa è la **superficie di Kuen**[5] ([Kuen]). Essa può essere parametrizzata da

$$\begin{aligned}\mathbf{kuen}[\boldsymbol{a}](u,v) \quad = \quad & \left(\frac{2a(\cos u + u\sin u)\sin v}{1+u^2\sin^2 v}, \right. \\ & \frac{2a(\sin u - u\cos u)\sin v}{1+u^2\sin^2 v}, \\ & \left. a\left(\log(\tan(v/2)) + \frac{2\cos v}{1+u^2\sin^2 v}\right)\right)\end{aligned}$$

Di questa superficie è stato realizzato uno straordinario modello in gesso; la tavola 86 di [Fischer] è una foto di questo modello in gesso. Reckziegel ha dato una eccellente descrizione della superficie di Kuen. (Si vedano le pagine 30–41 dei Commentari a [Fischer].)

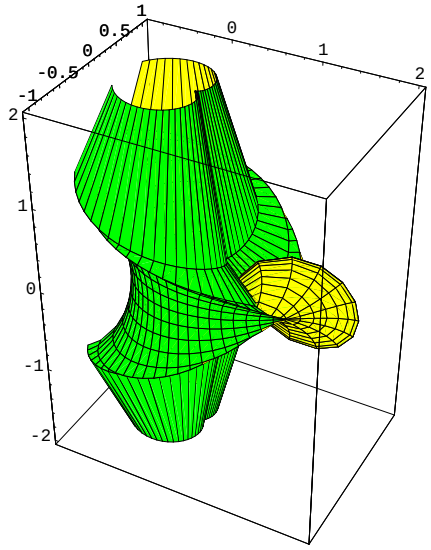
Se si calcolano i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale si trova che $F = f = 0$ e quindi le curve u- e v-parametriche della parametrizzazione **kuen** sono principali; queste sono le curve visibili nella figura sotto. Inoltre, la curvatura gaussiana è $K = -a^{-2}$. Le curvature principali sono:

$$k_\mu = \frac{4u\sin v}{a(2-u^2+u^2\cos(2v))}$$

$$k_\pi = \frac{-((2-u+u\cos(2v))\csc v)}{4au}$$

Ed ecco una immagine della superficie di Kuen realizzata con *Mathematica* :

[5] Th. Kuen si servì della parametrizzazione di Bianchi per realizzare un modello in gesso della superficie (si veda [Kuen]). Sembra non esistano informazioni biografiche su Kuen.



Superficie di Kuen

13.6 Esercizi

1. **Superfici di rotazione piatte.** Si dimostri che se una superficie di rotazione ha curvatura di Gauss uguale a zero, allora essa è o parte di un piano, o parte di un cono oppure parte di un cilindro.

2. Si trovino le curvature principali e la mappa di Gauss di una pseudosfera.

Capitolo 14

Geometria Intrinseca delle Superfici

La seconda forma fondamentale di una superficie regolare $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ rende conto di come essa è situata in $\mathbb{R}^3$. La prima forma fondamentale di $\mathcal{M}$, d'altra parte, permette di misurare distanze su $\mathcal{M}$, operazione, questa, che è intrinseca a $\mathcal{M}$. In altri termini, le distanze di $\mathcal{M}$ non dipendono dalla seconda forma fondamentale.

Un fatto particolarmente importante è che la curvatura di Gauss K di una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ è anch'essa intrinseca a $\mathcal{M}$, nonostante K sia il prodotto delle due curvature principali, nessuna delle quali ha carattere intrinseco. Per dimostrare questo fatto, nel Paragrafo 14.1 ricaveremo la formula di Brioschi. È questa una formula che in modo esplicito, seppur complicato, esprime K in funzione di E, F e G e delle loro derivate parziali del primo e del secondo ordine. La formula di Brioschi verrà utilizzata nel Paragrafo 14.2 per dimostrare il Theorema Egregium di Gauss, che afferma che un'isometria della superficie conserva la curvatura di Gauss.

I simboli di Christoffel di una superficie verranno definiti e studiati nel Paragrafo 14.3. Si può dimostrare che i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di una superficie regolare $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$ non sono tra loro indipendenti, ma che sono invece legati dalle equazioni di Peterson-Mainardi-Codazzi.

Nel Paragrafo 14.4 verrà definita e studiata la curvatura geodetica di una curva su di una superficie. La curvatura geodetica $\boldsymbol{\kappa}_g$ è la generalizzazione alle superfici della curvatura $\boldsymbol{\kappa 2}$ che abbiamo utilizzato nei Capitoli 1 e 2 per lo studio delle curve piane.

14.1 Formule intrinseche per la curvatura di Gauss

Incominciamo questo paragrafo ricavando una formula per la curvatura di Gauss di una superficie parametrizzata $\mathbf{x}$ in funzione dei prodotti scalari delle derivate parziali del primo e secondo ordine della parametrizzazione $\mathbf{x}$.

Teorema 14.1.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata. La curvatura di Gauss di $\mathbf{x}$ è data da*

$$K = \frac{1}{(E\,G - F^2)^2} \left\{ \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{v} \\ \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v} \\ \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{v} \\ \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v} \\ \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v} \end{pmatrix} \right\}. \tag{14.1}$$

Dimostrazione. Dal Lemma 9.5.2 e dal Teorema 9.5.2 si ottiene

$$K = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} = \frac{(\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)^2}{(E\,G - F^2)^2}. \tag{14.2}$$

Se si pone $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, risulta

$$(\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v) \tag{14.3}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_{1uu} & x_{2uu} & x_{3uu} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_{1vv} & x_{2vv} & x_{3vv} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} x_{1uu} & x_{2uu} & x_{3uu} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1vv} & x_{1u} & x_{1v} \\ x_{2vv} & x_{2u} & x_{2v} \\ x_{3vv} & x_{3u} & x_{3v} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{v} \\ \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v} \\ \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{u} & \mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v} \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$(\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)^2 = \det\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v \end{pmatrix}. \tag{14.4}$$

Ora la (14.1) discende dalle (14.2), (14.3) e (14.4). □

Ad eccezione di $\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv}$ e di $\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv}$, noi sappiamo già come esprimere tutti i prodotti scalari che appaiono nella (14.1) tramite E, F, G, e le loro derivate. Vediamo ora in quale forma è possibile scrivere la differenza di questi due prodotti scalari per mezzo delle derivate del secondo ordine di E, F e G.

Lemma 14.1.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata. Allora*

$$\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}. \tag{14.5}$$

Dimostrazione. Con un semplice calcolo si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} &= (\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv})_u - \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vvu} \\ &\quad -(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv})_v + \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uvv}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Ma essendo $\mathbf{x}_{vvu} = \mathbf{x}_{uvv}$, l'identità (14.6) si riduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} &= \big(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv}\big)_u - (\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv})_v \\ &= ((\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_v - \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v)_u - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)_{vv} \\ &= (\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_{vu} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v)_{uu} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)_{vv} \\ &= -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} \end{aligned}$$

□

Siamo già in grado di ottenere la formula di Brioschi.[1] (Vedi [Brio].) È questa una formula notevolmente più complicata della formula (14.2), ma presenta il vantaggio di permettere di esprimere la curvatura di Gauss di una superficie parametrizzata $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ esclusivamente in funzione della sua prima forma fondamentale.

[1]

Francesco Brioschi. (1824-1897). Matematico italiano. Professore prima a Pavia, poi a Milano. Brioschi fu uno dei fondatori della matematica moderna in Italia. Oltre agli studi in geometria differenziale, Brioschi utilizzò le funzioni ellittiche modulari per risolvere equazioni di quinto e di sesto grado.

Teorema 14.1.2. (Formula di Brioschi) *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una superficie parametrizzata. Allora la curvatura di Gauss di* $\mathbf{x}$ *è data da*

$$
\begin{aligned}
(14.7) \qquad K \;=\; & \frac{1}{(E\,G - F^2)^2} \left\{ \right. \\
& \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} \\
& - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \left. \right\}.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Ci serviamo della (14.5) per riscrivere la (14.1) nella forma

$$
\begin{aligned}
(14.8) \qquad K \;=\; & \frac{1}{(E\,G - F^2)^2} \left\{ \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} \right. \\
& \left. - \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Esprimiamo ora i determinanti del terzo ordine nella (14.8) mediante i suoi minori d'ordine 2. In questo sviluppo ciascuna delle espressioni $\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv}$ e $\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv}$ compare moltiplicata per lo stesso fattore $E\,G - F^2$. Pertanto è possibile manipolare i determinanti nella (14.8) utilizzando la (14.5), riducendo la (14.8) alla (14.7). □

La formula di Brioschi nella sua forma più generale è eccessivamente complicata per poter essere di utilità quando i calcoli si devono effettuare manualmente. Tuttavia esistono molti casi nei quali tale formula si semplifica notevolmente.

Corollario 14.1.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una superficie parametrizzata con* $F = 0$. *Allora la curvatura di Gauss di* $\mathbf{x}$ *è data da*

$$K = \frac{-1}{\sqrt{E\,G}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\} \tag{14.9}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{E\,G}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\right)\right\}.$$

Dimostrazione. Quando $F = 0$, l'equazione (14.7) si riduce a

$$K = \frac{1}{(E\,G)^2}\left\{\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & -\frac{1}{2}E_v \\ -\frac{1}{2}G_u & E & 0 \\ \frac{1}{2}G_v & 0 & G\end{pmatrix}\right. \tag{14.10}$$

$$\left. -\det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & 0 \\ \frac{1}{2}G_u & 0 & G\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{(E\,G)^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}\right)E\,G\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}E_uG_uG+\frac{1}{4}E_vG_vE+\frac{1}{4}E_v^2G+\frac{1}{4}G_u^2E\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{E_{vv}}{E\,G}+\frac{1}{4}\frac{E_v^2}{E^2G}+\frac{1}{4}\frac{E_vG_v}{E\,G^2}-\frac{1}{2}\frac{G_{uu}}{E\,G}+\frac{1}{4}\frac{G_u^2}{E\,G^2}+\frac{1}{4}\frac{E_uG_u}{E^2G}.$$

D'altra parte,

$$\frac{1}{\sqrt{E\,G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{E\,G}}\left\{-\frac{G_v}{2G^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2}\right\} \tag{14.11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E\,G}}\left\{-\frac{G_vE_v}{4G^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}}+\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(E^{-\frac{1}{2}}E_v\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E\,G}}\left\{-\frac{G_vE_v}{4G^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}}+\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(-\frac{E_v^2}{2E^{\frac{3}{2}}}+\frac{E_{vv}}{\sqrt{E}}\right)\right\}$$

$$= -\frac{G_vE_v}{4G^2E}-\frac{E_v^2}{4E^2G}+\frac{E_{vv}}{2E\,G}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{\sqrt{E\,G}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = -\frac{E_u G_u}{4E^2 G} - \frac{G_u^2}{4E\,G^2} + \frac{G_{uu}}{2E\,G}. \tag{14.12}$$

Allora la (14.9) risulta dalle (14.10)–(14.12). □

14.2 Il Theorema Egregium di Gauss

Possiamo ora dare una dimostrazione di uno dei teoremi più importanti del secolo XIX. I matematici della fine del secolo XVIII, come ad esempio Eulero e Monge, avevano già utilizzato la curvatura di Gauss, considerandola però soltanto come il prodotto delle curvature principali della superficie. Ma poiché ogni curvatura principale di una superficie $\mathcal{M}$ dipende dal modo particolare in cui la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$, non era facile intuire che il prodotto delle curvature principali è invece intrinseco a $\mathcal{M}$. La scoperta di Gauss [Gauss2], pubblicata nel 1827, del fatto che il prodotto delle curvature principali dipende solamente della geometria intrinseca della superficie, rivoluzionò la geometria differenziale.

Teorema 14.2.1. (Theorema Egregium[2] di Gauss) *Sia $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ una isometria locale tra due superfici regolari $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Denotiamo le curvature di Gauss di $\mathcal{M}_1$ e di $\mathcal{M}_2$ con K_1 e K_2 rispettivamente. Allora*

$$K_1 = K_2 \circ \Phi.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione locale regolare di $\mathcal{M}_1$, e poniamo $\mathbf{y} = \Phi \circ \mathbf{x}$. Allora la restrizione $\Phi|\mathbf{x}(\mathcal{U})\colon \mathbf{x}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbf{y}(\mathcal{U})$ è un'isometria locale. Dal Lemma 8.2.3, a pagina 135, si deduce che deve aversi

$$E_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{y}}, \qquad F_{\mathbf{x}} = F_{\mathbf{y}}, \qquad G_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{y}}.$$

Ma allora $(E_{\mathbf{x}})_u = (E_{\mathbf{y}})_u$, $(F_{\mathbf{x}})_u = (F_{\mathbf{y}})_u$, $(G_{\mathbf{x}})_u = (G_{\mathbf{y}})_u$, e analogamente per le rimanenti derivate parziali. In particolare, il Teorema 14.1.2 implica che $K_{\mathbf{x}} = K_{\mathbf{y}}$, dove $K_{\mathbf{x}}$ e $K_{\mathbf{y}}$ denotano le curvature di Gauss di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Pertanto

$$K_2 \circ \Phi = K_{\mathbf{y}} \circ \mathbf{y}^{-1} \circ \Phi = K_{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} = K_1$$

□

[2] *Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Esempi che illustrano il Theorema Egregium di Gauss

(i) La superficie parametrizzata $\mathbf{x}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(\cos u, \sin u, v\big)$$

può essere considerata come una applicazione tra due superfici, il piano e il cilindro. È facile verificare che $E = G = 1$, $F = 0$ per entrambe le superfici, il piano e $\mathbf{x}$; pertanto $\mathbf{x}$ è un'isometria locale. Tuttavia, $\mathbf{x}$ non conserva né la seconda forma fondamentale né la curvatura media.

(ii) L'elicoide è localmente isometrico al catenoide.

(iii) Una sfera ed un piano non sono localmente isometrici, dal momento che la curvatura di Gauss di una sfera è non nulla, mentre la curvatura di Gauss di un piano è uguale a zero. Questa è la ragione per la quale ogni carta geografica che rappresenti una porzione della superficie terrestre deve necessariamente alterare le distanze.

(iv) Il Teorema 14.2.1 afferma che un'isometria locale conserva la curvatura di Gauss. Esistono, tuttavia, diffeomorfismi locali che conservano la curvatura ma che non sono isometrie locali. Descriviamo un esempio classico. Consideriamo l'applicazione Φ della superficie a imbuto (a pagina 179)

$$(u,v) \longmapsto (a\,v\cos u, a\,v\sin u, b\log v)$$

nell'elicoide (pagina 141)

$$(u,v) \longmapsto (a\,v\cos u, a\,v\sin u, b\,u).$$

Questa applicazione è data da

$$\Phi(a\,v\cos u, a\,v\,\sin u, b\log v) = (a\,v\cos u, a\,v\,\sin u, b\,u).$$

Quando si calcolano le curvature di queste due superfici si trova che esse sono uguali:

$$\frac{-b^2}{(b^2+a^2v^2)^2}.$$

Pertanto Φ è un diffeomorfismo che conserva la curvatura. Per la superficie a imbuto si trova

$$ds^2 = a^2v^2du^2 + \left(a^2 + \frac{b^2}{v^2}\right)dv^2,$$

mentre per l'elicoide

$$ds^2 = (b^2 + a^2v^2)du^2 + a^2dv^2.$$

Di fatto, non esiste alcuna isometria locale tra queste due superfici: se si fa in modo che i parametri v si corrispondano affinché K sia la stessa per entrambe, si ha che E non si conserva. Pertanto il reciproco del Teorema 14.2.1 è falso.

(v) Come già abbiamo osservato a pagina 166, ogni rotazione attorno all'asse z conserva la curvatura di Gauss della sella di scimmia. È possibile dimostrare che soltanto le rotazioni di angolo uguale ad un multiplo intero di $2\pi/3$ sono isometrie (si veda l'esercizio 5). Questo esempio mostra di nuovo che il reciproco del Teorema 14.2.1 è falso.

14.3 I simboli di Christoffel

Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare. In accordo con le definizioni (9.10), a pagina 152, di e, f e g, le componenti normali dei vettori $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ e $\mathbf{x}_{vv}$ sono date da

$$\mathbf{x}_{uu}^{\perp} = e\,\mathbf{U}, \qquad \mathbf{x}_{uv}^{\perp} = f\,\mathbf{U}, \qquad \mathbf{x}_{vv}^{\perp} = g\,\mathbf{U},$$

dove

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

è il campo normale unitario di $\mathbf{x}$. Per molte applicazioni avremo bisogno anche delle componenti tangenziali di $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ e $\mathbf{x}_{vv}$. Queste parti tangenziali possono essere espresse in funzione soltanto di E, F e G. Tali espressioni sono però un po' complicate. Definiamo innanzi tutto otto (in realtà sei) funzioni di E, F e G, denominate simboli di Christoffel[3] apparsi per la prima volta in [Chris]. I simboli di Christoffel verranno utilizzati anche quando studieremo le geodetiche nel Capitolo 17.

Definizione 14.3.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una superficie parametrizzata regolare. I* **simboli di Christoffel** Γ^i_{jk} $(i, j, k = 1, 2)$ *corrispondenti a* $\mathbf{x}$ *sono definiti dalle*

[3]

Elwin Bruno Christoffel (1829-1900). Matematico tedesco, professore a Strasburgo. Egli introdusse i simboli con tre indici che ora chiamiamo simboli di Christoffel per utilizzarli nella teoria degli invarianti.

formule

$$
\text{(14.13)} \qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{G\,E_u - 2F\,F_u + F\,E_v}{2(E\,G - F^2)}, & \Gamma^2_{11} = \dfrac{2E\,F_u - E\,E_v - F\,E_u}{2(E\,G - F^2)}, \\ \Gamma^1_{12} = \dfrac{G\,E_v - F\,G_u}{2(E\,G - F^2)}, & \Gamma^2_{12} = \dfrac{E\,G_u - F\,E_v}{2(E\,G - F^2)}, \\ \Gamma^1_{22} = \dfrac{2G\,F_v - G\,G_u - F\,G_v}{2(E\,G - F^2)}, & \Gamma^2_{22} = \dfrac{E\,G_v - 2F\,F_v + F\,G_u}{2(E\,G - F^2)}, \end{cases}
$$

e $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$.

Le espressioni che compaiono nella (14.13) si semplificano notevolmente in un caso importante.

Lemma 14.3.1. *Le formule dei simboli di Christoffel di una superficie parametrizzata regolare* $\mathbf{x}$ *per la quale* $F = 0$ *si riducono alle*

$$
\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma^2_{11} &= \frac{-E_v}{2G}, \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{G_u}{2G}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{-G_u}{2E}, & \Gamma^2_{22} &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned}
$$

Nel Teorema 9.3.1, a pagina 152, abbiamo calcolato le componenti normali dei vettori $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$ in funzione di E, F, G, e, f, g. Dimostriamo ora che le sue componenti tangenziali sono esprimibili mediante i simboli di Christoffel. Alla fine risulterà che le componenti tangenziali di $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$ possono essere date in funzione di E, F, G e delle loro derivate parziali del primo e del secondo ordine.

