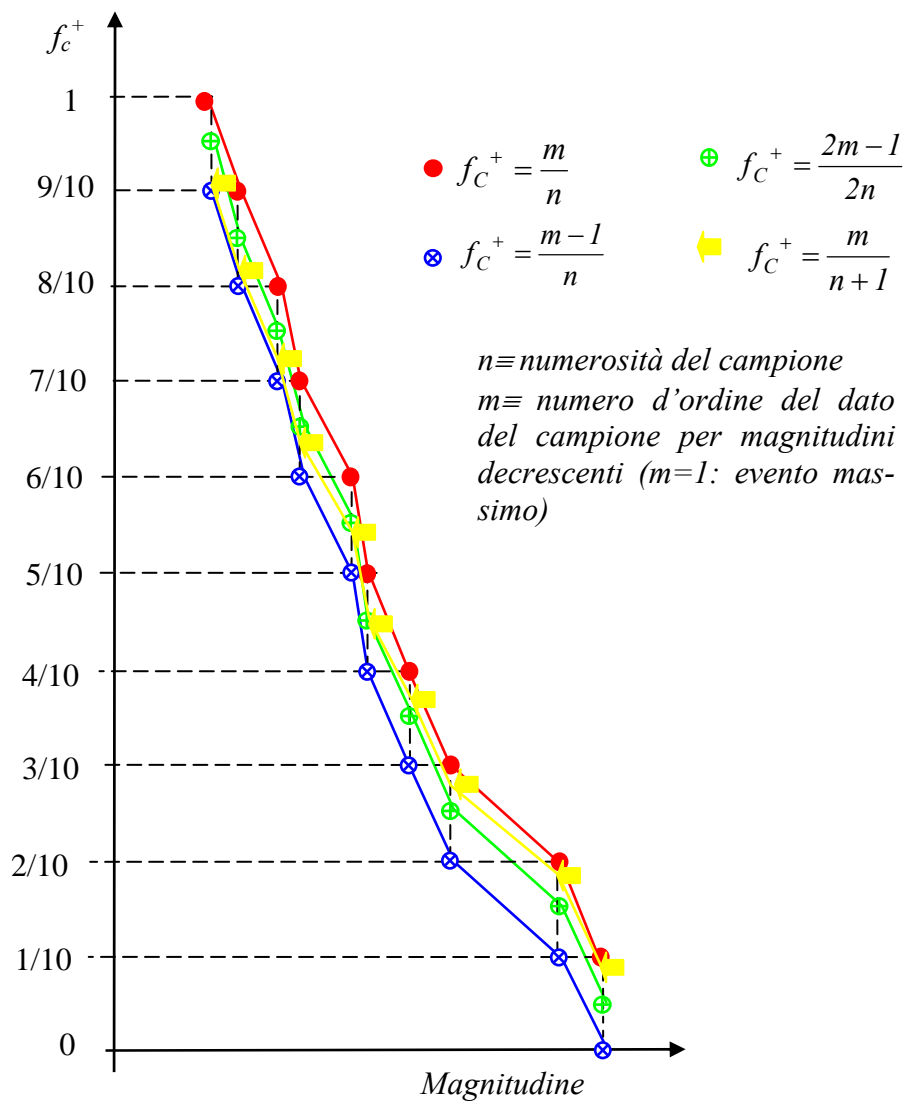


Capitolo 12

CRITERI PER LA SCELTA DELL'ONDA DI PROGETTO



Diagrammi delle frequenze cumulate superiori f_c^+ delle magnitudini di una serie annuale di 10 accadimenti per alcuni dei diversi modi di definire tali frequenze

12.1 SERIE ANNUALI E SERIE LIMITATE INFERIORMENTE

Gli eventi di origine meteorica che interessano le infrastrutture civili, siano esse dighe, ponti, porti o altro, vengono raccolti in serie annuali di dati o in serie limitate inferiormente. Per *serie annuali* si intendono gli insiemi dei valori osservati di numerosità pari al numero di anni di osservazione. In particolare, le *serie dei massimi (minimi) annuali* contengono i valori massimi (minimi) annuali, e solo i massimi (minimi), estratti dalla popolazione dei dati raccolti in un dato arco temporale. Naturalmente, fissata l'attenzione sui massimi, può capitare che il secondo, il terzo evento, ... ecc. in ordine di magnitudine di qualche anno sia superiore al massimo di altri anni, cosicché, trascurare tali dati, può comportare una perdita di informazione sulle caratteristiche degli eventi estremi visti in termini di variabile aleatoria. Per rimediare a questo inconveniente si ricorre, specialmente quando si dispone di pochi anni di osservazione, all'estrazione di tutti i dati non inferiori ad una assegnata magnitudine. La serie così ottenuta è nota col nome di *serie limitata inferiormente*. In particolare, una serie limitata inferiormente, composta da un numero di dati pari al numero di anni di osservazione, si dice *serie annuale di eccedenza* ed è, in generale, una serie differente dalla corrispondente serie dei massimi annuali.

