

Programma 2016 - 2017 del corso di Fondamenti di Geometria Superiore I.

Renzo Caddeo

I. La derivazione covariante e le geodetiche di una superficie.
Il metodo di Eulero - Lagrange per la ricerca delle geodetiche. Esempi.
L'importanza delle geodetiche nella ricerca dei modelli di geometrie non euclidee.
Diffeomorfismi e applicazioni geodetiche. La proiezione stereografica centrale.
Il teorema di Beltrami sulle applicazioni geodetiche da una superficie a un piano. Il modello del disco per una geometria non euclidea. ¹

II. La definizione di varietà topologica². Sistemi di coordinate compatibili su E^2 e su S^2 . Atlanti differenziabili e varietà differenziabili³. Atlante stereografico e atlante delle semisfere su S^n .
Sottovarietà aperte. $GL(n, R)$. Varietà prodotto. I tori, $SL(2, R)$.
Il gruppo delle matrici di Heisenberg. Un atlante differenziabile su un triangolo piano.

III. Varietà quoziente. Lo spazio proiettivo reale $P^n(R)$.
Rappresentazioni del piano proiettivo reale $P^2(R)$ in R^3 .
Legame tra $P^3(R)$ e i quaternioni unitari.
La varietà di Grassmann.

IV. Funzioni differenziabili su varietà differenziabili e struttura di algebra associata.
Vettori tangenti a varietà differenziabili.
Applicazioni differenziabili tra varietà differenziabili.
Pull-back e differenziale di una applicazione tra varietà differenziabile e loro proprietà. ⁴

¹Si veda il Cap. 15 di J. McCleary, Geometry from a differentiable Viewpoint, Cambridge Univ. Press, 1994.

²Boothby, Cap.I

³Boothby, Cap.III

⁴Boothby, Cap.IV

V. Omeomorfismi di carte locali come diffeomorfismi tra varietà.
 Basi coordinate e rappresentazione di vettori in coordinate locali.
 La matrice associata al differenziale di una applicazione tra varietà.
 Legge di trasformazione delle componenti di un vettore per un cambiamento di coordinate.

VI. Il fibrato tangente. Topologia, base numerabile, separabilità di Hausdorff, atlante differenziabile.
 Il fibrato dei riferimenti. Fibrati vettoriali e principali.

VII. Applicazioni differenziabili F tra due varietà differenziabili M ed N e mutuo comportamento locale.
 Rango della applicazione F .
 Iniettività del differenziale di F e immersioni.
 Atlante indotto da una immersione. Sottovarietà immerse.
 Sottovarietà immerse regolarmente (*embedded*). Esempi. La superficie di Enneper. Le immersioni di Veronese del piano proiettivo reale in alcuni spazi euclidei.
 Suriettività del differenziale di F e sommersioni.
 Esempi. La fibrazione di Hopf da S^3 a S^2 e la proiezione da TM a M .

VIII. Immagine di una retta sul toro prodotto come sottovarietà immersa non regolarmente nel toro prodotto di R^4 (*il flusso irrazionale sul toro*).
 Ipersuperfici di R^n come controimmagini di 0 tramite funzioni differenziabili.
 Esempi: quadriche e altre superfici notevoli.

IX. Il teorema fondamentale dell'algebra secondo Milnor. ⁵

X. Campi di vettori differenziabili su M .
 Il commutatore di due campi di vettori e le sue propriet.
 L'algebra di Lie dei campi di vettori differenziabili tangenti a M . ⁶
 Il commutatore in coordinate locali. I campi coordinati sono permutabili.
 Esempi di campi di vettori e di calcolo del loro commutatore.
 Campi di vettori F - correlati o proiettabili e immagine del commutatore di due campi vettoriali tramite una applicazione differenziabile F tra varietà differenziabili.
 Campi di vettori su M che sono F - invarianti.
 Il gradiente di una funzione e l'espressione delle sue componenti in una carta locale qualsiasi.

⁵Si vedano le prime pagine di J. Milnor, *Topology from a differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997.

⁶Boothby, Cap.IV, Par. 7.

XI. Campi di vettori indipendenti su S^1 , S^2 , S^3 .

XII. Integrazione di campi di vettori, curve integrali e gruppi locali ad un parametro.

Esempi di campi di vettori completi e di campi di vettori non completi.

XIII. Gruppi ad un parametro su varietà differenziabili e campi di vettori a loro associati.

Trasformazione di un gruppo ad un parametro per effetto di un diffeomorfismo.

Invarianza di un campo di vettori rispetto al suo flusso.

Derivata di Lie di una funzione in direzione di un campo di vettori.