Teorema 14.3.1. (Equazioni di Gauss) *Sia* $\mathbf{x}$ *una parametrizzazione locale regolare di una superficie regolare in* $\mathbb{R}^3$ *con campo normale unitario* $\mathbf{U}$. *Allora*

$$
\text{(14.14)} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\,\mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + f\,\mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + g\,\mathbf{U}. \end{cases}
$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{x}$ è regolare, $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ e $\mathbf{U}$ formano una base di $\mathbb{R}^3_{\mathbf{p}}$ in ogni punto $\mathbf{p}$ della traccia di $\mathbf{x}$. Possiamo pertanto scrivere

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_{uu} &=& \alpha_1\mathbf{x}_u + \alpha_2\mathbf{x}_v + \alpha_3\mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{uv} &=& \beta_1\mathbf{x}_u + \beta_2\mathbf{x}_v + \beta_3\mathbf{U}, \\ \mathbf{x}_{vv} &=& \gamma_1\mathbf{x}_u + \gamma_2\mathbf{x}_v + \gamma_3\mathbf{U}. \end{array}\right. \tag{14.15}$$

Dobbiamo calcolare i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ della (14.15). Osserviamo innanzi tutto che

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = 1, \qquad \mathbf{U}\cdot\mathbf{x}_u = \mathbf{U}\cdot\mathbf{x}_v = 0. \tag{14.16}$$

Risulta chiaro dalle definizioni (9.10) di e, f, g, e dalla (14.16) che

$$e = \alpha_3, \qquad f = \beta_3, \qquad g = \gamma_3. \tag{14.17}$$

Per determinare i rimanenti coefficienti che compaiono nella (14.15) moltiplichiamo scalarmente i vettori dati dalle (14.15) con $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. Si ottiene

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 E + \alpha_2 F &=& \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\|\mathbf{x}_u\|^2 = \dfrac{E_u}{2}, \\ \alpha_1 F + \alpha_2 G &=& \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v = \dfrac{\partial}{\partial u}(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v) - \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv} = F_u - \dfrac{E_v}{2}, \\ \beta_1 E + \beta_2 F &=& \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\|\mathbf{x}_u\|^2 = \dfrac{E_v}{2}, \\ \beta_1 F + \beta_2 G &=& \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\|\mathbf{x}_v\|^2 = \dfrac{G_u}{2}, \\ \gamma_1 E + \gamma_2 F &=& \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u = \dfrac{\partial}{\partial v}(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v) - \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv} = F_v - \dfrac{G_u}{2}, \\ \gamma_1 F + \gamma_2 G &=& \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\|\mathbf{x}_v\|^2 = \dfrac{G_v}{2}. \end{array}\right. \tag{14.18}$$

Le prime due equazioni della (14.18) possono essere risolte rispetto ad α_1 e α_2, e si ottiene $\alpha_1 = \Gamma^1_{11}$ e $\alpha_2 = \Gamma^2_{11}$. Le altre due coppie di equazioni consentono in modo analogo di ricavare gli altri coefficienti, e a questo punto la dimostrazione è completa. □

Lemma 14.3.2. *Sia* $\mathbf{x}$ *una parametrizzazione locale regolare. Tra i simboli di Christoffel ed* E*,* F *e* G *si hanno le seguenti relazioni:*

$$\text{(14.19)}\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11}E+\Gamma^2_{11}F=\dfrac{E_u}{2}, & \Gamma^1_{11}F+\Gamma^2_{11}G=F_u-\dfrac{E_v}{2},\\ \Gamma^1_{12}E+\Gamma^2_{12}F=\dfrac{E_v}{2}, & \Gamma^1_{12}F+\Gamma^2_{12}G=\dfrac{G_u}{2},\\ \Gamma^1_{22}E+\Gamma^2_{22}F=F_v-\dfrac{G_u}{2}, & \Gamma^1_{22}F+\Gamma^2_{22}G=\dfrac{G_v}{2}, \end{cases}$$

e

$$\text{(14.20)}\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12} &= (\log\sqrt{E\,G-F^2})_u\\ \Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22} &= (\log\sqrt{E\,G-F^2})_v. \end{cases}$$

Dimostrazione. Le equazioni (14.19) sono conseguenza delle definizioni dei simboli di Christoffel. Dimostriamo la prima delle (14.20). Dalla (14.19) si ottiene

$$2(E\,G-F^2)(\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12})=G\,E_u-2F\,F_u+E\,G_u=(E\,G-F^2)_u.$$

Quindi

$$\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}=\frac{(E\,G-F^2)_u}{2(E\,G-F^2)}=\left(\log\sqrt{E\,G-F^2}\right)_u$$

□

14.4 La curvatura geodetica e la torsione geodetica

Sia $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ una superficie regolare, e sia $\boldsymbol{\beta}\colon(c,d)\longrightarrow\mathcal{M}$ una curva con velocità unitaria. Sappiamo che l'accelerazione di $\boldsymbol{\beta}$ in $\mathbb{R}^n$ ha una componente ortogonale a $\mathcal{M}$ ed una componente tangente a $\mathcal{M}$. Pertanto possiamo scrivere

$$\text{(14.21)}\qquad \boldsymbol{\beta}''(s)=\boldsymbol{\beta}''(s)^\top+\boldsymbol{\beta}''(s)^\perp$$

per $c<s<d$, dove $\boldsymbol{\beta}''(s)^\top$ è tangente a $\mathcal{M}$ e $\boldsymbol{\beta}''(s)^\perp$ è ortogonale a $\mathcal{M}$.

Definizione 14.4.1. *La* **curvatura geodetica "senza segno"** $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}]$ *e la* **curvatura normale** $\boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}]$ *di una curva con velocità unitaria* $\boldsymbol{\beta}\colon(c,d)\longrightarrow\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ *sono date da*

$$\text{(14.22)}\qquad \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}](s)=\|\boldsymbol{\beta}''(s)^\top\|\qquad e\qquad \boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}](s)=\|\boldsymbol{\beta}''(s)^\perp\|.$$

Le curvature normale e geodetica "senza segno" di una curva con velocità arbitraria $\boldsymbol{\alpha}\colon(a,b)\longrightarrow\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ *si definiscono come le curvature normale e geodetica, rispettivamente, di qualunque riparametrizzazione di* $\boldsymbol{\alpha}$ *con velocità unitaria.*

Esiste una relazione notevole tra $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}]$, $\boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}]$ e la curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]$ che abbiamo definito nel Paragrafo 3.2.

Lemma 14.4.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ una superficie regolare, e sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità unitaria. Le curvature normale e geodetica "senza segno" di $\boldsymbol{\beta}$ come curva contenuta in $\mathcal{M}$ sono legate alla curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]$ di $\boldsymbol{\beta}$ come curva in $\mathbb{R}^n$ dalla formula*

$$\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]^2 = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}]^2 + \boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}]^2.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}](s)^2 = \|\boldsymbol{\beta}''(s)\|^2 = \|\boldsymbol{\beta}''(s)^\top\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}''(s)^\perp\|^2 = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}](s)^2 + \boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}](s)^2$$

□

Vogliamo ora particolarizzare le considerazioni precedenti al caso di una superficie regolare e orientata $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$, per poter introdurre una definizione più elegante di $\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}]$. Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità unitaria. Allora $\boldsymbol{\beta}''(s)$ è un multiplo di $J\boldsymbol{\beta}'(s) = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\beta}'(s)$ per $c < s < d$.

Definizione 14.4.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare e orientata in $\mathbb{R}^3$. La* **curvatura geodetica** *$\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}]$ di una curva $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ è data da*

$$\boldsymbol{\beta}''(s)^\top = \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}](s) J\boldsymbol{\beta}'(s) = \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}](s)\mathbf{U} \times \boldsymbol{\beta}'(s). \tag{14.23}$$

per $c < s < d$.

Ecco la versione migliorata del Lemma 14.4.1.

Corollario 14.4.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare e orientata in $\mathbb{R}^3$, e sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità unitaria.Allora*

$$|\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}]| = \widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}] \qquad e \qquad \boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\beta}]^2 = \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}]^2 + \boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}]^2.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}_g[\boldsymbol{\beta}](s) = \|\boldsymbol{\beta}''(s)^\top\| = \|\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}](s) J\boldsymbol{\beta}'(s)\| = |\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}](s)|\,\|J\boldsymbol{\beta}'(s)\| = |\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}](s)|$$

□

Vogliamo ora mettere in evidenza alcuni fatti elementari relativi alle curvature $\boldsymbol{\kappa}_g$ e $\boldsymbol{\kappa}_n$ nel caso di una curva di una superficie regolare e orientata $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. Dimostreremo innanzi tutto che la curvatura normale di una curva con velocità unitaria contiene le stesse informazioni geometriche possedute dalla curvatura normale definita nel Paragrafo 9.2.

Lemma 14.4.2. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e orientata, e scegliamo un campo normale unitario $\mathbf{U}$ per $\mathcal{M}$. Sia $\mathbf{u_p}$ un vettore unitario tangente a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$. Se $\boldsymbol{\beta}$ è una curva arbitraria su $\mathcal{M}$ con velocità unitaria e tale che $\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\beta}'(s) = \mathbf{u_p}$, allora*

$$\boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}](s) = \mathbf{k}(\mathbf{u_p}),$$

dove $\mathbf{k}(\mathbf{u_p})$ denota la curvatura normale di $\mathcal{M}$ nella direzione di $\mathbf{u_p}$.

Dimostrazione. Per definizione (si veda a pagina 147)

$$\mathbf{k}(\mathbf{u_p}) = S(\mathbf{u_p}) \cdot \mathbf{u_p} = S(\boldsymbol{\beta}'(s)) \cdot \boldsymbol{\beta}'(s).$$

D'altra parte, in accordo con il Lemma 9.1.3, a pagina 145, si ha

$$S(\boldsymbol{\beta}'(s)) \cdot \boldsymbol{\beta}'(s) = \boldsymbol{\beta}''(s) \cdot \mathbf{U}.$$

Poiché $(\boldsymbol{\beta}''(s) \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}$ è la componente di $\boldsymbol{\beta}''(s)$ perpendicolare a $\mathcal{M}$, il Lemma è dimostrato. □

Ricaviamo ora alcune semplici formule per il calcolo delle curvature normale e geodetica di una curva con velocità arbitraria su una superficie regolare e orientata in $\mathbb{R}^3$.

Lemma 14.4.3. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una curva con velocità arbitraria in una superficie regolare e orientata $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{U}$ un campo normale unitario di $\mathcal{M}$. Le curvature normale e geodetica di $\boldsymbol{\alpha}$ sono date da*

$$\boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\alpha}](t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t) \cdot \mathbf{U}}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2} \tag{14.24}$$

e

$$\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\alpha}](t) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}''(t)\mathbf{U}\boldsymbol{\alpha}'(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t) \cdot J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}, \tag{14.25}$$

per $a < t < b$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\beta}$ una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$ con velocità unitaria, e poniamo

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}\big(s(t)\big)$$

per $a < t < b$. Allora

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = s'(t)\boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha}''(t) = s''(t)\boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big) + s'(t)^2\boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big),$$

mentre

$$\boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\alpha}](t) = \boldsymbol{\kappa}_n[\boldsymbol{\beta}]\big(s(t)\big) = \boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big) \cdot \mathbf{U} = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t) \cdot \mathbf{U}}{s'(t)^2}.$$

Essendo $s'(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$, si ha la (14.24).

Per dimostrare la (14.25) osserviamo, in primo luogo, che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}''(t) \times \boldsymbol{\alpha}'(t) &= \big(s''(t)\boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big) + s'(t)^2\boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big)\big) \times s'(t)\boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big) \\ &= s'(t)^3\boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big) \times \boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big). \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\big(\boldsymbol{\alpha}''(t)\mathbf{U}\boldsymbol{\alpha}'(t)\big) = -\mathbf{U} \cdot \big(\boldsymbol{\alpha}''(t) \times \boldsymbol{\alpha}'(t)\big) = -s'(t)^3\mathbf{U} \cdot \big(\boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big) \times \boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big)\big).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\alpha}](t) &= \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\beta}]\big(s(t)\big) = \boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big) \cdot J\boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big) \\ &= \boldsymbol{\beta}''\big(s(t)\big) \cdot \big(\mathbf{U} \times \boldsymbol{\beta}'\big(s(t)\big)\big) = \frac{\big(\boldsymbol{\alpha}''(t)\mathbf{U}\boldsymbol{\alpha}'(t)\big)}{s'(t)^3}, \end{aligned}$$

e si ottiene così la (14.25). □

Quindi quella di curvatura geodetica è la generalizzazione ad una superficie arbitraria della nozione della curvatura con segno di una curva piana. In effetti, la curvatura geodetica ammette l'interpretazione geometrica seguente:

Teorema 14.4.1. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità arbitraria su una superficie regolare orientata $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}(t_0)$, dove $a < t_0 < b$. Allora la curvatura geodetica di $\boldsymbol{\alpha}$ in t_0 coincide con la curvatura con segno della proiezione di $\boldsymbol{\alpha}$ sul piano tangente $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\boldsymbol{P\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}_\mathbf{p}$ la proiezione di $\boldsymbol{\alpha}$ sul piano tangente $\mathcal{M}_\mathbf{p}$. Se $\mathbf{U}$ è il campo di vettori unitario normale ad $\mathcal{M}$, allora anche il vettore $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ è unitario e normale ad $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ nell'origine di $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ (dove $\mathcal{M}_\mathbf{p}$ è considerato come una superficie in $\mathbb{R}^3$). Chiaramente, per $a < t < b$ si ha

$$\boldsymbol{P\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) - \big(\boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p})\big)\mathbf{U}(\mathbf{p}) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{P\alpha}'(t_0) = \boldsymbol{\alpha}'(t_0). \tag{14.26}$$

Allora la (14.26) implica che

$$\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\alpha}](t_0) = \frac{\boldsymbol{\alpha}''(t_0) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}) \times \boldsymbol{\alpha}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|^3} = \frac{\boldsymbol{P\alpha}''(t_0) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{p}) \times \boldsymbol{P\alpha}'(t_0)}{\|\boldsymbol{P\alpha}'(t_0)\|^3} = \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{P\alpha}](t_0)$$

□

Mostriamo ora che la curvatura geodetica $\boldsymbol{\kappa}_g$ è intrinseca a $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, dando l'espressione di $\boldsymbol{\kappa}_g$ in funzione dei coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale associata ad una parametrizzazione locale. Dal momento che il calcolo è locale, non si lede la generalità supponendo che $\mathcal{M}$ sia orientata.

Teorema 14.4.2. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una curva la cui traccia è contenuta in $\mathbf{x}(\mathcal{U})$, dove $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ è una carta locale regolare. Poniamo*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

per $a < t < b$. Allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\alpha}]\,\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3 \;=\; & \sqrt{E\,G - F^2}\Big(-\Gamma^2_{11}u'^3 + \Gamma^1_{22}v'^3 \\ & -(2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})u'^2v' + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})u'v'^2 + u''v' - v''u'\Big). \end{aligned} \tag{14.27}$$

Dimostrazione. Poiché $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$, e

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \mathbf{x}_{uu}u'^2 + 2\mathbf{x}_{uv}u'v' + \mathbf{x}_{vv}v'^2 + \mathbf{x}_u u'' + \mathbf{x}_v v'',$$

risulta che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}'' \times \boldsymbol{\alpha}' \;=\; & (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u)u'^3 + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v)v'^3 \\ & +(\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u)u'^2v' + (\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_v)u'v'^2 \\ & +(u''v' - v''u')\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}'' \times \boldsymbol{\alpha}') \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \;=\; & (\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)u'^3 \\ & +(\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)v'^3 \\ & +(\mathbf{x}_{uu} \times \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_u) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)u'^2v' \\ & +(\mathbf{x}_{vv} \times \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x}_{uv} \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)u'v'^2 \\ & +(u''v' - v''u')\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2. \end{aligned} \tag{14.28}$$

Mostriamo ora come si esprimono i coefficienti di u'^3, v'^3, u'^2, v'^2 nei secondi membri delle (14.28) in funzione di E, F, G e dei simboli di Christoffel. In primo luogo,

utilizzando la (3.1), a pagina 42, e le (14.13) si ha

$$
\begin{aligned}
(14.29)\qquad (\mathbf{x}_{uu}\times\mathbf{x}_u)\cdot(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v) &= (\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)-(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v)\|\mathbf{x}_u\|^2\\
&= \frac{1}{2}E_uF-\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)E\\
&= -(E\,G-F^2)\Gamma^2_{11};
\end{aligned}
$$

analogamente

$$
(14.30)\qquad (\mathbf{x}_{vv}\times\mathbf{x}_v)\cdot(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)=(E\,G-F^2)\Gamma^1_{22}.
$$

Allo stesso modo,

$$
\begin{aligned}
(14.31)\qquad &(\mathbf{x}_{uu}\times\mathbf{x}_v+2\mathbf{x}_{uv}\times\mathbf{x}_u)\cdot(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)\\
&\quad=(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)\|\mathbf{x}_v\|^2-(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)\\
&\qquad+2(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)-2(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v)\|\mathbf{x}_u\|^2\\
&\quad=\frac{1}{2}E_uG-\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)E+E_vF-G_uE\\
&\quad=(E\,G-F^2)(\Gamma^1_{11}-2\Gamma^2_{12});
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(14.32)\qquad &(\mathbf{x}_{vv}\times\mathbf{x}_u+2\mathbf{x}_{uv}\times\mathbf{x}_v)\cdot(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)\\
&\qquad=-(E\,G-F^2)(\Gamma^2_{22}-2\Gamma^1_{12}).
\end{aligned}
$$

Sostituendo le (14.29)–(14.32) nella (14.28), si ottiene la (14.27). □

Proprio come la curvatura geodetica $\boldsymbol{\kappa}_g[\boldsymbol{\alpha}]$ di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ è una variante dell'ordinaria curvatura $\boldsymbol{\kappa}[\boldsymbol{\alpha}]$, c'è una variante della torsione di $\boldsymbol{\alpha}$.

Definizione 14.4.3. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie regolare orientata in $\mathbb{R}^3$. La* **torsione geodetica** $\boldsymbol{\tau}_g[\boldsymbol{\alpha}]$ *di una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon(c,d)\longrightarrow\mathcal{M}$ è data da*

$$
(14.33)\qquad \boldsymbol{\tau}_g[\boldsymbol{\alpha}](t)=\frac{S\boldsymbol{\alpha}'(t)\cdot J\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2}.
$$

Si dimostra facilmente il

Lemma 14.4.4. *La definizione di torsione geodetica è indipendente dalla parametrizzazione. Inoltre, una curva su una superficie ha torsione geodetica uguale a zero se e solo se essa è una curva principale.*

C'è anche un analogo delle formule di Frenet per una curva $\boldsymbol{\alpha}$ su una superficie orientata $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. Proprio come abbiamo fatto nel Teorema 3.2.1, poniamo $\mathbf{T} = \boldsymbol{\alpha}'/\|\boldsymbol{\alpha}'\|$. Ma siccome vogliamo studiare la relazione tra la geometria di $\boldsymbol{\alpha}$ e quella di $\mathcal{M}$, ci serviamo dei campi di vettori $J\mathbf{T}$ e $\mathbf{U}$ al posto di $\mathbf{N}$ e di $\mathbf{B}$. (Osserviamo che $J\mathbf{T}$ è sempre tangente a $\mathcal{M}$ e che $\mathbf{U}$ è sempre perpendicolare a $\mathcal{M}$; in generale $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ non sono invece né tangenti né perpendicolari a $\mathcal{M}$, e di conseguenza essi non possono essere utilizzati per studiare la geometria di $\mathcal{M}$.)

Definizione 14.4.4. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie orientata regolare in $\mathbb{R}^n$ con campo normale unitario $\mathbf{U}$, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva su $\mathcal{M}$. Denotiamo con J la struttura complessa di $\mathcal{M}$ determinata da $\mathbf{U}$, e poniamo $\mathbf{T} = \boldsymbol{\alpha}'/\|\boldsymbol{\alpha}'\|$. Il* **campo di riferimenti di Darboux** *di $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto a $\mathcal{M}$ è costituito dalla terna di campi di vettori $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$.*

In corrispondenza delle formule di Frenet ci sono le **formule di Darboux**; le descriviamo dapprima per una curva con velocità unitaria $\boldsymbol{\beta}$.

Teorema 14.4.3. *Sia $\boldsymbol{\beta}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità unitaria, e sia $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$ il campo di riferimenti di Darboux di $\boldsymbol{\beta}$ rispetto a $\mathcal{M}$. Allora*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{T}' &=& & \boldsymbol{\kappa}_g\, J\mathbf{T} & +\boldsymbol{\kappa}_n\, \mathbf{U}, \\ (J\mathbf{T})' &=& -\boldsymbol{\kappa}_g\, \mathbf{T} & & +\boldsymbol{\tau}_g\, \mathbf{U}, \\ \mathbf{U}' &=& -\boldsymbol{\kappa}_n\, \mathbf{T} & -\boldsymbol{\tau}_g\, J\mathbf{T}. & \end{array}\right. \tag{14.34}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= (\mathbf{T}' \cdot J\mathbf{T})J\mathbf{T} + (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} \\ &= (\boldsymbol{\beta}'' \cdot J\mathbf{T})J\mathbf{T} + (\boldsymbol{\beta}'' \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} \\ &= \boldsymbol{\kappa}_g\, J\mathbf{T} + \boldsymbol{\kappa}_n\, \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Le altre formule della (14.34) si dimostrano in modo simile. □

Le formule di Darboux per una curva con velocità arbitraria si possono ricavare in modo analogo a quello visto per le formule di Frenet per una curva con velocità arbitraria a pagina 51. Ecco il risultato.

Corollario 14.4.2. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità $v = \|\boldsymbol{\alpha}'\|$, e sia $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}, \mathbf{U}\}$ il campo di riferimenti di Darboux di $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto a $\mathcal{M}$. Allora*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{T}' &=& & v\,\boldsymbol{\kappa}_g\, J\mathbf{T} & +v\,\boldsymbol{\kappa}_n\, \mathbf{U}, \\ (J\mathbf{T})' &=& -v\,\boldsymbol{\kappa}_g\, \mathbf{T} & & +v\,\boldsymbol{\tau}_g\, \mathbf{U}, \\ \mathbf{U}' &=& -v\,\boldsymbol{\kappa}_n\, \mathbf{T} & -v\,\boldsymbol{\tau}_g\, J\mathbf{T}. & \end{array}\right. \tag{14.35}$$

I campi di riferimenti sono uno strumento molto utile per studiare le curve e le superfici, ed in generale in geometria differenziale. Si veda l'articolo di É. Cartan[4] [Cartan] per una trattazione generale di questo argomento.