Se si dispone di una serie di massimi annuali di N anni abbastanza estesa e si considera un evento di magnitudine H , la probabilità $P^+(H)$ di avere come massimo in un dato anno un evento di magnitudine uguale o superiore ad H è data dalla relazione approssimata, valida in teoria per $N \rightarrow \infty$

$$P^+(H) = \frac{pN}{N}, \tag{12.1}$$

essendo pN il numero degli eventi non inferiori ad H , e p una frazione propria ($p < 1$). L'inverso dell'eq. (12.1) è l'intervallo di tempo medio che intercorre tra due eventi di magnitudine non inferiore ad H

$$T_R(H) = \frac{1}{P^+(H)}. \tag{12.2}$$

T_R è l'intervallo di tempo che intercorre in media tra due eventi non inferiori ad H . tale intervallo temporale è detto *tempo di ritorno* ed è misurato in anni perché la serie da cui deriva è composta dai soli massimi annuali. La validità dell'eq. (12.2) sarà dimostrata nel § 12.3.

Analogamente a quanto ora detto per la serie annuale, se si dispone di una serie limitata inferiormente di N_L elementi e si considera ancora un evento di magnitudine uguale o superiore ad H , la probabilità $P_L^+(H)$ di incontrare un evento di magnitudine non inferiore ad H è data dalla relazione approssimata, valida in teoria per $N_L \rightarrow \infty$

$$P_L^+(H) = \frac{p_L N_L}{N_L}, \tag{12.3}$$

essendo $p_L N_L$ il numero degli eventi superiori ad H e p_L una frazione propria ($p_L < 1$) L'inverso dell'eq. (12.3) è il numero medio di eventi che intercorre tra due eventi di magnitudine non inferiore ad H

$$I_R(H) = \frac{1}{P_L^+(H)}. \quad (12.4)$$

I_R viene detto *intervallo di ricorrenza* di una serie limitata inferiormente.

Il tempo di ritorno e l'intervallo di ricorrenza hanno significati differenti: il primo, essendo derivato da eventi massimi annuali, fornisce il numero di anni che in media intercorrono tra due eventi di data magnitudine; il secondo, essendo privo del riferimento annuale, ha solo il significato di ricorrenza dell'evento di assegnata magnitudine. Ad esempio, se per un evento di magnitudine H si è trovato $I_R = 10$ significa che, in media, un evento ogni 10 si presenta con magnitudine H . Nondimeno, tra i due parametri esiste un legame stretto (Chow, 1964).

Se $P_L^+(H)$ è la probabilità di un evento di magnitudine uguale o superiore ad H di una serie limitata inferiormente composta da λN eventi, essendo λ il numero medio di eventi per anno ed N il numero degli anni ($\lambda \geq 1$ se si adotta l'accorgimento di comprendere nella serie tutti i massimi annuali), allora $\lambda P_L^+(H)$ è il numero medio di eventi di magnitudine uguale o superiore ad H osservati in un anno (in λ "prove" o "estrazioni" mediamente effettuate in un anno). Il suo inverso è quindi il numero medio di anni tra due eventi, ossia, per definizione, il tempo di ritorno dell'evento dedotto dalla serie limitata inferiormente:

$$T_L = \frac{1}{\lambda P_L^+(H)}.$$

La probabilità di osservare un evento di magnitudine minore o uguale ad H (in una "prova-estrazione") sarà pertanto

$$P_L^-(H) = P_L(H) = 1 - P_L^+(H).$$

Il numero medio di eventi di magnitudine minore o uguale ad H osservati in un anno è

$$\lambda P_L^-(H) = \lambda [1 - P_L^+(H)] = \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda T_L} \right)$$

Nel corso di un anno, la probabilità di non osservare alcun evento di magnitudine maggiore o uguale ad H (che si indicherà come evento di *non superamento*) coinciderà con la probabilità di osservare, mediamente, ogni anno, λ eventi tutti di magnitudine inferiore ad H . Assumendo che i λ eventi mediamente osservati in un anno siano stocasticamente indipendenti, tale probabilità sarà esprimibile come prodotto delle probabilità dell'evento di non superamento in ciascuna delle λ "prove" annuali.