XIV. Il problema della esistenza di superfici integrali di coppie di campi vettoriali.

Ricerca di sottovarietà integrali di famiglie di campi di vettori su una varietà.

Distribuzioni. Completa integrabilità di una distribuzione. Distribuzioni involutorie.

Quando è possibile portare dei campi di vettori ad essere tangenti alle curve coordinate di una parametrizzazione.

Il teorema di Frobenius.

XV. Esempi di distribuzioni integrabili e parametrizzazioni delle sottovarietà integrali.

Integrabilità di una distribuzione ortogonale a un campo di vettori.

Un significato geometrico del commutatore di due campi di vettori: la derivata di Lie di un campo di vettori Y in direzione di un campo di vettori X .

XVI. Campi di vettori indipendenti su sfere.

Il numero di Hurwitz-Radon e il teorema di Adams sui campi di vettori tangenti a sfere.

Sfere parallelizzabili.

XVII. Gruppi di Lie. Esempi di gruppi di Lie: i quaternioni unitari, i gruppi classici, S^3 , $Aff(R^n)$, il gruppo di Heisenberg.

XVIII. Spazio tangente nell'elemento neutro di un gruppo di Lie G .

Campi invarianti a sinistra generati da vettori tangenti nell'elemento neutro.

I gruppi di Lie sono parallelizzabili.

Gruppi di Lie omomorfi e correlazione tra loro campi invarianti.

XIX. Algebra di Lie di un gruppo di Lie.

Le costanti di struttura.

Esempi: le algebre di Lie dei gruppi $Gl(n, R)$, $SL(n, R)$, $O(n, R)$, e del gruppo

di Heisenberg.

Un esempio di gruppo di Lie dato tramite relazioni. ⁷

XX. Connessioni lineari. Esempi.

Campi di tensori differenziabili su varietà differenziabili e loro tipo.

Il prodotto tensoriale tra due campi di tensori. ⁸

La connessione di Levi Civita e il teorema fondamentale di Levi Civita per una varietà riemanniana. ⁹

Connessione applicata a campi tensoriali covarianti, cioè di tipo $(0, r)$ (in particolare del tensore metrico), e di tipo $(1, r)$.

XXI. Campi tensoriali di curvatura R e di torsione T di una connessione lineare e loro derivazione.

Componenti locali dei campi di torsione e di curvatura di una connessione lineare.

Il lemma di Christoffel e un significato geometrico di R e di T per una connessione lineare arbitraria.

Proprietà algebriche del tensore di Riemann associato alla connessione di Levi Civita e prima identità di Bianchi. ¹⁰

Dimostrazione della seconda identità di Bianchi. ¹¹

XXII. Le isometrie conservano la connessione di Levi Civita e il tensore di curvatura di Riemann.

XXIII. Curvatura sezionale di una varietà riemanniana.

Rilevanza storica e legame con la curvatura di Riemann.

Spazi a curvatura sezionale puntualmente costante e spazi a curvatura sezionale costante.

Applicazione della seconda identità di Bianchi alla dimostrazione del teorema di Schur.

La dimostrazione *classica* del teorema di Schur in coordinate locali. ¹²

XXIV. Tracce del campo tensoriale di curvatura di Riemann. La curvatura di Ricci e la curvatura scalare.

I casi particolari delle dimensioni 2 e 3.

In dimensione 3 la curvatura di Ricci determina completamente la curvatura di Riemann.

⁷ Appunti.

⁸ Boothby, Cap.V

⁹ Boothby, Cap.VII

¹⁰ Boothby, Cap.VIII, Par. 3

¹¹ Appunti.

¹² Appunti.

XXV. Curvatura di Ricci e spazi di Einstein.

Applicazione della seconda identità di Bianchi per ottenere un lemma sul tensore di Ricci derivato.

La curvatura sezionale per uno spazio di Einstein in dimensione 3 è costante.

Cenno al problema dell'equivalenza di Riemann.

I due esempi più importanti di spazio tridimensionale a curvatura sezionale costante non nulla: la sfera S^3 e lo spazio iperbolico H^3 .

AVVERTENZA

Gli argomenti trattati nel corso di questo anno 2016 - 2017 si possono trovare in forma equivalente, con piccole differenze notazionali, in diversi testi di introduzione alle varietà differenziabili sia in italiano (D. Perrone) che in altre lingue (W. M. Boothby e M. Do Carmo sono i più diffusi), che si possono trovare nella biblioteca del nostro dipartimento. Su alcune parti sono stati redatti degli appunti distribuiti durante le lezioni del corso appena concluso e negli anni precedenti. Naturalmente gli studenti possono chiedere al docente tutto il materiale di cui hanno bisogno.