14.5 Esercizi

1. Si calcoli la curvatura di Gauss, per ognuna delle seguenti superfici.
   (a) Una sfera,
   (b) Un toro,
   (c) Un catenoide,
   (d) La superficie di Enneper.
2. Si calcolino i simboli di Christoffel per ognuna delle superfici dell'esercizio 1.
3. Si dimostri che la torsione geodetica di una curva su una sfera è nulla.
4. Si calcolino la curvatura geodetica e la torsione della curva $t \longmapsto (t, a\,t, a\,t^2)$ sul paraboloide iperbolico $(u, v) \longmapsto (u, v, u\,v)$.
5. Si dimostri che ogni rotazione attorno all'asse delle z conserva la curvatura di una sella di scimmia, ma che solo le rotazioni di angolo $\pm 2\pi/3$ sono isometrie.

[4]

Élie Cartan (1869-1951). Matematico francese. Uno dei più eminenti matematici del ventesimo secolo. Tra i suoi importanti contributi ricordiamo le classificazioni dei gruppi di Lie compatti e degli spazi simmetrici e lo studio di diverse geometrie per mezzo dei riferimenti mobili e delle equazioni di struttura.

Capitolo 15

Varietà Riemanniane

Il nostro ultimo obiettivo è lo studio della geometria delle superfici astratte, cioè delle varietà bidimensionali munite di una metrica compatibile con la struttura di varietà. Le superfici regolari in $\mathbb{R}^3$ sono superfici astratte, ma ci sono altre superfici astratte che non possono essere messe in $\mathbb{R}^3$.

In questo capitolo torniamo alle superfici astratte da un punto di vista più generale, quello che si basa sulle nozioni di derivata covariante e di varietà riemanniana. Anche se siamo interessati soprattutto alla dimensione due, definiremo questi concetti in dimensione arbitraria, non essendovi alcuna differenza rispetto al caso bidimensionale, che verrà poi trattato nel Capitolo 16.

Le proprietà fondamentali delle derivate covarianti vengono illustrate nel Paragrafo 15.1; le derivate covarianti saranno necessarie nello studio delle geodetiche nel Capitolo 17. Le varietà pseudoriemanniane vengono definite nel Paragrafo 15.2; ogni varietà pseudoriemanniana possiede una derivata covariante. Una varietà riemanniana è una varietà pseudoriemanniana la cui metrica è definita positiva. Il Paragrafo 15.3 ha lo scopo di gettare un ponte tra le moderne tecniche dei Paragrafi 15.1–15.2 e la trattazione classica delle metriche.

15.1 Derivate covarianti

Data l'importanza dello studio dei campi di vettori su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, è naturale cercare di definire in che modo si derivano i campi di vettori su $\mathcal{M}$. In $\mathbb{R}^n$ c'è un modo naturale per far questo. Sia $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Rispetto ai campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}$$

determinati dalle funzioni coordinate naturali $u_1 \dots u_n$ possiamo scrivere

$$Y = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

per certe funzioni $f_1 \dots f_n \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$. Di solito, nel calcolo differenziale il campo di vettori Y viene identificato con la ennupla $(f_1 \dots f_n)$. Allora, dato $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, c'è un candidato naturale per la derivata $D_X Y$ di Y in direzione di X, cioè

$$D_X Y = \big(X[f_1], \dots, X[f_n]\big). \tag{15.1}$$

Di fatto, nel Lemma 5.5.4, pagina 85, abbiamo scritto $\boldsymbol{D}_X Y$ invece di $D_X Y$.

Purtroppo, su una varietà differenziabile arbitraria non esiste una nozione naturale di derivazione di campi di vettori. Per questo è necessario aggiungere alla struttura un nuovo elemento.

Definizione 15.1.1. *Una* **connessione** *o* **derivata covariante** *su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è un'applicazione*

$$D\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

che per $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ interpretiamo come un'applicazione

$$D_X\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

$$D_{fX+gY} = f D_X + g D_Y, \tag{15.2}$$

$$D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z, \tag{15.3}$$

$$D_X(fY) = X[f]Y + f D_X Y, \tag{15.4}$$

dove $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ed $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

Osservazioni

(1) Una connessione D non è tensoriale, in quanto nel secondo argomento essa non è lineare rispetto alle funzioni.

(2) Si noti che la (15.3) e la (15.4) implicano che

$$D_X(a\,Y + b\,Z) = a\,D_X Y + b\,D_X Z, \tag{15.5}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

(3) Di solito non c'è una scelta canonica di una connessione su una varietà differenziabile. Tuttavia vedremo che ad ogni metrica riemanniana resta associata una speciale connessione.

Levi-Civita[1] introdusse la nozione di derivazione covariante nel suo libro **Il calcolo differenziale assoluto** [LeviC]) per spiegare il parallelismo sulle varietà riemanniane.

Esempio: la connessione naturale su $\mathbb{R}^n$

Definiamo

$$D\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

ponendo innanzi tutto

$$D_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = 0$$

per $1 \leq i, j \leq n$. Più in generale, se

$$Y = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

per la (15.4) e la (15.5) deve aversi

$$D_X Y = \sum_{i=1}^{n} X[f_i] \frac{\partial}{\partial u_i}, \tag{15.6}$$

per $1 \leq i \leq n$. La (15.6) definisce di fatto una connessione naturale su $\mathbb{R}^n$; inoltre, la (15.6) è equivalente alla (15.1).

C'è una variante della nozione di connessione analoga alla definizione di $\boldsymbol{D_{\mathbf{v}}}$ che abbiamo dato nel Paragrafo 5.5. Sia $\mathcal{M}$ una varietà differenziabile e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Una connessione D su $\mathcal{M}$ dà luogo ad un'applicazione

$$D\colon \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}.$$

Definizione 15.1.2. *Sia $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ un vettore tangente a $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Scegliamo $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tale che $V_{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Per un arbitrario $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definiamo $D_{\mathbf{v}}W$ come il vettore tangente in $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ dato da*

$$D_{\mathbf{v}}W = (D_V W)_{\mathbf{p}}\,.$$

[1] Tullio Levi-Civita (1873-1941). Fu professore a Padova e a Roma. Egli si occupò anche di idrodinamica e di meccanica razionale. Il regime fascista obbligò Levi-Civita a rinunciare all'insegnamento nel 1938.

Lemma 15.1.1. *Fissiamo $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. La definizione di $D_{\mathbf{v}}W$ è indipendente dalla scelta di $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tale che $V_{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$.*

Dimostrazione. Sia $V, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tale che $V_{\mathbf{p}} = Y_{\mathbf{p}}$, e sia $(x_1 \dots x_n)$ un sistema di coordinate definito su un aperto contenente $\mathbf{p}$. Possiamo allora scrivere

$$V = \sum_{i=1}^{n} V[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \text{e} \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Allora la (15.2) e la (15.4) implicano che

$$\begin{aligned} (D_V W)_{\mathbf{p}} &= \sum_{i=1}^{n} \left(V[x_i] D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W \right)_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{n} V[x_i](\mathbf{p}) \left(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W \right)_{\mathbf{p}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y[x_i](\mathbf{p}) \left(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} W \right)_{\mathbf{p}} = (D_Y W)_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

□

Potrebbe accadere che $Y_{\mathbf{p}} = Z_{\mathbf{p}}$ ma $(D_X Y)_{\mathbf{p}} \neq (D_X Z)_{\mathbf{p}}$. Vale però il seguente:

Lemma 15.1.2. *Sia $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e sia $\boldsymbol{\alpha} \colon (a, b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva tale che*

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = X_{\alpha(t)}$$

(cioè, $\boldsymbol{\alpha}$ è una **curva integrale** *di X). Siano $Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tali che*

$$Y_{\alpha(t)} = Z_{\alpha(t)}$$

per $a < t < b$. Allora

$$(D_X Y)_{\alpha(t)} = (D_X Z)_{\alpha(t)}$$

per $a < t < b$.

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che esista un sistema di coordinate $(x_1 \dots x_n)$, definito su un aperto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, tale che la traccia di $\boldsymbol{\alpha}$ sia contenuta in $\mathcal{U}$. Basta dimostrare che per ogni $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ si ha

$$\begin{cases} t \longmapsto Y_{\alpha(t)} \text{ identicamente nulla} \\ \qquad\qquad \text{implica} \\ t \longmapsto (D_X Y)_{\alpha(t)} \text{ identicamente nulla.} \end{cases}$$

Scriviamo

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{15.7}$$

su $\mathcal{U}$ e supponiamo che $t \longmapsto Y_{\alpha(t)}$ si annulli identicamente. Allora la (15.7) implica che

$$Y[x_i]\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) = 0 \tag{15.8}$$

per $a < t < b$ e $i = 1 \dots n$. Derivando la (15.7) otteniamo

$$D_X Y = \sum_{i=1}^{n} \left(XY[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + Y[x_i] D_X \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \tag{15.9}$$

Consideriamo ora la restrizione della (15.9) ad $\boldsymbol{\alpha}$; tenendo conto della (15.8) troviamo

$$(D_X Y)_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{n} \left(XY[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\alpha(t)}. \tag{15.10}$$

Ma dalla (15.8) e dall'identità

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) f = \boldsymbol{\alpha}_{*t} \frac{d}{du}_{|t} f = \frac{d}{du}(f \circ \boldsymbol{\alpha})(t)$$

risulta

$$XY[x_i]\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) = X_{\alpha(t)}[Y[x_i]] = \boldsymbol{\alpha}'(t)[Y[x_i]] = \frac{d(Y[x_i] \circ \boldsymbol{\alpha})}{du}(t) = 0.$$

Quindi i coefficienti nella (15.10) si annullano tutti, e pertanto si ha $(D_X Y)_{\alpha(t)} = 0$ per $a < t < b$ □

Nel Paragrafo 1.4 abbiamo considerato campi di vettori lungo una curva in $\mathbb{R}^n$. Questa nozione si estende alle varietà.

Definizione 15.1.3. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva in una varietà differenziabile $\mathcal{M}$. Un* **campo di vettori lungo $\boldsymbol{\alpha}$** *è una funzione $\mathbf{Y}$ che associa ad ogni t con $a < t < b$ un vettore tangente $\mathbf{Y}(t) \in \mathcal{M}_{\alpha(t)}$.*

Il Lemma 15.1.2 implica che possiamo definire senza ambiguità la derivata covariante di un campo di vettori lungo una curva.

Definizione 15.1.4. *Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva regolare iniettiva in una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, e sia $\mathbf{Y}$ un campo di vettori lungo $\boldsymbol{\alpha}$. Allora*

$$\mathbf{Y}'(t) = D_{\alpha'(t)} \widetilde{Y},$$

dove $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ è un campo di vettori tale che $\widetilde{Y}_{\alpha(t)} = \mathbf{Y}(t)$, per $a < t < b$.

I campi di vettori lungo una curva in una varietà $\mathcal{M}$ hanno la maggior parte delle proprietà di cui godono i campi di vettori lungo una curva in $\mathbb{R}^n$. Per esempio, il seguente lemma generalizza il Lemma 1.4.1, pagina 17.

Lemma 15.1.3. *Siano* $\mathbf{Y}$ *e* $\mathbf{Z}$ *due campi di vettori lungo una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ *in una varietà differenziabile* $\mathcal{M}$*, e sia* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenziabile. Allora*

$$(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})' = \mathbf{Y}'+\mathbf{Z}', \tag{15.11}$$

$$(f\mathbf{Y})' = f'\mathbf{Y}+f\mathbf{Y}'. \tag{15.12}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (15.12). Siano $\widetilde{f} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ e $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tali che $\widetilde{f}\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) = f(t)$ e $\widetilde{Y}\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) = \mathbf{Y}(t)$ per $a < t < b$. Allora

$$\begin{aligned}(f\mathbf{Y})'(t) &= D_{\alpha'(t)}(\widetilde{f}\widetilde{Y})\\ &= \boldsymbol{\alpha}'(t)[\widetilde{f}]\widetilde{Y}_{\alpha(t)} + \widetilde{f}\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)D_{\alpha'(t)}\widetilde{Y}\\ &= (\widetilde{f}\circ\boldsymbol{\alpha})'(t)\mathbf{Y}(t) + f(t)\mathbf{Y}'(t) = f'(t)\mathbf{Y}(t)+f(t)\mathbf{Y}'(t)\end{aligned}$$

□

Anche per i campi di vettori lungo una curva vale una regola della catena.

Lemma 15.1.4. *Sia* $\mathbf{Y}$ *un campo di vettori lungo una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ *in una varietà differenziabile* $\mathcal{M}$*, e sia* $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ *differenziabile. Allora*

$$(\mathbf{Y}\circ h)'(t) = h'(t)\mathbf{Y}'\big((h(t)\big), \tag{15.13}$$

per $c < t < d$*.*

Dimostrazione. Se $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ è tale che $\widetilde{Y}\big(\boldsymbol{\alpha}(h(t))\big) = \mathbf{Y}\big((h(t)\big)$ per $c < t < d$, allora per la regola della catena per le curve $(\boldsymbol{\beta}'(t) = (\boldsymbol{\alpha}\circ h)(t) = h'(t)\boldsymbol{\alpha}'(h(t)))$ si ha

$$\begin{aligned}(\mathbf{Y}\circ h)'(t) &= D_{(\alpha\circ h)'(t)}\widetilde{Y} = D_{h'(t)(\alpha'\circ h)(t)}\widetilde{Y}\\ &= h'(t)D_{(\alpha'\circ h)(t)}\widetilde{Y} = h'(t)\mathbf{Y}'\big((h(t)\big)\end{aligned}$$

□

Possiamo ora definire la nozione di accelerazione di una curva contenuta in una varietà. Essa dipende dalla scelta della derivata covariante.

Definizione 15.1.5. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ *una curva contenuta in una varietà differenziabile* $\mathcal{M}$*, e sia* D *una connessione su* $\mathcal{M}$*.* **L'accelerazione** *di* $\boldsymbol{\alpha}$ *rispetto a* D *è il campo di vettori*

$$t \longmapsto D_{\alpha'(t)}\boldsymbol{\alpha}'(t),$$

che indicheremo semplicemente con $D_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$. *Si dice che una curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ *è una* **geodetica** *rispetto a* D *se*

$$D_{\alpha'(t)}\boldsymbol{\alpha}'(t) = 0$$

per $a < t < b$.

Abbiamo denotato l'accelerazione di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ contenuta in una varietà $\mathcal{M}$ con $D_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ per evitare confusione con l'accelerazione di una curva in $\mathbb{R}^n$. Per esempio, se $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva contenuta in una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ le due accelerazioni $D_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ e $\boldsymbol{\alpha}''$ in genere sono diverse.

Dimostriamo ora l'analoga, per una varietà, dell'equazione (1.13) a pagina 20, che esprime la relazione che intercorre tra l'accelerazione di una curva $\boldsymbol{\alpha}$ e l'accelerazione di una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$.

Lemma 15.1.5. *Sia* $\mathcal{M}$ *una varietà differenziabile, e sia* D *una connessione su* $\mathcal{M}$. *Sia* $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ *una curva su* $\mathcal{M}$, *e sia* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$ *una riparametrizzazione di* $\boldsymbol{\alpha}$, *dove* $h\colon (c,d) \longrightarrow (a,b)$ *è differenziabile. Allora*

$$D_{\beta'}\boldsymbol{\beta}' = h'^2 \left(D_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'\right) \circ h + h''(\boldsymbol{\alpha}' \circ h). \tag{15.14}$$

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che

$$\boldsymbol{\beta}' = h'(\boldsymbol{\alpha}' \circ h). \tag{15.15}$$

Deriviamo la (15.15) e teniamo conto della (15.13) e della (15.12). Per $c < t < d$ si ha

$$\begin{aligned} D_{\beta'(t)}\boldsymbol{\beta}'(t) &= D_{\beta'(t)}(\boldsymbol{\alpha} \circ h)'(t) = D_{\beta'(t)}\big(h'(t)\boldsymbol{\alpha}'(h(t))\big) \\ &= h''(t)\boldsymbol{\alpha}'\big((h(t)\big) + h'(t)D_{\beta'(t)}\boldsymbol{\alpha}'\big((h(t)\big) \\ &= h''(t)\boldsymbol{\alpha}'\big((h(t)\big) + h'(t)D_{h'(t)\alpha'\left((h(t)\right)}\boldsymbol{\alpha}'\big((h(t)\big) \\ &= h''(t)\boldsymbol{\alpha}'\big((h(t)\big) + h'(t)^2 D_{\alpha'\left((h(t)\right)}\boldsymbol{\alpha}'\big((h(t)\big). \end{aligned} \tag{15.16}$$

Dal momento che la (15.16) vale per ogni t, si ottiene la (15.14). □

15.2 Metriche riemanniane indefinite

Tra i campi di tensori covarianti di grado 2 cioè le forme bilineari, ce ne sono alcuni molto importanti.

Definizione 15.2.1. *Sia α un campo di tensori covarianti di grado 2 su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$. Si dice che α è una* **forma bilineare simmetrica** *se*

$$\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X) \tag{15.17}$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Allo stesso modo, α è detta una **forma bilineare antisimmetrica** *se*

$$\alpha(X,Y) = -\alpha(Y,X) \tag{15.18}$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Noi concentreremo la nostra attenzione sulle forme bilineari simmetriche che non sono degeneri nel senso che ora spieghiamo. Osserviamo che ad un arbitrario campo di tensori covarianti α di grado 2 (simmetrico oppure no) su una varietà $\mathcal{M}$ resta associato un tensore $\alpha_{\mathbf{p}}$ su ogni spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. In maniera esplicita, $\alpha_{\mathbf{p}}$ è dato nel modo seguente. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$; allora

$$\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(X,Y)(\mathbf{p}),$$

dove $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ sono tali che $X_{\mathbf{p}} = \mathbf{x}$ e $Y_{\mathbf{p}} = \mathbf{y}$. Essendo un campo di tensori, α è lineare in entrambi gli argomenti rispetto alle funzioni. Questo fatto implica che la definizione di $\alpha_{\mathbf{p}}$ non dipenda dalla scelta dei campi di vettori X e Y tali che $X_{\mathbf{p}} = \mathbf{x}$ e $Y_{\mathbf{p}} = \mathbf{y}$.

Definizione 15.2.2. *Una forma bilineare simmetrica α su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è detta* **non degenere**, *se $\alpha_{\mathbf{p}}$ è non degenere su ogni spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ per ogni punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, cioè se,*

$$\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ per ogni } \mathbf{y} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \qquad \text{implica} \qquad \mathbf{x} = 0.$$

Una forma bilineare simmetrica non degenere è detta una **metrica pseudoriemanniana**.

Un teorema di algebra lineare afferma che una forma bilineare simmetrica α su uno spazio vettoriale n-dimensionale V su $\mathbb{R}$ può essere diagonalizzata. Questo significa che esiste una base $\{f_1 \dots f_n\}$ di V rispetto alla quale

$$\alpha(f_i, f_j) = 0$$

per $i \neq j$. Inoltre, nel caso in cui α sia non degenere la base $\{f_1 \dots f_n\}$ può essere scelta in modo che

$$\alpha(f_i, f_i) = \pm 1.$$

Il numero p di segni + ed il numero q di segni − non dipende dalla scelta della base $\{f_1 \dots f_n\}$. Si dice che la coppia (p, q) è la **segnatura** della forma bilineare simmetrica.

Un caso speciale particolarmente importante si ha quando la segnatura della forma bilineare simmetrica è $(n, 0)$.

Definizione 15.2.3. *Una forma bilineare simmetrica α su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è detta* **definita positiva**, *se $\alpha_{\mathbf{p}}$ è definita positiva su $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ per ogni punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, cioè se*

$$\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}} \text{ non nullo.}$$

In questo caso si dice che α è una **metrica riemanniana**.

Utilizzeremo la parola **metrica** con il significato di metrica pseudoriemanniana o riemanniana. Di solito una metrica viene denotata con $\langle\ ,\ \rangle$. Quando $\langle\ ,\ \rangle$ è definita positiva, poniamo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

per ogni vettore tangente $\mathbf{x}$ a $\mathcal{M}$. Anche quando $\langle\ ,\ \rangle$ non è definita positiva, scriveremo $\|\mathbf{x}\|^2$ al posto di $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$.

Definizione 15.2.4. *Una* **varietà pseudoriemanniana** *è una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ munita di una metrica $\langle\ ,\ \rangle$. Se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sono vettori tangenti a $\mathcal{M}$, chiamiamo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ il* **prodotto scalare** *di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Allo stesso modo, si può parlare del prodotto scalare di campi di vettori. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, allora $\langle X, Y \rangle$ è la funzione di $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ definita da*

$$\langle X, Y \rangle(\mathbf{p}) = \langle X_{\mathbf{p}}, Y_{\mathbf{p}} \rangle.$$

Una **varietà riemanniana** *è una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ munita di una metrica definita positiva $\langle\ ,\ \rangle$.*

Esempio: metriche su $\mathbb{R}^n$

Su $\mathbb{R}^n$ c'è una metrica definita positiva naturale, data da

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i. \tag{15.19}$$

Questa metrica coincide con il prodotto scalare canonico $\cdot$ su $\mathbb{R}^n$ che abbiamo introdotto nel Paragrafo 1.1. Una metrica più generale su $\mathbb{R}^n$ si ottiene ponendo

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i g_i, \tag{15.20}$$

dove $a_1 \dots a_n$ sono costanti non nulle. La metrica (15.20) è definita positiva se e solo se tutte le a_i sono positive. Una metrica ancor più generale è quella data da

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} f_i g_j, \tag{15.21}$$

dove (a_{ij}) è una matrice di costanti il cui determinante è diverso da zero.

La nozione di gradiente che abbiamo definito a pagina 81 si può estendere alle varietà pseudoriemanniane.

Definizione 15.2.5. *Sia θ una 1-forma su una varietà pseudoriemanniana $\mathcal{M}$. Il* **duale** *di θ è il campo di vettori $\theta^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tale che*

$$\langle \theta^*, Y \rangle = \theta(Y)$$

per ogni $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Nel caso speciale in cui $\theta = df$ per qualche $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ chiamiamo df^* il **gradiente** *di f e lo denotiamo* $\mathbf{grad} f$*; esso è dato da*

$$\langle \mathbf{grad} f, Y \rangle = Y[f].$$

Che θ^* sia ben definita è conseguenza di un risultato di algebra lineare elementare.

Lemma 15.2.1. *Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$. Ogni $\mathbf{x} \in V$ è completamente determinato da tutti i "prodotti scalari" $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ con tutti gli $\mathbf{y} \in V$.*

Dimostrazione. Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle$ per ogni $\mathbf{y} \in V$, allora $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = 0$ per ogni $\mathbf{y} \in V$. Essendo $\langle\ ,\ \rangle$ non degenere, deve aversi $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ □

Nello studio delle varietà pseudoriemanniane siamo fortunati, per il fatto che tra le possibili scelte di una derivata covariante ne esiste una canonica.

Definizione 15.2.6. *Sia $\mathcal{M}$ una varietà pseudoriemanniana. Allora la* **connessione riemanniana** $\nabla \colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *di $\mathcal{M}$ è definita da*

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle \;=\; & X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ & - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \end{aligned} \tag{15.22}$$

per $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

La dimostrazione del seguente lemma è semplice:

Lemma 15.2.2. *Una connessione riemanniana ∇ gode delle seguenti proprietà:*

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \tag{15.23}$$

$$\nabla_X(a\,Y + b\,Z) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \tag{15.24}$$

$$\nabla_X fY = X[f]Y + f\nabla_X Y, \tag{15.25}$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \tag{15.26}$$

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{15.27}$$

per $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

soddisfa alle (15.23)—(15.27)*, allora essa è data dalla* (15.22)*.*

Osservazioni

(1) Il Lemma 15.2.1 implica che $\nabla_X Y$ sia ben definita dalla (15.22).

(2) Per una connessione D generica su una varietà differenziabile la condizione (15.26) può non essere soddisfatta. Una connessione per la quale vale la (15.26) è detta **avere torsione nulla**.

È possibile caratterizzare una connessione riemanniana.

Lemma 15.2.3. *Sia $\langle\ ,\ \rangle$ una metrica pseudoriemanniana su una varietà $\mathcal{M}$. Allora esiste un'unica connessione ∇ su $\mathcal{M}$ che soddisfa alle condizioni* (15.26) *e* (15.27)*.*

15.3 Trattazione classica delle metriche

In letteratura si trova spesso la notazione ds^2 per indicare una metrica, insieme con l'espressione

$$ds^2 = \sum_{ij=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j. \tag{15.28}$$

Abbiamo dato una interpretazione intuitiva della (15.28) nel Capitolo 8 facendo ricorso agli infinitesimi. Per dare significato alla (15.28) nella terminologia moderna, consideriamo una varietà riemanniana $\mathcal{M}$ con metrica $\langle\ ,\ \rangle$. Poniamo

$$\langle\ ,\ \rangle = ds^2$$

e scegliamo un sistema di coordinate $(x_1 \dots x_n)$ su $\mathcal{M}$. Il sistema di coordinate dà luogo alle 1-forme $dx_1 \dots dx_n$. Il **prodotto simmetrico** di dx_i e dx_j è il campo di tensori covarianti di grado 2 dato da

$$\begin{aligned}(dx_i dx_j)(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(dx_i(X)dx_j(Y) + dx_i(Y)dx_j(X)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(X[x_i]Y[x_j] + Y[x_i]X[x_j]\big)\end{aligned}$$

per $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Infine, sia

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

per $1 \le i, j \le n$. Le g_{ij} sono chiamate le **componenti della metrica** $\langle\ ,\ \rangle$.

Lemma 15.3.1. *Una metrica $ds^2 = \langle\ ,\ \rangle$ è data in funzione delle g_{ij} tramite la formula*

$$ds^2 = \sum_{ij=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j. \tag{15.29}$$

Dimostrazione. Per definizione

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = g_{kl}.$$

D'altra parte, si ha

$$(g_{ij}dx_i dx_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \frac{g_{ij}}{2}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial x_l} + \frac{\partial x_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right\} = \frac{g_{ij}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

per cui

$$\left(\sum_{ij=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \sum_{ij=1}^{n}\frac{g_{ij}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = g_{kl}. \tag{15.30}$$

Risulta quindi che

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = g_{kl} = \left(\sum_{ij=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right).$$

per $1 \le k, l \le n$. Per $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ arbitrari poniamo

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{l=1}^{n} b_l \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Allora la (15.30) implica che

$$
\begin{aligned}
(15.31) \qquad ds^2(X,Y) &= \sum_{kl=1}^{n} a_k b_l \, ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \\
&= \sum_{kl=1}^{n} a_k b_l \left(\sum_{ij=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \\
&= \left(\sum_{ij=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j\right)(X,Y).
\end{aligned}
$$

Dal momento che la (15.31) vale per tutti gli $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, si ha la (15.29). □

Definizione 15.3.1. *Siano g_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ le componenti di una metrica rispetto ad un sistema di coordinate $(x_1 \dots x_n)$; allora (g^{ij}) è la matrice inversa di (g_{ij}) Infine poniamo*

$$g = \det(g_{ij}).$$

Lemma 15.3.2. *Per qualunque sistema di coordinate $(x_1 \dots x_n)$ su una varietà riemanniana $\mathcal{M}$, ogni 1-forma dx_i è duale del campo vettoriale*

$$\sum_{h=1}^{n} g^{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}$$

per $i = 1 \dots n$, cioè,

$$dx_i^* = \sum_{h=1}^{n} g^{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}.$$

Dimostrazione. Per definizione di matrice inversa si ha

$$\delta_{ij} = \sum_{h=1}^{n} g^{ih} g_{hj} = \sum_{h=1}^{n} g^{ih} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_h}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \sum_{h=1}^{n} g^{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

D'altra parte,

$$\left\langle dx_i^*, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}.$$

Allora il Lemma 15.2.1 implica che dx_i^* e

$$\sum_{h=1}^{n} g^{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}$$

coincidono. □

Talvolta abbiamo bisogno di esprimere la connessione riemanniana rispetto ad un sistema di coordinate locali, e quindi introduciamo la seguente definizione.

Definizione 15.3.2. *Sia $\langle\ ,\ \rangle$ una metrica su una varietà n-dimensionale $\mathcal{M}$ munita di una metrica $ds^2 = \langle\ ,\ \rangle$, e sia ∇ la connessione riemanniana di ds^2. Se $(x_1 \dots x_n)$ è un sistema di coordinate locali su $\mathcal{M}$, allora i* **simboli di Christoffel** $\mathbf{\Gamma}_{ij}^k$ *di ∇ rispetto a $(x_1 \dots x_n)$ sono dati da*

$$\mathbf{\Gamma}_{ij}^k = dx_k \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \tag{15.32}$$

per $1 \leq i, j, k \leq n$.

Il lemma seguente è una facile conseguenza della definizione dei simboli di Christoffel.

Lemma 15.3.3. *Sia $(x_1 \dots x_n)$ un sistema di coordinate su una varietà $\mathcal{M}$ munita di una metrica $ds^2 = \langle\ ,\ \rangle$, e sia ∇ la connessione riemanniana di ds^2. Allora*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{15.33}$$

per $1 \leq i, j \leq n$.

Naturalmente è possibile definire dei simboli di Christoffel (ma in tal caso di solito si chiamano "i coefficienti della connessione") per una generica connessione su una varietà. Ecco una proprietà di simmetria dei simboli di Christoffel di una connessione riemanniana che può non valere per una connessione generica.

Lemma 15.3.4. *I simboli di Christoffel di una connessione riemanniana godono della proprietà di simmetria*

$$\mathbf{\Gamma}_{ij}^k = \mathbf{\Gamma}_{ji}^k \tag{15.34}$$

per $i, j, k = 1 \dots n$.

Dimostrazione. L'equazione (15.34) è una conseguenza immediata di due fatti: (i) la connessione riemanniana ∇ ha torsione nulla (cioè, vale l'equazione (15.26)), e (ii) i commutatori dei campi di vettori coordinati sono tutti nulli. □

Vogliamo ora ricavare l'espressione classica delle $\mathbf{\Gamma}_{jk}^i$ in funzione delle g_{ij} e delle g^{ij}.

Lemma 15.3.5. *Le $\mathbf{\Gamma}_{jk}^i$ di una connessione riemanniana sono date da*

$$\mathbf{\Gamma}_{jk}^i = \sum_{h=1}^{n} \frac{g^{ih}}{2} \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h} \right). \tag{15.35}$$

Dimostrazione. Dal momento che i commutatori dei campi di vettori coordinati sono nulli, l'equazione (15.22) assume l'espressione

$$\begin{aligned}(15.36)\qquad \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h} \right\rangle &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h}\right\rangle \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_h}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_h}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle \Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h}\right).\end{aligned}$$

Segue dalla definizione di $\mathbf{\Gamma}^i_{jk}$ e dal Lemma 15.3.2 che

$$\begin{aligned}(15.37)\qquad \mathbf{\Gamma}^i_{jk} &= dx_i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, dx^*_i \right\rangle \\ &= \sum_{h=1}^{n} g^{ih}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_h}\right\rangle.\end{aligned}$$

La (15.35) segue allora dalla (15.36) e dalla (15.37). □

Vogliamo infine generalizzare la (15.33).

Lemma 15.3.6. *Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, e sia $(x_1 \dots x_n)$ un sistema di coordinate su una varietà riemanniana $\mathcal{M}$. Allora*

$$(15.38)\qquad \nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n}\left(XY[x_k] + \sum_{ij=1}^{n} X[x_i]Y[x_j]\mathbf{\Gamma}^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{\left(\sum X[x_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}\left(\sum Y[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{ij=1}^{n} X[x_i]\left(\frac{\partial}{\partial x_i}Y[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j} + Y[x_j]\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} XY[x_j]\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{ijk=1}^{n}\left(X[x_i]Y[x_j]\mathbf{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{ XY[x_k] + \sum_{ij=1}^{n} X[x_i]Y[x_j]\mathbf{\Gamma}^k_{ij}\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\end{aligned}$$

□

15.4 Esercizi

1. Si completi la dimostrazione del Lemma 15.1.3.

2. Si diano esempi di campi di vettori X, Y, Z su $\mathbb{R}$ tali che $Y_0 = Z_0$, ma $(D_X Y)_0 \neq (D_X Z)_0$.

3. Si dimostrino i Lemmi 15.2.2 e 15.2.3.

4. La **torsione** di una connessione D su una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ è definita da

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y].$$

   Si dimostri che T è un campo di tensori (una volta controvariante e due volte covariante) su $\mathcal{M}$ (cioè $T(fX, Y) = fT(X, Y) = T(X, fY)$, $\forall \in C^\infty(M)$) e che $T(Y, X) = -T(X, Y)$.

Capitolo 16

Superfici Astratte

Nella prima metà del XIX secolo ebbe inizio con Gauss una rivoluzione nella teoria delle superfici. Prima di Gauss, per teoria delle superfici si intendeva lo studio delle superfici nello spazio ordinario. L'osservazione di Gauss (Teorema 14.2.1) che la curvatura K di una superficie in $\mathbb{R}^3$ non dipende dal modo in cui la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$, spinse i matematici a chiedersi se sia veramente necessario che una superficie sia immersa in $\mathbb{R}^3$. Riemann[1] nella sua tesi [Riem] (scritta nel 1854 ma pubblicata solo nel 1867) considerò la metrica ds^2 in n dimensioni e diede una descrizione di come la curvatura di ds^2 può essere misurata. La nozione moderna di varietà differenziabile, introdotta da Weyl[2] (si veda [Weyl]), ha fatto la sua apparizione solo agli inizi del

[1]

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Malgrado la morte prematura e nonostante l'esiguo numero di articoli pubblicati, le idee di Bernhard Riemann hanno inciso profondamente sullo sviluppo della matematica e della fisica. In uno dei suoi primi articoli egli chiarì la nozione di integrale definendo quello che ora viene chiamato integrale di Riemann. L'Habilitationsvortrag di Riemann [Riem], **Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen**, divenne un classico della matematica, ed i risultati ivi contenuti vennero incorporati nella relatività generale di Einstein. L'ipotesi di Riemann, che riguarda gli zeri della funzione zeta di Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

ha enormi implicazioni in teoria dei numeri, ma non è stata ancora risolta.

[2]

Hermann Weyl (1885-1955). Weyl, insieme con É. Cartan, pose le basi della teoria moderna dei gruppi di Lie e delle loro rappresentazioni. Con la sua applicazione della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica egli fondò la teoria moderna di questa disciplina. Fu professore a Zurigo e a Göttingen. Poi, dal 1933 sino a quando andò in pensione, nel 1952, svolse la sua attività presso l'Institute of Advanced Study a Princeton.

ventesimo secolo. Osserviamo innanzitutto che:

Lemma 16.0.1. *Una superficie regolare $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile.*

Dimostrazione. Come atlante di $\mathcal{M}$ scegliamo quello costituito dalle carte locali regolari iniettive su $\mathcal{M}$. Il Corollario 6.4.2, a pagina 105, implica che ogni cambiamento di coordinate è differenziabile. Quindi $\mathcal{M}$ è una varietà differenziabile. □

Abbiamo già introdotto le metriche riemanniane nel Capitolo 15, quindi siamo in grado di considerare la geometria delle superfici senza il vincolo che le superfici siano immerse in $\mathbb{R}^3$ o anche in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 16.0.1. *Una* **superficie astratta** *è una varietà differenziabile bidimensionale munita di una metrica riemanniana o pseudo-riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$.*

Una metrica su una superficie astratta è una generalizzazione delle metriche indotte che abbiamo studiato nel Capitolo 8. Il Lemma 16.0.1 implica:

Lemma 16.0.2. *Una superficie regolare $\mathcal{M}$ munita della metrica indotta da quella di $\mathbb{R}^n$ è una superficie astratta.*

La nozione pregaussiana di curvatura di Gauss K è stata introdotta nel Capitolo 9. Dalla formula di Brioschi (14.7), a pagina 220, risulta che K dipende solo dalla metrica $\langle\ ,\ \rangle$. Possiamo dunque servirci della (14.7) per definire la curvatura di una superficie astratta.

Definizione 16.0.2. *La curvatura gaussiana K di una superficie astratta munita di una metrica riemanniana ds^2 è data dalla formula di Brioschi* (14.7)*.*

Ci sarà utile considerare il caso bidimensionale della teoria generale delle varietà pseudo-riemanniane che abbiamo sviluppato nel Capitolo 15. Il Paragrafo 16.1 è dedicato a chiarire nei dettagli l'esatta relazione tra le notazioni utilizzate nel Paragrafo 15.3 per le g_{ij} ed i simboli di Christoffel, e quelle dei Capitoli 9 e 14. Esempi di superfici astratte vengono dati nel Paragrafo 16.2.

16.1 Metriche su superfici astratte

Le definizioni di E, F e G che abbiamo dato a pagina 130 hanno senso anche per una superficie astratta. Basta utilizzare la metrica della superficie astratta al posto della metrica indotta. Incominciamo col precisare il legame tra le g_{ij} introdotte nel Paragrafo 15.3 ed i coefficienti della prima forma fondamentale E, F, G. Indicheremo le funzioni coordinate naturali di $\mathbb{R}^2$ o con $\{u, v\}$ oppure con $\{u_1, u_2\}$.

Lemma 16.1.1. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *una carta locale su una superficie astratta* $\mathcal{M}$ *munita di una metrica* ds^2*. Allora le quattro funzioni* g_{ij} *sono legate a* E*,* F *e* G *dalle formule*

$$\text{(16.1)} \qquad \begin{cases} g_{11}\circ\mathbf{x} &= E, & g_{12}\circ\mathbf{x} &= F,\\ g_{21}\circ\mathbf{x} &= F, & g_{22}\circ\mathbf{x} &= G. \end{cases}$$

Quindi l'immagine reciproca di ds^2 *tramite* $\mathbf{x}$ *è data da*

$$\mathbf{x}^*\big(ds^2\big) = \mathbf{x}^*\Big(g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2\Big) = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2.$$

Dimostrazione. Si ha

$$g_{ij}\circ\mathbf{x} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \circ \mathbf{x} = \left\langle \mathbf{x}_*\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right), \mathbf{x}_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) \right\rangle \circ \mathbf{x} = \left\langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j} \right\rangle.$$

In particolare, $g_{11}\circ\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_1}\rangle = E$. Le altre uguaglianze della (16.1) si dimostrano in modo simile. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*\Big(g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2\Big) \quad &= \\ &= (g_{11}\circ\mathbf{x})\mathbf{x}^*(dx_1)^2 + 2(g_{12}\circ\mathbf{x})\mathbf{x}^*(dx_1)\mathbf{x}^*(dx_2) + (g_{22}\circ\mathbf{x})\mathbf{x}^*(dx_2)^2\\ &= (g_{11}\circ\mathbf{x})\big(d(x_1\circ\mathbf{x})\big)^2 + 2(g_{12}\circ\mathbf{x})d(x_1\circ\mathbf{x})d(x_2\circ\mathbf{x}) + (g_{22}\circ\mathbf{x})\big(d(x_2\circ\mathbf{x})\big)^2\\ &= (g_{11}\circ\mathbf{x})du^2 + 2(g_{12}\circ\mathbf{x})dudv + (g_{22}\circ\mathbf{x})dv^2\\ &= E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2 \end{aligned}$$

□

Cerchiamo ora le relazioni tra le g^{ij} ed i coefficienti della metrica E, F, G.

Lemma 16.1.2. *Le* g^{ij} *di una metrica riemanniana* ds^2 *su una carta locale* $\mathbf{x}$ *di una superficie astratta* $\mathcal{M}$ *sono date da*

$$\text{(16.2)} \qquad \begin{cases} g^{11}\circ\mathbf{x} &= \dfrac{G}{E\,G - F^2}, & g^{12}\circ\mathbf{x} &= \dfrac{-F}{E\,G - F^2},\\ g^{21}\circ\mathbf{x} &= \dfrac{-F}{E\,G - F^2}, & g^{22}\circ\mathbf{x} &= \dfrac{E}{E\,G - F^2}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Come abbiamo osservato a pagina 153, si può verificare che

$$\text{(16.3)} \qquad \begin{pmatrix} E & F\\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{E\,G - F^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Pertanto la (16.2) discende immediatamente dalla (16.1) e dalla (16.3). □

Abbiamo già definito i simboli di Christoffel per una superficie in $\mathbb{R}^3$ tramite la (14.13), a pagina 225. Dal momento che la (14.13) definisce le Γ^i_{jk} in funzione solo di E, F, G e delle loro derivate, possiamo servirci delle stesse formule anche per una qualunque superficie astratta.

Definizione 16.1.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta con una metrica data localmente da*

$$\langle\ ,\ \rangle = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2.$$

Allora i **simboli di Christoffel** Γ^i_{jk} *di $\langle\ ,\ \rangle$ sono dati da*

$$\text{(16.4)}\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{G\,E_u - 2F\,F_u + F\,E_v}{2(E\,G - F^2)}, & \Gamma^2_{11} = \dfrac{2E\,F_u - E\,E_v - F\,E_u}{2(E\,G - F^2)}, \\ \Gamma^1_{12} = \dfrac{G\,E_v - F\,G_u}{2(E\,G - F^2)}, & \Gamma^2_{12} = \dfrac{E\,G_u - F\,E_v}{2(E\,G - F^2)}, \\ \Gamma^1_{22} = \dfrac{2G\,F_v - G\,G_u - F\,G_v}{2(E\,G - F^2)}, & \Gamma^2_{22} = \dfrac{E\,G_v - 2F\,F_v + F\,G_u}{2(E\,G - F^2)}, \end{cases}$$

con $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$, $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$.

Esiste uno stretto legame tra le Γ^i_{jk} della (16.4) e le $\mathbf{\Gamma}^i_{jk}$ date dalla (15.35), a pagina 248.

Lemma 16.1.3. *I simboli di Christoffel $\mathbf{\Gamma}^i_{jk}$ di una metrica ds^2 su una carta locale $\mathbf{x}$ di una superficie astratta $\mathcal{M}$ dati dalla* (15.35) *sono legati ai simboli di Christoffel Γ^i_{jk} dati dalla* (16.4) *tramite la formula*

$$\text{(16.5)}\qquad \mathbf{\Gamma}^i_{jk} \circ \mathbf{x} = \Gamma^i_{jk}$$

per $1 \le i, j, k \le 2$.

Dimostrazione. Mostriamo, ad esempio, che il simbolo $\mathbf{\Gamma}^1_{11} \circ \mathbf{x}$ dato dalla (15.35) coincide con Γ^1_{11} dato dalla (16.4). Calcoliamo, innanzi tutto,

$$\text{(16.6)}\qquad \mathbf{\Gamma}^1_{11} = \sum_{h=1}^{2} \frac{g^{1h}}{2}\left\{2\frac{\partial g_{h1}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_h}\right\} = \frac{g^{11}}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + g^{12}\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} - \frac{g^{12}}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}.$$

D'altra parte, la (16.1) implica che

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)[g_{11}] = \frac{\partial (g_{11} \circ \mathbf{x})}{\partial u} = E_u.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} \circ \mathbf{x} = F_u \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \circ \mathbf{x} = E_v.$$

Se sostituiamo queste espressioni e la (16.2) nella (16.6) si ottiene

$$\mathbf{\Gamma}^1_{11} \circ \mathbf{x} = \frac{G\,E_u - 2F\,F_u + F\,E_v}{2(E\,G - F^2)} = \Gamma^1_{11}$$

□

Isometrie di superfici astratte

Le isometrie e le isometrie locali tra superfici astratte si definiscono esattamente nello stesso modo in cui sono state definite le isometrie e le isometrie locali tra superfici in $\mathbb{R}^n$ nel Paragrafo 8.2 (pagina 134). I Lemmi 8.2.1—8.2.3, il Corollario 8.2.1 ed il Lemma 8.2.4 continuano a valere anche per le superfici astratte. In particolare un'isometria locale conserva E, F e G; questo significa che un'isometria locale conserva ogni funzione su una superficie che può essere espressa in funzione di E, F e G. Di conseguenza un'isometria locale conserva i simboli di Christoffel. Inoltre, il *Theorema Egregium* (il Teorema 14.2.1 di Gauss, a pagina 222) continua a valere per isometrie tra superfici astratte.

16.2 Esempi di superfici astratte

Ci sono molte metriche interessanti che non provengono dal prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$. Eccone alcune.

La metrica di Poincaré sul semipiano superiore

Siano (u, v) le usuali coordinate sul semipiano superiore

$$\mathbb{R}^{2+} = \big\{\, (p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q > 0 \,\big\}.$$

Sia $\lambda > 0$. La metrica di Poincaré[3] su $\mathbb{R}^{2+}$ è definita da

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\lambda^2 v^2}. \tag{16.7}$$

[3]

Jules Henri Poincaré (1854-1912). Matematico francese, universalmente riconosciuto come il più eminente matematico dei suoi tempi. Egli sviluppò il concetto di funzione automorfa ed inventò buona parte della topologia algebrica. Egli si occupò anche di geometria algebrica, di funzioni analitiche di più variabili complesse e di teoria dei numeri.

Una generalizzazione della metrica di Poincaré sul semipiano superiore

La metrica (16.7) può essere generalizzata ponendo

$$ds^2 = \frac{du^2}{\lambda^2 v^m} + \frac{dv^2}{\lambda^2 v^n}. \tag{16.8}$$

La metrica di Poincaré sul disco

Siano (u, v) le coordinate usuali sul disco $\mathcal{D}(\lambda)$ di raggio λ in $\mathbb{R}^2$ con centro nell'origine:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \left\{ (p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid p^2 + q^2 < \lambda^2 \right\}.$$

Sia $\lambda > 0$. La metrica di Poincaré su $\mathcal{D}(\lambda)$ è definita da

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\left(1 - \dfrac{\lambda^2(u^2 + v^2)}{4}\right)^2}.$$

Metrica polare geodetica

Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. La **metrica polare geodetica** relativa ad f è definita da

$$ds^2 = du^2 + f(u, v)^2 dv^2.$$

Per esempio, $du^2 + u^2 dv^2$ è l'usuale metrica piatta di $\mathbb{R}^2$ in coordinate polari.

Il toro piatto

Il toro è una superficie un po' complicata se considerata in $\mathbb{R}^3$. C'è comunque una versione molto più semplice del toro in $\mathbb{R}^4$. Definiamo una parametrizzazione $\mathbf{flattorus}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo

$$\mathbf{flattorus}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](u, v) = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v).$$

Allora $E = a^2$, $G = b^2$ e $F = 0$. Siccome E e G sono costanti, risulta immediatamente dal Corollario 14.1.1 che la curvatura gaussiana di $\mathbf{flattorus}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ è identicamente nulla. Per questo motivo $\mathbf{flattorus}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ è chiamato un **toro piatto**.

Osserviamo anche che $\mathbf{flattorus}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ può essere visto in modo naturale come una sottovarietà della sfera tridimensionale $S^3\big(\sqrt{a^2 + b^2}\big) \subset \mathbb{R}^4$ di raggio $\sqrt{a^2 + b^2}$ e centro nell'origine in $\mathbb{R}^4$.

Capitolo 17

Geodetiche su Superfici

In termini matematicamente poco rigorosi, una geodetica di una superficie è una curva della superficie che realizza la distanza più breve tra due suoi punti. Questa nozione ha senso non solo per le superfici in $\mathbb{R}^3$, ma anche per le superfici astratte e, più in generale, per le varietà riemanniane. Le geodetiche vennero studiate per la prima volta da Johann Bernoulli[1]. Il termine geodetica venne utilizzato per la prima volta da Liouville nel 1844.

Nel Paragrafo 17.1 ricaviamo le equazioni differenziali delle geodetiche. Le parametrizzazioni di Clairaut, per le quali le equazioni delle geodetiche sono parzialmente risolubili, vengono trattate nel Paragrafo 17.2, dove vengono anche dati diversi esempi. *L'applicazione esponenziale*, che applica in modo naturale uno spazio tangente ad una superficie sulla superficie, viene definita nel Paragrafo 17.3; essa viene poi utilizzata per dimostrare il Lemma 17.3.6, noto come *Lemma di Gauss*. La proprietà delle geodetiche di realizzare la minima distanza tra i punti viene analizzata nel Paragrafo 17.4, mentre nel Paragrafo 17.5 dimostriamo che una superficie astratta è uno *spazio metrico*.

[1]

Johann Bernoulli era fratello di Jacob e padre di Nicolaus , di Daniel e di Johann (II). Fu titolare della cattedra di matematica prima a Groningen dal 1695 al 1705, e poi a Basilea, dove succedette a suo fratello, dal 1705 al 1748. Nonostante fosse sottoposto alla tutela del suo fratello maggiore Jacob, Johann accese alcune controversie sia con lui che con Daniel. Tra le scoperte di Johann Bernoulli si annoverano il calcolo esponenziale, la trattazione della trigonometria come una branca dell'analisi, la determinazione di traiettorie ortogonali e la soluzione del problema della brachistocrona.

17.1 Le equazioni delle geodetiche

Per motivare la definizione di geodetica consideriamo innanzi tutto il caso di una superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva in $\mathcal{M}$. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$ è anche una curva in $\mathbb{R}^n$, esistono due possibili accelerazioni di $\boldsymbol{\alpha}$, cioè $\boldsymbol{\alpha}''$ e $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$, dove ∇ rappresenta la connessione riemanniana di $\mathcal{M}$ definita nel Paragrafo 15.1. Vediamo il legame che intercorre tra queste due accelerazioni.

Lemma 17.1.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie in $\mathbb{R}^n$, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva. Allora l'accelerazione $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ di $\boldsymbol{\alpha}$ nella superficie $\mathcal{M}$ è la componente tangenziale dell'accelerazione $\boldsymbol{\alpha}''$ di $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Siano X ed Y due campi di vettori tangenti a $\mathcal{M}$. Dalla (15.22), a pagina 244, segue che $\nabla_X Y$ è la componente tangenziale di $D_X Y$, dove D denota la connessione naturale di $\mathbb{R}^n$. In particolare, $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ è la componente tangenziale di $\boldsymbol{\alpha}'' = D_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ □

Per $n = 3$ questa relazione può essere messa in forma precisa.

Lemma 17.1.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie orientabile in $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{U}$ un campo di vettori unitario normale ad $\mathcal{M}$. Se $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ è una curva, allora*

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}' + (S(\boldsymbol{\alpha}') \cdot \boldsymbol{\alpha}')\mathbf{U}, \tag{17.1}$$

dove S denota l'operatore di forma su $\mathcal{M}$ definito da $\mathbf{U}$.

Dimostrazione. La decomposizione di $\boldsymbol{\alpha}''$ nella sua componente tangenziale e nella sua componente normale è

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}' + (\boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}.$$

Ma dal Lemma 17.1 e dal Lemma 9.1.3 a pagina 145 sappiamo che $\boldsymbol{\alpha}'' \cdot \mathbf{U} = S(\boldsymbol{\alpha}') \cdot \boldsymbol{\alpha}'$, da cui si ottiene la (14.21). □

Diamo innanzi tutto la definizione di geodetica di una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 17.1.1. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità unitaria. Si dice che $\boldsymbol{\alpha}$ è una* **geodetica** *di $\mathcal{M}$ se la componente tangenziale dell'accelerazione $\boldsymbol{\alpha}''$ è nulla.*

Quindi la definizione di geodetica è in un certo senso complementare della definizione di curva asintotica. (Ricordiamo che $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ è una curva asintotica se la componente normale di $\boldsymbol{\alpha}''$ è nulla.) È chiaro che una curva in $\mathcal{M}$ è simultaneamente una geodetica e una curva asintotica se e solo se essa è una retta in $\mathbb{R}^3$. Vale inoltre il seguente lemma.

Lemma 17.1.3. *Ogni retta in $\mathbb{R}^3$ contenuta in una superficie $\mathcal{M}$ è una geodetica di $\mathcal{M}$.*

Vogliamo ora ricavare le equazioni differenziali alle quali localmente ogni geodetica di una superficie in $\mathbb{R}^3$ deve soddisfare.

Lemma 17.1.4. *Sia $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione regolare, dove $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Allora le geodetiche di $\mathcal{M}$ sono determinate dalle due equazioni differenziali del second'ordine seguenti*:

$$\text{(17.2)} \qquad \begin{cases} u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2 &= 0, \end{cases}$$

dove le funzioni Γ^i_{jk} sono i simboli di Christoffel di $\mathbf{x}$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva su $\mathcal{M}$. Allora possiamo scrivere

$$\text{(17.3)} \qquad \boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big),$$

dove $u, v\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. Derivando due volte la (17.3) ed utilizzando la regola della catena si ottiene

$$\text{(17.4)} \qquad \boldsymbol{\alpha}'' = \mathbf{x}_{uu}u'^2 + \mathbf{x}_u u'' + 2\mathbf{x}_{uv}u'v' + \mathbf{x}_{vv}v'^2 + \mathbf{x}_v v''.$$

Dalla (14.14) a pagina 225 e dalla (17.4) risulta

$$\text{(17.5)} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}''(t) \;=\; & \big(u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2\big)\,\mathbf{x}_u \\ & + \big(v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2\big)\,\mathbf{x}_v \\ & + \big(e\,u'^2 + 2f\,u'v' + g\,v'^2\big)\,\mathbf{U}, \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

è il campo di vettori unitario normale a $\mathcal{M}$. Affinché $\boldsymbol{\alpha}$ sia una geodetica le componenti di $\boldsymbol{\alpha}''$ rispetto ad $\mathbf{x}_u$ e ad $\mathbf{x}_v$ nella (17.5) devono essere entrambe nulle. Si ottengono così le (17.2). □

Per introdurre la nozione di geodetica di una superficie astratta, ricordiamo che le definizioni (14.13) dei simboli di Christoffel hanno senso anche su una superficie astratta $\mathcal{M}$, in quanto ogni simbolo di Christoffel si esprime mediante i coefficienti della prima forma fondamentale di $\mathcal{M}$.

Definizione 17.1.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta, e sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva in $\mathcal{M}$. Si dice che $\boldsymbol{\alpha}$ è una* **geodetica** *se $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}' = 0$, dove ∇ rappresenta la connessione riemanniana di $\mathcal{M}$.*

Ecco una proprietà semplice ma molto utile delle geodetiche.

Lemma 17.1.5. *Una geodetica $\boldsymbol{\alpha}$ su una superficie astratta $\mathcal{M}$ ha velocità costante.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\alpha}'\|^2 = 2\left\langle \nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}' \right\rangle = 0$$

□

Vogliamo ora far vedere che le equazioni differenziali delle geodetiche di una superficie astratta coincidono con quelle delle geodetiche di una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Lemma 17.1.6. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta, e sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ una parametrizzazione regolare di $\mathcal{M}$. Allora le geodetiche di $\mathcal{M}$ sono le soluzioni delle due equazioni differenziali del second'ordine* (17.2)*, dove le Γ^i_{jk} sono i simboli di Christoffel di $\mathbf{x}$.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva la cui traccia è contenuta in $\mathbf{x}(\mathcal{U})$, e sia $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un campo di vettori tale che $X_{\alpha(t)} = \boldsymbol{\alpha}'(t)$ per $a < t < b$. Se poniamo $\mathbf{x}^{-1} = (x_1, x_2)$, allora $x_1 = u \circ \mathbf{x}^{-1}$ e $x_2 = v \circ \mathbf{x}^{-1}$, dove u e v sono le funzioni coordinate naturali di $\mathbb{R}^2$. Inoltre si ha $x_1 \circ \boldsymbol{\alpha} = u$ e $x_2 \circ \boldsymbol{\alpha} = v$, e quindi

$$X[x_1]\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) = X_{\alpha(t)}[x_1] = \boldsymbol{\alpha}'(t)[x_1] = (x_1 \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) = u'(t). \tag{17.6}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} X^2[x_1]\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) &= X_{\alpha(t)}[X[x_1]] = \boldsymbol{\alpha}'(t)[X[x_1]] \\ &= \big(X[x_1] \circ \boldsymbol{\alpha}\big)'(t) = (x_1 \circ \boldsymbol{\alpha})''(t) = u''(t). \end{aligned} \tag{17.7}$$

Equazioni analoghe valgono per $X[x_2]\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)$ e per $X^2[x_2]\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)$. Dalle uguaglianze $X_* \frac{\partial}{\partial x_1} + X_u$ e $X_* \frac{\partial}{\partial x_2} + X_v$ risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \mathbf{x}_v \circ \mathbf{x}^{-1}. \tag{17.8}$$

Come caso particolare della (15.38), a pagina 249, si ha

$$\nabla_X X = \sum_{k=1}^{2} \left\{ X^2[x_k] + \sum_{ij=1}^{2} X[x_i] X[x_j] \boldsymbol{\Gamma}^k_{ij} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{17.9}$$

Dalle (17.6)—(17.9) si ottiene

$$(17.10)\quad \big(\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'\big)(t) = \big(\nabla_X X\big)\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)$$
$$= \big(u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2\big)\,\mathbf{x}_u + \big(v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2\big)\,\mathbf{x}_v.$$

Pertanto l'annullarsi di $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ è equivalente alla (17.2). □

Possiamo ora ricavare un'altra importante proprietà delle geodetiche.

Corollario 17.1.1. *Le isometrie e le isometrie locali conservano le geodetiche.*

Dimostrazione. Potendosi i simboli di Christoffel esprimere in funzione di E, F e G, ed essendo il Corollario 8.2.1 vero per le superfici astratte (si veda a pagina 255), le isometrie locali conservano le equazioni delle geodetiche (17.2). □

Facciamo ora vedere che da ogni punto di una superficie astratta esce una geodetica in ogni direzione. Più precisamente:

Teorema 17.1.1. *Siano* $\mathbf{p}$ *un punto su una superficie astratta* $\mathcal{M}$ *e* $\mathbf{v_p}$ *un vettore tangente ad* $\mathcal{M}$ *in* $\mathbf{p}$*. Allora esiste una geodetica* $\boldsymbol{\gamma}$ *parametrizzata su qualche intervallo contenente* 0 *tale che* $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{p}$ *e* $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \mathbf{v_p}$*. Inoltre, due arbitrarie geodetiche con queste condizioni iniziali coincidono su ogni intervallo contenente* 0 *in cui esse siano definite.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ una parametrizzazione regolare con $\mathbf{x}(0,0) = \mathbf{p}$. Allora la (17.2) è il sistema delle equazioni differenziali che dà le geodetiche sulla traccia di $\mathbf{x}$. Poniamo $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big)$ e $\mathbf{v_p} = (v_1, v_2)$. Le condizioni iniziali di $\boldsymbol{\gamma}$ divengono

$$(17.11)\qquad \begin{cases} u(0) = 0, \\ v(0) = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u'(0) = v_1, \\ v'(0) = v_2. \end{cases}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie sappiamo che il sistema (17.2) insieme con le quattro condizioni iniziali (17.11) ha un'unica soluzione in qualche intervallo contenente 0. Si ha quindi il teorema. □

Il Teorema 17.1.1 non dice niente sull'ampiezza dell'intervallo su cui la geodetica soddisfacente alle condizioni iniziali date è definita. Siano $\boldsymbol{\gamma}_1$ e $\boldsymbol{\gamma}_2$ due geodetiche soddisfacenti alle stesse condizioni iniziali. Dal momento che le due geodetiche devono coincidere su qualche intervallo, è chiaro che esiste una geodetica $\boldsymbol{\gamma}_3$ il cui dominio di definizione contiene sia quello di $\boldsymbol{\gamma}_1$ che quello di $\boldsymbol{\gamma}_2$ e che coincide sin dove è possibile

con le due geodetiche. Ne risulta l'esistenza di un'unica **geodetica massimale**. Il dominio di una geodetica massimale non sempre è costituito dall'intera retta reale, perciò diamo la seguente definizione.

Definizione 17.1.3. *Una superficie astratta $\mathcal{M}$ è* **geodeticamente completa** *se ogni geodetica massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$.*

È ovvio che una curva costante sia una geodetica massimale. A parte questo caso, è chiaro che la completezza geodetica significa che ogni geodetica massimale si estende indefinitamente in entrambe le direzioni. È facile verificare che le sfere ed i piani sono superfici geodeticamente complete. Più in generale, ogni superficie compatta è geodeticamente completa. Un famoso teorema di Hopf e Rinow, che vedremo nel Paragrafo 17.5, afferma che ogni varietà riemanniana è geodeticamente completa se e solo se essa è completa come spazio metrico.

È facile trovare esempi di superfici geodeticamente incomplete. Per esempio, $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ non può essere geodeticamente completo, in quanto la geodetica $t \longmapsto (t,0)$ non può essere estesa ad un'applicazione dell'intera retta reale in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Un esempio più complicato di superficie geodeticamente incompleta è la pseudosfera.

È importante distinguere una geodetica dalla sua traccia, in quanto non ogni riparametrizzazione di una geodetica ha velocità costante. Introduciamo quindi la seguente:

Definizione 17.1.4. *Si dice che una curva $\boldsymbol{\alpha}$ di una superficie astratta $\mathcal{M}$ è una* **pregeodetica** *se esiste una riparametrizzazione $\boldsymbol{\alpha} \circ h$ di $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto alla quale $\boldsymbol{\alpha} \circ h$ sia una geodetica.*

Ecco alcune proprietà caratteristiche delle pregeodetiche. Si veda anche l'esercizio 1.

Lemma 17.1.7. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva regolare. Allora $\boldsymbol{\alpha}$ è una pregeodetica se e solo se esiste una funzione $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\big(\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'\big)(t) = f(t)\boldsymbol{\alpha}'(t)$$

per ogni $a < t < b$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ h$ sia una geodetica. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $\boldsymbol{\beta}'$ non sia mai nulla. Allora $\boldsymbol{\beta}' = h'\boldsymbol{\alpha}' \circ h$, e quindi h' è sempre diversa da zero. Inoltre, dalla (15.14) segue

$$0 = \nabla_{\beta'}\boldsymbol{\beta}' = h'^2\big(\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'\big) \circ h + h''\boldsymbol{\alpha}' \circ h,$$

che implica

$$\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}' = -\left(\frac{h''}{h'^2}\circ h^{-1}\right)\boldsymbol{\alpha}'.$$

Reciprocamente, supponiamo che $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}' = f\boldsymbol{\alpha}'$, e sia h una soluzione non nulla dell'equazione differenziale

$$h'' + h'^2 f\circ h = 0.$$

Poniamo $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\circ h$. Allora

$$\nabla_{\beta'}\boldsymbol{\beta}' = h'^2\big(\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'\big)\circ h + h''\boldsymbol{\alpha}'\circ h = \big((f\circ h)h'^2 + h''\big)\boldsymbol{\alpha}'\circ h = 0$$

□

Prima di andare avanti con la teoria generale, vogliamo trovare delle geodetiche in tre casi importanti.

I meridiani su una superficie di rotazione

La ricerca di *tutte* le geodetiche su una generica superficie di rotazione è un problema complicato. Tuttavia possiamo trovarne alcune senza effettuare calcoli.

Teorema 17.1.2. *Ogni meridiano di una superficie di rotazione $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^3$ può essere parametrizzato in modo che sia una geodetica.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\beta}$ una parametrizzazione unitaria di un meridiano di $\mathcal{M}$, e sia $\boldsymbol{\Pi}$ un piano passante per $\boldsymbol{\beta}$ e per l'asse di rotazione. Dal momento che $\boldsymbol{\beta}$ è curva piana in $\boldsymbol{\Pi}$, il campo normale unitario $\mathbf{N} = J\boldsymbol{\beta}'$ giace anch'esso in $\boldsymbol{\Pi}$. Il Teorema 12.5.1, a pagina 204, comporta che il piano $\boldsymbol{\Pi}$ intersechi $\mathcal{M}$ perpendicolarmente, per cui $\mathbf{N}$ è anch'esso perpendicolare ad $\mathcal{M}$. Ma allora $\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\kappa}\mathbf{2N}$ è perpendicolare ad $\mathcal{M}$. Quindi per definizione $\boldsymbol{\beta}$ è una geodetica. □

Geodetiche su una sfera

Prima di tutto, dimostriamo un risultato generale che mette in relazione l'operatore di forma di una superficie in $\mathbb{R}^3$ con il riferimento di Frenet di una curva sulla superficie.

Lemma 17.1.8. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie orientabile in $\mathbb{R}^3$, e sia $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b)\longrightarrow\mathcal{M}$ una geodetica con velocità unitaria e con curvatura non nulla. Denotiamo con $\{\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}\}$ il campo dei riferimenti di Frenet di $\boldsymbol{\alpha}$ e con $\boldsymbol{\kappa}$ e $\boldsymbol{\tau}$ la curvatura e la torsione di $\boldsymbol{\alpha}$. Allora è possibile scegliere un campo di vettori $\mathbf{U}$ unitario e normale a $\mathcal{M}$ tale che*

$$S(\mathbf{T}) = \boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{T} - \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{B}, \tag{17.12}$$

dove S è l'operatore di forma di $\mathcal{M}$ rispetto ad $\mathbf{U}$.

Dimostrazione. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$ ha curvatura diversa da zero, il campo di vettori $\mathbf{N}$ è definito su tutto (a, b). L'ipotesi che $\boldsymbol{\alpha}$ sia una geodetica implica che $\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}''/\boldsymbol{\kappa}\mathbf{2}$ sia ovunque perpendicolare ad $\mathcal{M}$. Di conseguenza è possibile scegliere $\mathbf{U}$ in modo che

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{U}\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big)$$

per $a < t < b$. Dalla definizione dell'operatore di forma e dalle formule di Frenet (3.10), a pagina 45, si ha

$$S(\mathbf{T}) = -\frac{d}{dt}\mathbf{U}\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) = -\mathbf{N}' = \boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{T} - \boldsymbol{\tau}\,\mathbf{B}$$

□

Ci serviamo ora del Lemma 17.1.8 per determinare le geodetiche di una sfera.

Lemma 17.1.9. *Le geodetiche su una sfera di raggio $c > 0$ sono archi di circonferenze massime.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\beta}$ una geodetica su una sfera di raggio c in $\mathbb{R}^3$. Per la parte (i) del Teorema 4.2.1 a pagina 59, la curvatura di $\boldsymbol{\beta}$ è diversa da zero, per cui il riferimento di Frenet $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ di $\boldsymbol{\beta}$ è ben definito. Dal momento che le curvature principali di una sfera sono costanti e uguali in ogni punto (cioè ogni punto di una sfera è un punto ombelicale), l'operatore di forma della sfera soddisfa (con un'opportuna scelta del campo normale unitario) alla condizione

$$S(\mathbf{T}) = \frac{1}{c}\mathbf{T}. \tag{17.13}$$

Segue dalla (17.12) e dalla (17.13) che la curvatura di $\boldsymbol{\beta}$ è costante ed uguale a $1/c$, e che la torsione si annulla. Inoltre, il punto (vi) del Teorema 4.2.1 implica che $\boldsymbol{\beta}$ sia parte di una circonferenza. Dal momento che il raggio della circonferenza è il più grande possibile, $\boldsymbol{\beta}$ deve essere parte di una circonferenza massima. □

Geodetiche su un cilindro generalizzato

Le geodetiche su un cilindro generalizzato (si veda a pagina 187) sono caratterizzate dal seguente teorema.

Teorema 17.1.3. *Sia $\mathcal{M}$ il cilindro generalizzato la cui curva base $\boldsymbol{\alpha}$ è una curva piana perpendicolare alle generatrici di $\mathcal{M}$, e denotiamo con $\mathbf{u}$ un vettore unitario tangente ad $\mathcal{M}$ e perpendicolare ad $\boldsymbol{\alpha}$, per cui $\mathcal{M}$ è parametrizzata da*

$$\mathbf{x}(u, v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\,\mathbf{u}.$$

Allora le geodetiche di $\mathcal{M}$ sono precisamente quelle curve con velocità costante su $\mathcal{M}$ che hanno inclinazione costante rispetto ad $\mathbf{u}$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva sul cilindro generalizzato; possiamo porre

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\alpha}\big(u(t)\big) + v(t)\mathbf{u}. \tag{17.14}$$

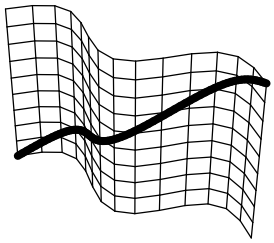
per certe funzioni $t \longmapsto u(t)$ e $t \longmapsto v(t)$. Allora

$$\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\alpha}'u' + v'\mathbf{u} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\gamma}'' = \boldsymbol{\alpha}''u'^2 + \boldsymbol{\alpha}'u'' + v''\mathbf{u}. \tag{17.15}$$

Ora supponiamo che $\boldsymbol{\gamma}$ sia una geodetica. Dal momento che ogni vettore normale ad $\mathcal{M}$ è sempre perpendicolare ad $\mathbf{u}$, segue dalla seconda delle equazioni (17.15) che $v'' = 0$, per cui v' è costante. Perciò $\boldsymbol{\gamma}$ forma un angolo costante con $\mathbf{u}$, e pertanto $\boldsymbol{\gamma}$ deve avere inclinazione costante (si veda il Paragrafo 4.3).

Reciprocamente, sia $\boldsymbol{\gamma}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ una curva con velocità costante che ha inclinazione costante rispetto ad $\mathbf{u}$. Allora vale la (17.14), e quindi $\boldsymbol{\alpha} \circ u$ è la proiezione di $\boldsymbol{\gamma}$ sul piano perpendicolare ad $\mathbf{u}$. Allora v' è costante, per cui $\boldsymbol{\gamma}''$ è perpendicolare ad $\mathbf{u}$. Inoltre, dalla (17.14) segue che $\boldsymbol{\gamma}'' = (\boldsymbol{\alpha} \circ u)''$. Inoltre, il Lemma 4.3.5, a pagina 63, implica che $\boldsymbol{\alpha} \circ u$ abbia velocità costante. Quindi $\boldsymbol{\gamma}''$ è perpendicolare sia a $\mathbf{x}_u = \boldsymbol{\alpha}'$ che a $\mathbf{u} = \mathbf{x}_v$, ciò che dimostra che $\boldsymbol{\gamma}$ è una geodetica. □

Per esempio, le geodetiche di un cilindro circolare o ellittico sono circonferenza, rette o eliche. Ecco un esempio più generale.



Geodetica sul cilindro generalizzato
$(u,v) \longmapsto \big(u, \sin u, v\big)$

17.2 Parametrizzazioni di Clairaut

In generale le equazioni delle geodetiche (17.2) sono difficili da risolvere esplicitamente. Esiste però un caso importante in cui la determinazione delle loro soluzioni si riduce al calcolo di integrali.

Definizione 17.2.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta con una metrica*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

(i) *Una* **u-parametrizzazione di Clairaut** *su $\mathcal{M}$ è una parametrizzazione $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ per la quale*

$$E_v = G_v = F = 0.$$

(ii) *Una* **v-parametrizzazione di Clairaut** *su $\mathcal{M}$ è una parametrizzazione $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ per la quale*

$$E_u = G_u = F = 0.$$

Svilupperemo le nostre considerazioni solo per le v-parametrizzazioni di Clairaut, lasciando al lettore la verifica dei risultati corrispondenti alle u-parametrizzazioni di Clairaut. Si vede facilmente che l'applicazione identità sul semipiano superiore con la metrica di Poincaré (16.7) è un esempio di v-parametrizzazione di Clairaut; vedremo tra poco altri esempi. I simboli di Christoffel di una v-parametrizzazione di Clairaut sono notevolmente più semplici rispetto a quelli di una parametrizzazione generica. Il lemma seguente è un'immediata conseguenza della definizione (16.4) dei simboli di Christoffel di una superficie astratta.

Lemma 17.2.1. *Per una v-parametrizzazione di Clairaut con $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$ si ha*

$$\text{(17.16)} \qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = 0, & \Gamma^2_{11} = \dfrac{-E_v}{2G}, \\ \Gamma^1_{12} = \dfrac{E_v}{2E}, & \Gamma^2_{12} = 0, \\ \Gamma^1_{22} = 0, & \Gamma^2_{22} = \dfrac{G_v}{2G}, \end{cases}$$

per cui le equazioni delle geodetiche (17.2) *divengono*

$$\text{(17.17)} \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{E_v}{E}u'v' &= 0, \\ v'' - \dfrac{E_v}{2G}u'^2 + \dfrac{G_v}{2G}v'^2 &= 0. \end{cases}$$

Alcune delle geodetiche di una parametrizzazione di Clairaut sono facili da determinare.

Lemma 17.2.2. *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *una v-parametrizzazione di Clairaut. Allora*:

(i) *ogni curva v-parametrica è una pregeodetica*;

(ii) *una curva u-parametrica* $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v_0)$ *è una geodetica se e solo se* $E_v(u, v_0)$ *si annulla lungo* $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v_0)$.

Dimostrazione. Per dimostrare la (i) è sufficiente, per il Lemma 17.1.7, far vedere che $\nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v$ è proporzionale a $\mathbf{x}_v$ lungo $v \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$. Dal momento che $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ sono ortogonali, $\nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v$ sarà proporzionale a $\mathbf{x}_v$ se $\langle \nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle = 0$. Ma, in generale,

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle_v - \langle \nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u = 0.$$

In particolare, $\langle \nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle$ si annulla lungo $v \longmapsto \mathbf{x}(u, v)$.

Per dimostrare la (ii), osserviamo innanzi tutto che se $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v_0)$ è una geodetica, allora

$$E_v(u, v_0) = 2\left\langle \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\right\rangle(u, v_0) = 2F_u(u, v_0) - 2\left\langle \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\right\rangle(u, v_0) = 0.$$

Reciprocamente, se $E_v(u, v_0) = 0$, allora

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle_u - \langle \mathbf{x}_u, \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v = -\frac{1}{2}E_v,$$

per cui

$$\left\langle \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\right\rangle(u, v_0) = -\frac{1}{2}E_v(u, v_0) = 0.$$

Ma si ha anche,

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle = \frac{1}{2}E_u = 0,$$

e quindi $u \longmapsto \mathbf{x}(u, v_0)$ è una geodetica. □

Torniamo ora al problema della ricerca di altre geodetiche su una parametrizzazione di Clairaut. Il risultato-chiave che ci serve è:

Teorema 17.2.1. (Relazione di Clairaut) *Sia* $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ *una v-parametrizzazione di Clairaut, e sia* $\boldsymbol{\beta}$ *una geodetica la cui traccia è contenuta in* $\mathbf{x}(\mathcal{U})$. *Sia* $\boldsymbol{\theta}$ *l'angolo tra* $\boldsymbol{\beta}$ *e* $\mathbf{x}_u$. *Allora*

$$\sqrt{E}\,\|\boldsymbol{\beta}'\|\cos\boldsymbol{\theta} = E\,u' \quad \text{è costante lungo } \boldsymbol{\beta}. \tag{17.18}$$

Dimostrazione. Poniamo $\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big)$. Dall'ipotesi che $E_u = 0$ e dalla prima equazione della (17.17) segue che

$$(E\,u')' = E'u' + E\,u'' = E_v v'u' + E\,u'' = 0.$$

Quindi esiste una costante c tale che

$$E\,u' = c. \tag{17.19}$$

Inoltre,

$$\|\boldsymbol{\beta}'\| \cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \boldsymbol{\beta}' \rangle}{\|\mathbf{x}_u\|} = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle}{\|\mathbf{x}_u\|} = \|\mathbf{x}_u\| u' = \sqrt{E}\,u'. \tag{17.20}$$

Allora la (17.18) risulta dalla (17.19) e dalla (17.20). □

Definizione 17.2.2. *La costante c data dalla* (17.19) *viene detta* **l'inclinazione** *della geodetica $\boldsymbol{\beta}$ nella v-parametrizzazione di Clairaut $\mathbf{x}$. Allora l'angolo tra $\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{x}_u$ è dato da*

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{c}{\|\boldsymbol{\beta}'\|\sqrt{E}}.$$

Vogliamo ora ottenere delle informazioni sull'andamento delle geodetiche di una parametrizzazione di Clairaut diverse da quelle contemplate nel Lemma 17.2.2.

Lemma 17.2.3. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ una v-parametrizzazione di Clairaut, e sia $\boldsymbol{\beta}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una curva con velocità unitaria la cui traccia è contenuta in $\mathbf{x}(\mathcal{U})$. Poniamo $\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big)$. Se $\boldsymbol{\beta}$ è una geodetica, allora esiste una costante c tale che*

$$\begin{cases} u' &= \dfrac{c}{E}, \\ v' &= \pm\dfrac{\sqrt{E - c^2}}{\sqrt{E\,G}}. \end{cases} \tag{17.21}$$

Reciprocamente, se la (17.21) *è verificata, e se $v'(t) \neq 0$ per $a < t < b$, oppure se $v'(t) = 0$ per $a < t < b$, allora $\boldsymbol{\beta}$ è una geodetica.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\boldsymbol{\beta}$ sia una geodetica con velocità unitaria. La prima equazione nella (17.21) risulta dalla (17.19). Inoltre,

$$1 = \big\langle \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}' \big\rangle = E\,u'^2 + G\,v'^2 = \frac{c^2}{E} + G\,v'^2, \quad \text{per cui} \quad v'^2 = \frac{1}{G}\left(1 - \frac{c^2}{E}\right) = \frac{E - c^2}{E\,G}.$$

Perciò la seconda equazione nella (17.21) è anch'essa soddisfatta.

Reciprocamente, supponiamo che valga la (17.21). La prima equazione nella (17.21) implica che

$$u'' = \Big(\frac{c}{E}\Big)' = -\frac{c\,E_v v'}{E^2} = -\frac{E_v u' v'}{E}.$$

Si vede allora che la prima equazione della (17.17) è soddisfatta. Inoltre $\boldsymbol{\beta}$ ha velocità unitaria, essendo

$$\begin{aligned}\big\langle \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}' \big\rangle &= \big\langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \big\rangle \\ &= E\,u'^2 + G\,v'^2 = E\Big(\frac{c}{E}\Big)^2 + G\Big(\frac{E-c^2}{E\,G}\Big) = 1.\end{aligned}$$

Se poi deriviamo $G\,v'^2 = 1 - E\,u'^2$, otteniamo

$$\begin{aligned}G_v v'^3 + 2G\,v'' v' &= (G\,v'^2)' = -E_v v' u'^2 - 2E\,u' u'' \\ &= -E_v v' u'^2 + 2E\,u'\Big(\frac{E_v}{E} u' v'\Big) = E_v v' u'^2.\end{aligned} \tag{17.22}$$

Allora la (17.22) implica che la seconda equazione della (17.17) sia soddisfatta su ogni intervallo sul quale v' non si annulla. D'altra parte, su un intervallo dove v' si annulla identicamente, la seconda equazione della (17.21) implica che E sia costante. E la seconda equazione della (17.17) è ancora soddisfatta. □

Corollario 17.2.1. *Sia $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ una v-parametrizzazione di Clairaut. Allora una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ della forma*

$$\boldsymbol{\alpha}(u) = \mathbf{x}\big(u(v), u\big)$$

è una pregeodetica se e solo se esiste una costante c tale che

$$\frac{du}{dv} = \pm c\sqrt{\frac{G}{E(E-c^2)}}\,. \tag{17.23}$$

In tal caso c è l'inclinazione di $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto ad $\mathbf{x}$.

Dimostrazione. Esiste una geodetica $\boldsymbol{\beta}$ con velocità unitaria che riparametrizza $\boldsymbol{\alpha}$ in modo che

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\beta}\big(u(s)\big) = \mathbf{x}\big(u(v(s)), v(s)\big).$$

Allora il Lemma 17.2.3 implica che

$$\frac{du}{ds} = u' = \frac{c}{E} \qquad \text{e} \qquad \frac{dv}{ds} = \pm\frac{\sqrt{E-c^2}}{\sqrt{E\,G}}.$$

Quindi

$$\frac{du}{dv} = \frac{\dfrac{du}{ds}}{\dfrac{dv}{ds}} = \frac{\dfrac{c}{E}}{\pm\dfrac{\sqrt{E-c^2}}{\sqrt{E\,G}}} = \pm c\sqrt{\frac{G}{E(E-c^2)}}.$$

Reciprocamente, se la (17.23) è verificata, definiamo u' e v' mediante

$$\frac{u'}{v'} = \pm c\sqrt{\frac{G}{E(E-c^2)}} \qquad \text{e} \qquad E\,u'^2 + G\,v'^2 = 1.$$

Un facile calcolo mostra allora che la (17.21) è soddisfatta, e quindi otteniamo una pregeodetica. □

Consideriamo ora alcuni esempi di parametrizzazione di Clairaut e cerchiamo le loro geodetiche.

Il piano euclideo in coordinate polari

La parametrizzazione del piano in coordinate polari è

$$\mathbf{polarplane}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 0).$$

Con un semplice calcolo si trova

$$E = v^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$

e quindi **polarplane** è una parametrizzazione di Clairaut. L'equazione (17.23) diviene

$$\frac{dv}{du} = \frac{\pm v\sqrt{v^2-c^2}}{c} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad \frac{c\,dv}{v\sqrt{v^2-c^2}} = \pm du.$$

Per integrare questa equazione con *Mathematica* ci si serve del comando

```
Integrate[c/(v Sqrt[v^2 - c^2]),v]//Simplify
```

Quindi

$$-\frac{1}{c}\arcsin\Big(\frac{c}{v}\Big) = \frac{\pm 1}{c}(u-u_0), \qquad \text{o} \qquad c = \pm v\sin(u-u_0),$$

che è l'equazione di una retta in coordinate polari.

La ricerca delle geodetiche del piano facendo uso delle coordinate cartesiane è più facile; si veda l'esercizio 2.

Il semipiano superiore di Poincaré

Per il semipiano superiore con la metrica di Poincaré si ottiene

$$E = G = \frac{1}{\lambda^2 v^2}, \qquad F = 0.$$

Di conseguenza l'applicazione identità è una parametrizzazione di Clairaut e l'equazione (17.23) diviene, in questo caso,

$$\frac{dv}{du} = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2 v^2} - c^2}}{c} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{c^2 dv}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2 v^2} - c^2}} = \pm c\, du.$$

Con *Mathematica* questa equazione si integra utilizzando il comando

```
Integrate[c^2/Sqrt[1/(lambda^2 v^2) - c^2],v]//Simplify
```

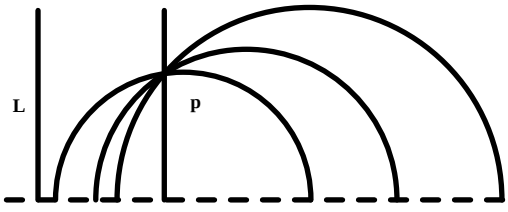
Pertanto,

$$-v\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 v^2} - c^2} = \pm c(u - u_0),$$

o, equivalentemente,

$$v^2 + (u - u_0)^2 = \frac{1}{c^2 \lambda^2}.$$

Quindi le geodetiche del semipiano superiore di Poincaré sono rette euclidee verticali (corrispondenti a $c = 0$) oppure semicirconferenze euclidee con centro sull'asse delle ascisse.



Geodetiche nel semipiano superiore di Poincaré

Le geodetiche hanno su una generica superficie un ruolo analogo a quello che hanno le rette nel piano. Il famoso postulato delle parallele di Euclide è equivalente all'

> **Assioma di Playfair**[2]: Dati nel piano una retta e un punto non su di essa, per questo punto è possibile tracciare nel piano un'unica retta parallela alla retta data.

[2] John Playfair (1748-1819). Matematico scozzese.

Questo assioma evidentemente non vale per il semipiano superiore di Poincaré; nella figura precedente ci sono infinite geodetiche per il punto **p** che non intersecano la retta **L**. Molti matematici ebbero dubbi sul postulato delle parallele, ma furono Gauss, Lobachevsky[3] e Bolyai[4] che per primi osservarono che il postulato delle parallele è indipendente dagli altri postulati di Euclide, e che si hanno nuove geometrie quando il postulato delle parallele viene sostituito dall'

> **Assioma iperbolico**: Dati nel piano una retta ed un punto fuori di essa, è possibile tracciare per il punto più di una retta parallela alla retta data,

oppure dall'

> **Assioma ellittico**: Dati nel piano una retta ed un punto fuori di essa, non esistono rette parallele alla retta data.

Trascorsero quasi 40 anni prima che dei modelli concreti di geometrie non euclidee venissero presentati da Beltrami, Klein e Poincaré. In [Beltr] Beltrami mostrò tramite modelli che una geometria ellittica o ipebolica è consistente, a condizione che sia consistente la geometria euclidea. Per ulteriori dettagli si veda [McCl].

Superfici di rotazione

La parametrizzazione naturale di una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\big).$$

Dal momento che

$$E = \varphi(v)^2, \qquad F = 0, \qquad \text{e} \qquad G = \varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2,$$

si vede subito che $E_u = G_u = F = 0$; quindi $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale di Clairaut, e l'equazione delle geodetiche è

$$\frac{dv}{du} = \pm\frac{|\varphi|\sqrt{\varphi^2 - c^2}}{c\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

[3] Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856). Matematico russo, rettore dell'Università di Kazan. Le sue ricerche sulla geometria non euclidea, pubblicate nel 1829, furono le prime sull'argomento ad essere stampate.

[4] János Bolyai (1802-1860). Matematico ungherese. Figlio di Farkas Wolfgang Bolyai. János Bolyai pubblicò i risultati da lui ottenuti in geometria non euclidea come appendice al libro di suo padre **Tentamen**.

Teorema 17.2.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$. Allora*:

(i) *ogni meridiano di $\mathcal{M}$ è una geodetica*;

(ii) *un parallelo è una geodetica se e solo se $\varphi'(v_0) = 0$.*

Geodetiche su una pseudosfera

Innanzi tutto osserviamo che:

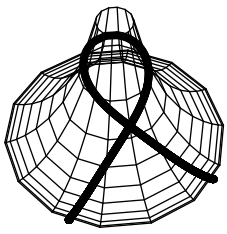
Teorema 17.2.3. *Una pseudosfera in $\mathbb{R}^3$ non è geodeticamente completa.*

Dimostrazione. Per il Corollario 13.3.1, a pagina 212, ogni meridiano di una pseudosfera è una trattrice. La curva $\boldsymbol{\alpha}$ data dalla

$$\alpha(\mathbf{v}) = \begin{cases} \left(ae^{-v/a}, \displaystyle\int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}}\, dt \right) & \text{per } 0 \leq v < \infty, \\ \left(ae^{v/a}, \displaystyle\int_0^v \sqrt{1 - e^{2t/a}}\, dt \right) & \text{per } -\infty < v \leq 0. \end{cases} \tag{17.24}$$

è una parametrizzazione unitaria di una trattrice. Quindi essa dà luogo ad una geodetica la cui traccia è un meridiano. Dalla (17.24) si vede che $\boldsymbol{\alpha}$ non è differenziabile in 0, per cui $\boldsymbol{\alpha}$ non può essere una geodetica definita su tutto $\mathbb{R}$. Più in generale, non è possibile dotare una trattrice di una parametrizzazione con velocità costante definita sull'intera retta reale $\mathbb{R}$. Quindi una pseudosfera deve essere incompleta. □

Ecco il disegno di una tipica geodetica su una pseudosfera:



Geodetica su una pseudosfera

17.3 L'applicazione esponenziale ed il lemma di Gauss

L'applicazione esponenziale[5] fornisce un metodo naturale, che fa uso delle geodetiche, per applicare ogni spazio tangente ad una superficie astratta sulla superficie stessa. Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta con $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, e sia $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Per il Teorema 17.1.1 si ha che se $b > 0$ è sufficientemente piccolo esiste un'unica geodetica $\boldsymbol{\alpha}\colon [0, b) \longrightarrow \mathcal{M}$ tale che $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$.

Definizione 17.3.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$.* **L'applicazione esponenziale** *di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$ è l'applicazione $\exp_{\mathbf{p}}$ definita su un intorno $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$ di $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ da*

$$\exp_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}(1),$$

dove $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}$ è la geodetica di $\mathcal{M}$ con $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$.

Quindi

$$\exp_{\mathbf{p}}\colon \mathcal{U}_{\mathbf{p}} \longrightarrow \exp(\mathcal{U}_{\mathbf{p}}) \subseteq \mathcal{M} \qquad e \qquad \exp_{\mathbf{p}}(\mathbf{0}) = \mathbf{p}.$$

Innanzi tutto osserviamo:

Lemma 17.3.1. *Per ogni numero reale a, l'applicazione esponenziale $\exp_{\mathbf{p}}$ gode della proprietà*

$$\exp_{\mathbf{p}}(a\,\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}(a\,t),$$

dove $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}$ è la geodetica di $\mathcal{M}$ con $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$.

Dimostrazione. Le curve $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{av}}$ e $t \longmapsto \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{v}}(a\,t)$ sono entrambe geodetiche con lo stesso punto iniziale e la stessa velocità iniziale, che è $a\,\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Quindi per il Teorema 17.1.1 esse coincidono su qualche intervallo contenente 0 □

[5] Due parole a spiegazione dell'origine del nome "applicazione esponenziale". L'usuale funzione esponenziale di una variabile reale o complessa, cioè,

$$z \longmapsto e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \tag{17.25}$$

può essere estesa alle matrici quadrate, per il fatto che il secondo membro della (17.25) ha ancora senso quando al posto di z si mette una matrice quadrata A. Questa nuova applicazione $A \longmapsto e^A$ trasforma lo spazio vettoriale di tutte le matrici $n \times n$ nel gruppo delle matrici $n \times n$ non singolari. In particolare, essa applica lo spazio vettoriale di tutte le matrici antisimmetriche $n \times n$ sul gruppo $\mathbf{SO}(n)$ di tutte le matrici ortogonali $n \times n$ con determinante uguale ad 1. Su $\mathbf{SO}(n)$ c'è una metrica riemanniana naturale rispetto alla quale $t \longmapsto e^{tA}$ è una geodetica di $\mathbf{SO}(n)$ per ogni matrice $n \times n$ antisimmetrica A. Questo fatto può essere generalizzato ad ogni varietà riemanniana; il risultato è proprio exp.

Il punto successivo consiste nella dimostrazione del fatto che $\exp_{\mathbf{p}}$ è un diffeomorfismo nelle vicinanze dell'origine $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$. Per questo osserviamo innanzi tutto che ogni spazio tangente ad una superficie astratta è esso stesso una superficie astratta.

Lemma 17.3.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta. Allora per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ esiste un intorno $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$ di $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ tale che $\exp_{\mathbf{p}}$ sia un diffeomorfismo tra $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$ ed un sottoinsieme aperto di $\mathcal{M}$.*

Dimostrazione. La differenziabilità dell'applicazione esponenziale discende dal fatto che, come risulta dalla teoria delle equazioni differenziali, le soluzioni del sistema (17.2) dipendono differenziabilmente dalle condizioni iniziali (17.11).

Per far vedere che $\exp_{\mathbf{p}}$ è un diffeomorfismo nelle vicinanze dell'origine, ci servono le curve radiali dello spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ uscenti dall'origine. Per un arbitrario $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, sia $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{v}} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ la curva definita da $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{v}}(t) = t\,\mathbf{v}$. Allora $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{v}}$ è l'unica geodetica dello spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ (considerato come una superficie astratta) uscente da $\mathbf{p}$ con velocità iniziale $\mathbf{v}$. Allo stesso modo, il Lemma 17.3.1 implica che la curva $t \longmapsto \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}}(t)$ di $\mathcal{M}$ definita da $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}} = \exp_{\mathbf{p}} \circ \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{v}}$ è l'unica geodetica di $\mathcal{M}$ uscente da $\mathbf{p}$ con velocità iniziale $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. La varietà $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ viene canonicamente identificata con il suo spazio tangente $(\mathcal{M}_{\mathbf{p}})_0$ nell'origine nel modo seguente. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$, sia $\mathbf{v_0} \in (\mathcal{M}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{0}}$ il vettore tangente definito da $(\mathbf{v}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\rho}'_{\mathbf{v}}(0)$. Di fatto, l'applicazione tangente dell'applicazione esponenziale $((\exp_{\mathbf{p}})_*)_{\mathbf{0}} \colon (\mathcal{M}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{0}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ realizza questa identificazione canonica in quanto

$$((\exp_{\mathbf{p}})_*)_{\mathbf{0}}\big((\mathbf{v}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{0}}\big) = (\exp_{\mathbf{p}} \circ \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{p}})'(0) = \boldsymbol{\xi}'(0) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}}.$$

Il teorema della funzione inversa implica che $\exp_{\mathbf{p}}$ sia un diffeomorfismo tra un intorno di $0 \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ ed un sottoinsieme aperto di $\mathcal{M}$ □

Definizione 17.3.2. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Diciamo che un sottoinsieme aperto $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$ di $\mathcal{M}$ contenente $\mathbf{p}$ è un* **intorno normale** *di $\mathbf{p}$ se esiste un sottoinsieme aperto $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ dello spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ tale che $\exp_{\mathbf{p}}$ sia un diffeomorfismo tra $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ ed $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$.*

Nel caso particolare della superficie $\mathbb{R}^2$, una geodetica uscente da $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ con velocità iniziale $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ è della forma $t \longmapsto \mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$. Quindi l'applicazione esponenziale in $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ è data semplicemente da

$$\exp_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}) = \mathbf{p} + \mathbf{v}.$$

Perciò ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente $\mathbf{p}$ è un intorno normale di $\mathbf{p}$.

Possiamo servirci dell'applicazione esponenziale per definire delle generalizzazioni naturali delle coordinate rettangolari e polari.

Definizione 17.3.3. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Scegliamo una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ dello spazio tangente $\mathcal{M}_\mathbf{p}$, e sia $\mathcal{N}_\mathbf{p} = \exp_\mathbf{p}(\mathcal{O}_\mathbf{p})$ un intorno normale di $\mathbf{p}$.*

(i) *Una* **parametrizzazione normale** *di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$ (relativa a $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$) è l'applicazione*

$$\mathbf{x}\colon (a,b)\times(c,d) \longrightarrow \mathcal{M} \qquad \textit{data da} \qquad \mathbf{x}(u,v) = \exp_\mathbf{p}\big(u\,\mathbf{e}_1 + v\,\mathbf{e}_2\big),$$

dove il rettangolo $\{\, u\,\mathbf{e}_1 + v\,\mathbf{e}_2 \;\mid\; a < u < b, c < v < d\,\}$ è contenuto in $\mathcal{O}_\mathbf{p}$.

(ii) *Una* **parametrizzazione polare geodetica** *di $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$ (relativa a $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$) è l'applicazione*

$$\mathbf{y}\colon (0,c)\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathcal{M} \qquad \textit{data da} \qquad \mathbf{y}(r,\theta) = \exp_\mathbf{p}\big(r\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + r\sin(\theta)\mathbf{e}_2\big),$$

dove il disco privato dell'origine

$$\{\, r\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + r\sin(\theta)\mathbf{e}_2 \;\mid\; 0 < r < c, 0 \le \theta \le 2\pi\,\}$$

è contenuto in $\mathcal{O}_\mathbf{p}$.

Dal momento che una parametrizzazione normale è l'inversa dell'applicazione esponenziale, si ha (si veda l'esercizio 2):

Lemma 17.3.3. *Una parametrizzazione normale è regolare nelle vicinanze dell'origine*; *una parametrizzazione polare geodetica è regolare nelle vicinanze dell'origine tranne che nell'origine.*

Anche se la regolarità di una parametrizzazione polare geodetica $\mathbf{y}$ viene meno nell'origine, tuttavia $\mathbf{y}$ può essere estesa ad una applicazione differenziabile

$$\mathbf{y}\colon [0,c)\times(-\infty,\infty) \longrightarrow \mathcal{M}. \tag{17.26}$$

Lemma 17.3.4. *Sia $\mathcal{N}_\mathbf{p}$ un intorno normale su una superficie astratta $\mathcal{M}$ e sia $\mathbf{q} \in \mathcal{N}_\mathbf{p}$. Allora esiste una ed una sola geodetica da $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$ che giace interamente in $\mathcal{N}_\mathbf{p}$.*

Dimostrazione. Ogni geodetica con velocità unitaria uscente da $\mathbf{p}$ è una curva r-parametrica della parametrizzazione polare. Dal momento che $\exp_\mathbf{p}\colon \mathcal{N}_\mathbf{p} \longrightarrow \mathcal{N}_\mathbf{p}$ è un diffeomorfismo, una tale geodetica raggiunge $\mathbf{q}$ ed è unica. □

Calcoliamo ora la prima forma fondamentale di una parametrizzazione polare geodetica.

Lemma 17.3.5. *Sia* $\mathbf{y}$ *una parametrizzazione polare geodetica in un punto* $\mathbf{p}$ *di una superficie astratta* $\mathcal{M}$*. Allora i coefficienti della prima forma fondamentale di* $\mathbf{y}$ *godono della proprietà che*

$$E = 1 \qquad ed \qquad F = 0,$$

per cui la metrica di $\mathbf{y}$ *è data da*

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2.$$

Dimostrazione. Dal momento che le curve r-parametriche di $\mathbf{y}$ sono geodetiche con velocità unitaria, si ha

$$E = \langle \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_r \rangle = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y}_{rr} = 0.$$

Inoltre,

$$F_r = \frac{\partial \langle \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_\theta \rangle}{\partial r} = \langle \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_{\theta r} \rangle = \langle \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_{r\theta} \rangle = \frac{E_\theta}{2} = 0,$$

per cui F è costante su ogni curva r-parametrica. La curva r-parametrica $\theta \longmapsto \mathbf{y}(0,\theta)$ non è altro che la curva costante in $\mathbf{p}$; quindi $\mathbf{y}_\theta(0,\theta) = 0$. Questo implica che $F(0,\theta) = 0$. (F è definita in $(0,\theta)$ in virtù della (17.26).) Dal momento che F è costante su ogni curva r-parametrica, possiamo concludere che F è identicamente uguale a 0 □

Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Quantunque l'applicazione esponenziale $\exp_{\mathbf{p}}$ in genere *non* sia un'isometria, tuttavia essa è un'isometria parziale, nel senso che ora spieghiamo. Consideriamo lo spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ come una superficie astratta isometrica ad $\mathbb{R}^2$. Chiameremo **radiali** le geodetiche in $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ uscenti da $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ e diremo che un vettore tangente ad $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ in $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ è **radiale**, se $\mathbf{v}$ è tangente ad una geodetica radiale. Allo stesso modo, un vettore tangente ad $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ in $\mathbf{v}$ sarà detto **coradiale**, se esso è perpendicolare ai vettori radiali tangenti in $\mathbf{v}$. Le geodetiche radiali in $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$ vengono trasformate da $\exp_{\mathbf{p}}$ nelle geodetiche in $\mathcal{M}$ uscenti da $\mathbf{p}$. Osserviamo ora che le nozioni di "radiale" e di "coradiale" hanno senso anche per vettori tangenti ad $\mathcal{M}$.

Nel paragrafo 15 del suo articolo [Gauss2], Gauss afferma:

> **Ductis in superficie curva ab eodem puncto initiali innumeris lineis brevissimis aequalis longitudinis, linea earum extremitates iungens ad illas singulas erit normalis**,

che significa

> **Se su una superficie curva si tracciano infinite linee brevi** [cioè, archi di geodetica] **di uguale lunghezza a partire dallo stesso punto iniziale, la linea che congiunge i loro estremi sarà normale ad ognuna delle linee.**

(Tale curva è detta circonferenza geodetica.) Questa è la prima enunciazione di quello che è oggi noto come il **Lemma di Gauss**. Mediante l'applicazione esponenziale, questo importante lemma si esprime nel modo seguente.

Lemma 17.3.6. (Lemma di Gauss) *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta e sia $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$. Allora*:

(i) $\exp_{\mathbf{p}}$ *conserva le lunghezze dei vettori tangenti radiali*;

(ii) $\exp_{\mathbf{p}}$ *conserva l'ortogonalità tra vettori tangenti coradiali e radiali.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y}$ una parametrizzazione polare geodetica su $\mathcal{M}$ in $\mathbf{p}$; allora la composizione $\mathbf{y} \circ \exp_{\mathbf{p}}$ dà le usuali coordinate polari in $\mathbf{p}$. Siano E, F e G i coefficienti della prima forma fondamentale di $\mathbf{y}$. La (i) è una riformulazione del fatto (per il Lemma 17.3.5) che $E = 1$, e la (ii) è una riformulazione del fatto che $F = 0$. □

D'altra parte, $\exp_{\mathbf{p}}$ modifica quasi sempre le lunghezze ed i prodotti scalari dei vettori coradiali; questo rende conto del fatto che essa non è quasi mai un'isometria.

17.4 Proprietà minimizzanti delle geodetiche

La definizione di funzione distanza $\boldsymbol{\rho}$ data a pagina 136 per una superficie in $\mathbb{R}^n$ va bene anche per una superficie astratta $\mathcal{M}$. Quindi per $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$,

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{array}{l}\text{l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le} \\ \text{curve differenziabili a tratti } \boldsymbol{\alpha} \text{ che uniscono } \mathbf{p} \text{ con } \mathbf{q}.\end{array}$$

Definizione 17.4.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta, e sia $\boldsymbol{\alpha}$ una curva differenziabile a tratti passante per i punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$. Diciamo che* $\boldsymbol{\alpha}$ **realizza l'arco di minima lunghezza da p a q** *se*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}], \tag{17.27}$$

ed ogni tale altra curva differenziabile a tratti che unisce $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ è una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\alpha}$.

Inoltre, se $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ non sono troppo lontani tra loro, risulta che una curva la cui lunghezza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ è uguale a $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ è una geodetica.

Teorema 17.4.1. *Per ogni punto* $\mathbf{q}$ *di un intorno normale* $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$ *di una superficie astratta* $\mathcal{M}$*, la geodetica radiale da* $\mathbf{p}$ *a* $\mathbf{q}$ *è l'unica curva che realizza l'arco di minima lunghezza.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y}$ una parametrizzazione polare geodetica che parametrizza $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$. Possiamo porre $\mathbf{q} = \mathbf{y}(u_0, v_0)$; allora l'unica geodetica che unisce $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ è la geodetica radiale $\boldsymbol{\gamma}\colon [0, u_0] \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbf{p}}$ definita da $\boldsymbol{\gamma}(u) = \mathbf{y}(u, v_0)$. Possiamo supporre che ogni altra curva $\boldsymbol{\alpha}$ da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ sia parametrizzata sullo stesso intervallo $[0, u_0]$.

Vogliamo dimostrare che

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\gamma}] \leq \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}]. \tag{17.28}$$

Se si elimina ogni eventuale cappio che $\boldsymbol{\alpha}$ forma in $\mathbf{p}$ si accorcia $\boldsymbol{\alpha}$; quindi supponiamo che $\boldsymbol{\alpha}$ passi per $\mathbf{p}$ una sola volta.

Consideriamo innanzi tutto il caso in cui $\boldsymbol{\alpha}$ non esce mai da $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}$ non ripassa per $\mathbf{p}$, esistono due funzioni differenziabili $a_1, a_2\colon [0, u_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}\big(a_1(t), a_2(t)\big).$$

Essendo $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}(u_0) = \mathbf{q}$, si ha

$$a_1(0) = 0, \quad a_1(u_0) = u_0, \quad a_2(0) = v_0 \qquad \text{e} \quad a_2(u_0) = v_0 + 2n\,\pi, \tag{17.29}$$

per qualche intero n. Siccome $\mathbf{y}$ è una parametrizzazione polare geodetica, si ha $E = 1$ e $F = 0$, e pertanto la velocità di $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfa alle condizioni

$$\|\boldsymbol{\alpha}'\| = \sqrt{a_1'^2 + G\,a_2'^2} \;\geq |a_1'| \geq a_1'.$$

Quindi la (17.29) implica che

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] = \int_0^{u_0} \sqrt{a_1'^2 + G\,a_2'^2}\,dt \geq \int_0^{u_0} a_1' dt = a_1(u_0) - a_1(0) = u_0. \tag{17.30}$$

La geodetica radiale $\boldsymbol{\gamma}$ ha velocità unitaria; cioè,

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\gamma}] = \int_0^{u_0} dt = u_0. \tag{17.31}$$

Allora la (17.28) segue dalla (17.30) e dalla (17.31).

D'altra parte, se $\boldsymbol{\alpha}$ non sta in $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$, allora essa deve intersecare la circonferenza $v \longmapsto \mathbf{y}(u_0, v)$; per il ragionamento precedente, la porzione di $\boldsymbol{\alpha}$ interna a questa

circonferenza deve avere lunghezza almeno uguale a $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\gamma}]$. Ne risulta che in questo caso $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\gamma}] < \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}]$.

Supponiamo infine che $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}]$. Allora $\boldsymbol{\alpha}$ non può intersecare la circonferenza $v \longmapsto \mathbf{y}(u_0, v)$ e la (17.30) diviene un'uguaglianza. Quindi

$$\sqrt{a_1'^2 + G\, a_2'^2} = a_1'. \tag{17.32}$$

Dal momento che $G > 0$, la (17.32) implica che

$$a_2' = 0.$$

Perciò a_2 è costante ed uguale a v_0, e quindi

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{y}\big(a_1(t), v_0\big),$$

ciò che mostra che $\boldsymbol{\alpha}$ è di fatto una riparametrizzazione di $\boldsymbol{\gamma}$ □

Lemma 17.4.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta, e siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$. Supponiamo che $\boldsymbol{\alpha}\colon [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$ sia su $\mathcal{M}$ la curva più breve tra tutte le curve che uniscono $\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}(a)$ e $\mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha}(b)$. Allora $\boldsymbol{\alpha}$ è una geodetica.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\boldsymbol{\alpha}$ non sia una geodetica, e facciamo vedere che

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] > \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Se $\boldsymbol{\alpha}$ non è una geodetica, allora esiste un t_0 tale che $\big(\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}\big)'(t_0) \neq 0$. Dal momento che il campo di vettori $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ è continuo, esso non si annulla nelle vicinanze di t_0; perciò, senza diminuire la generalità, possiamo considerare $a < t_0 < b$. Esiste allora un $\epsilon > 0$ tale che la restrizione di $\boldsymbol{\alpha}$ all'intervallo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ non sia una geodetica ma si trovi in un intorno normale di $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$. Allora il Teorema 17.4.1 implica che la lunghezza $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}\big|[t_0, t_0 + \epsilon]]$ della restrizione di $\boldsymbol{\alpha}$ all'intervallo $[t_0, t_0 + \epsilon]$ è strettamente più grande di $\boldsymbol{\rho}\big(\boldsymbol{\alpha}(t_0), \boldsymbol{\alpha}(t_0 + \epsilon)\big)$. Ma allora per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] &= \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}\big|[a, t_0]] + \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}\big|[t_0, t_0 + \epsilon]] + \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}\big|[t_0 + \epsilon, b]] \\ &> \boldsymbol{\rho}\big(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}(t_0)\big) + \boldsymbol{\rho}\big(\boldsymbol{\alpha}(t_0), \boldsymbol{\alpha}(t_0 + \epsilon)\big) + \boldsymbol{\rho}\big(\boldsymbol{\alpha}(t_0 + \epsilon), \mathbf{q}\big) \geq \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

□

17.5 Superfici astratte come spazi metrici

Ricordiamo un'importante definizione che si incontra in topologia.

Definizione 17.5.1. *Un insieme S è detto uno* **spazio metrico** *se esiste una funzione $\boldsymbol{d}\colon S \times S \longrightarrow S$ (chiamata la* **funzione distanza** *di S) con le seguenti proprietà:*

(i) $\boldsymbol{d}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{q},\mathbf{p})$;

(ii) $\boldsymbol{d}(\mathbf{p},\mathbf{r}) \leq \boldsymbol{d}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \boldsymbol{d}(\mathbf{q},\mathbf{r})$;

(iii) $\boldsymbol{d}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \geq 0$;

(iv) $\boldsymbol{d}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0$ *se e solo se* $\mathbf{p} = \mathbf{q}$

per $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ arbitrari.

L'esempio più semplice non banale di spazio metrico è $\mathbb{R}^n$ con la metrica indotta dall'usuale funzione distanza, definita da $\mathbf{d}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ per $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Tuttavia, la nozione di spazio metrico è molto più generale. Essa è importante per la teoria delle superfici astratte, in virtù del seguente risultato.

Teorema 17.5.1. *La funzione distanza $\boldsymbol{\rho}$ di una superficie astratta $\mathcal{M}$ conferisce ad $\mathcal{M}$ la struttura di spazio metrico.*

Dimostrazione. Che $\boldsymbol{\rho}$ soddisfi alla (i) nella definizione di spazio metrico si vede facilmente per il fatto che ogni curva parametrizzata genera una curva parametrizzata che si muove in direzione opposta, e la (iii) è ovvia in quanto la lunghezza di una curva non è mai negativa. Per dimostrare che la (ii) è soddisfatta, sia $\epsilon > 0$ e siano $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ due curve differenziabili a tratti su $\mathcal{M}$ che uniscono $\mathbf{p}$ con $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}$ con $\mathbf{r}$, rispettivamente, e tali che

$$\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] < \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Length}[\boldsymbol{\beta}] < \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q},\mathbf{r}) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Possiamo parametrizzare l'unione delle tracce di $\boldsymbol{\alpha}$ e di $\boldsymbol{\beta}$ come una nuova curva differenziabile a tratti $\boldsymbol{\gamma}$; allora

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{r}) \leq \mathbf{Length}[\boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] + \mathbf{Length}[\boldsymbol{\beta}] < \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q},\mathbf{r}) + \epsilon.$$

Dal momento che ϵ è arbitrario, si ha la (ii).

Infine, per dimostrare che la (iv) è soddisfatta, procediamo nel modo seguente. Supponiamo che $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0$, ma che $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. Sia $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}$ un intorno normale di $\mathbf{p}$ con $\mathbf{q} \notin \mathcal{N}_{\mathbf{p}}$; esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\{\, \mathbf{r} \in \mathcal{M} \;\mid\; \boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{r}) \leq \epsilon \,\} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbf{p}}.$$

Per definizione di $\boldsymbol{\rho}$, esiste una curva differenziabile a tratti $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ con $\boldsymbol{\alpha}(a) = \mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\alpha}(b) = \mathbf{q}$ tale che $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] < \epsilon$. Dal momento che $\boldsymbol{\alpha}\big([a,b]\big)$ è connesso, esiste un t_0, con $a < t_0 < b$, tale che $\boldsymbol{\rho}\big(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}(t_0)\big) = \epsilon$. Ma allora il Teorema 17.4.1 implica che $\mathbf{Length}[\boldsymbol{\alpha}] \geq \epsilon$. Questa contraddizione mostra che $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ □

Anche sugli spazi metrici esiste una nozione di completezza.

Definizione 17.5.2. *Sia S uno spazio metrico con funzione distanza $\boldsymbol{d}$. Una successione di punti $\{\mathbf{p}_n\}$ in S è detta una* **successione di Cauchy**, *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $N = N(\epsilon)$ tale che $\boldsymbol{d}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) < \epsilon$ per $i, j \geq N$. Diciamo che S è uno* **spazio metrico completo** *se ogni successione di Cauchy converge a qualche punto.*

Per esempio, $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ con la metrica standard non è completo in quanto la successione $\{(1/n, 1/n)\}$ non converge ad alcun punto di $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Perciò su una superficie astratta si hanno due diverse nozioni di completezza. Esse sono però equivalenti.

Lemma 17.5.1. *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta connessa. Se $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\rho})$ è uno spazio metrico completo, allora $\mathcal{M}$ è geodeticamente completa.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\beta}\colon [0,b) \longmapsto \mathcal{M}$ una geodetica con velocità unitaria. Se $\{t_j\}$ è una successione in $[0,b)$ con $t_j \longrightarrow b$, allora $\{\boldsymbol{\beta}(t_j)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{M}$, in quanto

$$\boldsymbol{\rho}\big(\boldsymbol{\beta}(t_j), \boldsymbol{\beta}(t_k)\big) \leq \mathbf{Length}[\boldsymbol{\beta}\big|[t_j, t_k]] = |t_j - t_k|.$$

Quindi $\{\boldsymbol{\beta}(t_j)\}$ converge a qualche $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$. Sia $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ un intorno normale di $\mathbf{q}$; dal momento che $\boldsymbol{\beta}$ è una geodetica in $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ che arriva a $\mathbf{q}$, l'applicazione esponenziale in $\mathbf{q}$ può essere utilizzata per estendere $\boldsymbol{\beta}$ ad una geodetica oltre $\mathbf{q}$. In questo modo $\boldsymbol{\beta}$ può essere estesa ad una geodetica definita su tutto $[0, \infty)$. In modo simile si può estendere $\boldsymbol{\beta}$ ad una geodetica definita su tutto $(-\infty, 0]$, e quindi sull'intera retta reale. □

Il Lemma 17.5.1 ammette la seguente generalizzazione:

Teorema 17.5.2. (Hopf-Rinow) *Sia $\mathcal{M}$ una superficie astratta connessa. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(i) $(\mathcal{M}, \boldsymbol{\rho})$ *è uno spazio metrico completo*;

(ii) $\mathcal{M}$ *è geodeticamente completa*;

(iii) *per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$, l'applicazione esponenziale $\exp_{\mathbf{p}}$ è definita su tutto lo spazio tangente $\mathcal{M}_{\mathbf{p}}$.*

Inoltre, ognuna delle condizioni (i), (ii) *e* (iii) *comporta, per ogni* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}$*, l'esistenza di una geodetica* $\boldsymbol{\beta}\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ *tale che* $\boldsymbol{\beta}(a) = \mathbf{p}$*,* $\boldsymbol{\beta}(b) = \mathbf{q}$ *e* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{Length}[\boldsymbol{\beta}]$.

Per una dimostrazione si veda [Hicks] oppure [ON2].

17.6 Esercizi

1. Si dimostri che una pregeodetica è una geodetica se e solo se ha velocità costante.

2. Si utilizzi il Lemma 17.2.3 per trovare le geodetiche del piano parametrizzato dalle coordinate cartesiane.

3. Si utilizzi la relazione di Clairaut per descrivere le geodetiche su una pseudosfera[6].

4. Si trovi una parametrizzazione di una generica geodetica su un catenoide e si disegnino alcune di tali geodetiche.

5. Sia $\boldsymbol{\beta}$ una geodetica su un catenoide diversa dalla circonferenza centrale, e supponiamo che la velocità iniziale di $\boldsymbol{\beta}$ sia perpendicolare all'asse di rotazione. Si utilizzi la relazione di Clairaut (Teorema 17.2.1) per dimostrare che $\boldsymbol{\beta}$ tende asintoticamente alla curva centrale, senza toccarla.

6. Si rappresentino graficamente alcune circonferenze geodetiche di una sfera.

7. Si rappresentino graficamente le geodetiche e le circonferenze geodetiche di ellissoidi con due assi diversi e di ellissoidi con tre assi diversi.

8. Si dimostri il Lemma 17.2.1, e si precisi nei particolari la dimostrazione del Lemma 17.3.3.

9. Sia $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$, per cui $\mathbf{v_p} \in S^2(1)_{\mathbf{p}}$. Si trovi l'espressione esplicita di $\exp_{\mathbf{p}}(t\mathbf{v_p})$ per $t \in \mathbb{R}$.

[6] Per ulteriori notizie sulle geodetiche della pseudosfera, e per immagini interessanti, si può consultare F. Schilling: **Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie** [Schill].

Bibliografia

[Apéry] F. Apéry, **Models of the Real Projective Plane**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.

[Beltr] E. Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giorn. di Mat. Napoli*, **6**, 284-312, oppure **Opere I**, 406-429.

[Bian] L. Bianchi, **Lezioni di Geometria Differenziale**, Terza edizione interamente rifatta, Nicola Zanichelli, Bologna, 1927. Traduzione in tedesco di M. Lukat: **Vorlesungen über Differentialgeometrie**, Teubner, Leipzig, 1899, 1910.

[Blas1] W. Blaschke, **Kreis und Kugel**, Veit, Leipzig, 1916.

[Brio] F. Brioschi, Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* **3** (1852), 293–321, oppure **Opere 3**, 11–33.

[Buck] R.C. Buck, **Advanced Calculus**, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1965.

[BuBu] C. Burali-Forti, P. Burgatti, **Analisi vettorale generale e applicazioni**, Volume 2, Geometria differenziale, Nicola Zanichelli, Bologna, 1930.

[CaGr] R.Caddeo, A. Gray, **Lezioni di Geometria Differenziale su Curve e Superfici**, Volume 1, CUEC, Cagliari, 2001.

[Cajori] F. Cajori, **A History of Mathematics**, Third Edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1980.

[Cartan] É. Cartan, **La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés**, *Exposés de Géométrie*, V, Hermann, Paris, 1935.

[Ces] E. Cesàro, **Lezioni di Geometria Intrinseca**, Tipografia della R. Accademia delle Scienze, Napoli, 1896. Traduzione in tedesco di G. Kowalewski: **Vorlesungen über natürliche Geometrie**, Teubner, Leipzig, 1901.

[Chris] E.B. Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, *J. reine angew. Math.* (*Crelle's Journal*) **70** (1869), 46–70.

[Crowe] M.J. Crowe, **A History of Vector Analysis**, Dover Publications, New York, 1994.

[Darb1] G. Darboux, **Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algebriques et sur la Theorie des Imaginaires**, Gauthier-Villars, Paris, 1873. Ristampato dalla University Microfilms International, Ann Arbor, MI, 1992.

[Darb2] G. Darboux, **Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces**, 4 volumi, Gauthier-Villars, Paris, 1914, 1915, 1894, 1896. Ristampato dalla Chelsea Publishing Co., New York, 1972.

[Dom] P. Dombrowski, **150 Years after Gauss'** *"Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas", Astérisque* **62**, Société Mathématique de France, Paris, 1979.

[Eisen1] L. P. Eisenhart, **A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces**, Ginn and Company, Boston, 1909. Ristampato dalla Dover Publications, New York, 1960.

[Enn1] A. Enneper, Analytisch-geometrische Untersuchungen, *Z. Math. Phys.* **9** (1864), 96–125.

[Euler1] L. Euler, De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibusm, *Comment. Acad. Petropolit.* **8** (1736), 66–85. Ristampato in *Opera omnia* **(1) 22**, Basel 1926, 83-107.

[Euler2] L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, *Opera omnia* **(1) 24**, Füssli Turici, Lausanne, 1952. Parzialmente tradotto in inglese da D. J. Struik [Stru3, pagine 399–406].

[Fischer] G. Fischer, **Mathematical Models**, 2 volumi, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.

[Frenet] F. Frenet, Sur les courbes à double courbure, Thèse, Toulouse, 1847. Una sintesi si trova in *Journ. de Math.* **17**, 1852.

[Gauss1] C.F. Gauss, Neue allgemeine untersuchungen über Krummen Flächen, **Werke 8**, 408-443.

[Gauss2] C.F. Gauss, Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas, *Comm. Soc. Reg. Sc. Gott. Rec.*, **6** (1827), 99-146.[7]

[Hicks] N.J. Hicks, **Notes on Differential Geometry**, Van Nostrand Reinhold, Princeton, NJ, 1965.

[HC-V] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, **Geometry and the Imagination**, Chelsea Publishing Co., New York, 1952. Titolo originale: **Anschauliche Geometrie**, J. Springer, Berlino, 1932. Traduzione in italiano: **Geometria intuitiva**, Boringhieri, Torino,1960.

[Joach1] M.F. Joachimsthal, Demostrationes theorematum ad superficies curvas spectantium, *J. reine angew. Math.* (*Giornale di Crelle*) **30** (1846), 347–350.

[Joach2] M.F. Joachimsthal, **Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Allegemeine Theorie der Flächen und der Linien Doppelter Krümmung**, Third Edition, Teubner, Leipzig, 1890.

[Krey1] E. Kreyszig, **Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry**, *Mathematical Expositions No. 16*, University of Toronto Press, 1968. Ristampato dalla Dover Publications, New York, 1991.

[Kuen] Th. Kuen, Fläche von constantem negativen Krümmungsmass nach L. Bianchi, *Sitzungsber. d. Bayer. Akad.*, 1884.

[LeviC] T. Levi-Civita, **Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluto**, Roma, 1925. Ristampato dalla Dover Publications, New York, 1977 col titolo **The Absolute Differential Calculus**.

[Lock] E.H. Lockwood, **A Book of Curves**, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

[7] [Gauss1], che è una versione preliminare di [Gauss2], mostra in che modo andavano sviluppandosi le idee di Gauss. In particolare, [Gauss1] contiene materiale sulla curvatura delle curve piane che manca in [Gauss2]. Nel diciannovesimo secolo c'erano tre versioni in latino di [Gauss2], insieme con due traduzioni in francese e due in tedesco. Per le traduzioni in inglese di [Gauss1] e di [Gauss2] insieme con delle note ed una bibliografia degli articoli attinenti, si veda [MoHi].

[McCl] J. McCleary, **Geometry from a Differentiable Viewpoint**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Melz] Z.A. Melzak, **Companion to Concrete Mathematics**, 2 volumi, John Wiley and Sons, New York, 1973, 1976.

[Meu] J.B. Meusnier, Mémoire sur la courbure des surfaces, *Mémoires des savans étrangers* **10** (lu 1776) (1785), 477–510.

[MSF] A.S. Mishenko, Yu.P. Solovyev e A.T. Fomenko, **Problems in Differential Geometry and Topology**, Mir Publishers, Moscow, 1985.

[MoHi] J.C. Morehead e A.D. Hiltebreitel, Traduzione con note e riferimenti bibliografici delle **General Investigations of Curves and Surfaces of 1827 and 1825**, The Princeton University Library, Princeton, 1902.

[MS] G. Mostow, J.H. Sampson, **Linear Algebra**, McGraw-Hill, New York, 1969.

[ON1] B. O'Neill, **Elementary Differential Geometry**, Second Edition, Academic Press, New York-London, 1997.

[ON2] B. O'Neill, **Semi-Riemannian Geometry**, Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich), New York-London, 1983.

[NiSh] V.V. Nikulin e I.R. Shafarevich, **Geometries and Groups**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.

[Reich] K. Reich, Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauß bis Riemann (1828-1868), *Arch. for the Hist. of Exact Sci.* **11** (1973), 273-382.

[Riem] B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellshaft der Wissenschaften zu Göttingen.* **13** (1867).

[Scott] W.R. Scott, **Theory of Groups**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[Serret1] J.A. Serret, Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, *Journ. de Math.* **16** (1851), 193–207.

[Schill] F. Schilling, **Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie**, Teubner, Leipzig, 1935.

[Stru3] D.J. Struik, **A Source Book in Mathematics, 1200–1800**, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969.

[Weyl] H. Weyl, **The Concept of a Riemann Surface**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964. (Traduzione in inglese di **Die Idee der Riemannschen Flächen**, Terza Edizione, Teubner, Stuttgart, 1955.)

Indice Analitico

Indice dei Nomi

Comandi di *Mathematica*