Come argomentato nel capitolo 9 in sede di valutazione della distribuzione di probabilità delle onde di altezza massima in una serie di numerosità N , l'evento "il valore massimo di H è maggiore del valore H_{max} " equivale all'evento "uno o più valori di H sono maggiori di H_{max} ". Pertanto, la probabilità di osservare in un anno un valore di altezza massima maggiore del valore H fissato è data da

$$P^+(H) = 1 - [1 - P_L^+(H)]^\lambda = 1 - \left[1 - \frac{1}{\lambda T_L} \right]^\lambda = 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{\lambda T_L} \right)^{\lambda T_L} \right]^{1/T_L}. \quad (12.5)$$

Tab. 12. I. Tempi di ritorno della stessa variabile aleatoria, desunti da serie di massimi annuali e da serie limitate inferiormente.

T_R (anni)	2	5	10	20	50	100	200
T_L (anni)	1.4	4.5	9.5	19.5	49.5	99.5	199.5
$\Delta = \frac{T_R - T_L}{T_R} \times 100$	30.0%	10.0%	5.0%	2.5%	1.0%	0.5%	0.25%

Per valori di H non troppo piccoli (ossia di probabilità P_L^+ sufficientemente piccola), al posto del termine tra le parentesi tonde all'ultimo membro può porsi il suo valore limite e^{-1} . Inoltre, ricordando che nell'eq. (12.5) il primo membro è per definizione la probabilità di osservare un massimo annuale di magnitudine uguale o superiore ad H , si ha

$$P^+(H) = 1 - \exp(-1/T_L). \tag{12.6}$$

Tenuto conto dell'eq. (12.2), l'eq. (12.6) dà luogo alla seguente espressione che lega i tempi di ritorno definiti sulla base della serie limitata inferiormente e della serie dei massimi annuali

$$T_L(H) = \frac{1}{\ln T_R(H) - \ln [T_R(H) - 1]}. \tag{12.7}$$

Nella Tab. 12. I sono riportati i tempi di ritorno dedotti da una serie annuale di eventi e da una serie limitata contenente la serie annuale. Si può notare che al crescere del tempo di ritorno della serie annuale, T_R , il tempo di ritorno della serie limitata inferiormente, T_L , tende, numericamente, ad avvicinarsi sempre più a tempo di ritorno T_R , restandone però sempre inferiore. Infatti, se il tempo di ritorno T_R è di soli 2 anni, il corrispondente valore di T_L è di 1.4 anni, ossia del 30% inferiore, mentre se il tempo di ritorno T_R è di 10 anni, T_L è pari a 9.5 anni, ossia del 5% inferiore; infine, se il periodo di ritorno è di 200 anni, T_L è pari a 199.5 anni, che è appena inferiore dello 0.25%.

All'atto pratico, questa constatazione porta a concludere che se si identifica il tempo di ritorno di un dato evento dedotto da una serie limitata inferiormente con il tempo di ritorno dello stesso evento come massimo annuale non si commette alcun errore importante, purché l'evento sia relativamente raro, ossia la sua probabilità di osservazione nella singola "prova-estrazione", $P_L^+(H)$, sia sufficientemente piccola, ovvero, ancora in altri termini, che il tempo di ritorno stesso sia abbastanza grande.

Si rimarca che l'eq. (12.7) vale qualora le serie siano composte da eventi statisticamente indipendenti. Allo scopo di verificare l'esistenza di tale requisito, occorre entrare nel dettaglio della serie dei dati disponibili per controllarne l'indipendenza statistica ed evitare di inserire dati appartenenti allo stesso evento fisico, come ad esempio valori misurati in due anni contigui determinati da un unico evento meteorico protrattosi a cavallo della fine d'anno, che, ovviamente, non sono statisticamente indipendenti.

12.2 CONSIDERAZIONI SUI CAMPIONI DI DATI

I dati di origine meteorica possono essere raccolti in continuo oppure, per poterli gestire adeguatamente e contenerli, ad ore convenzionalmente prestabilite (le *ore sinottiche prin-*

cipali e intermedie: 0:00, 3:00, 6:00, . . . , 21:00). Dal punto di vista dell'acquisizione si distinguono fenomeni variabili con gradualità, quali ad esempio le maree (che però non sono eventi soltanto meteorici), la temperatura, la pressione atmosferica, le portate dei corsi d'acqua in una data sezione ecc. e fenomeni variabili rapidamente che, per essere raccolti compiutamente, richiedono un certo tempo di esposizione dello strumento di misura. Dopo un'adeguata elaborazione di questi dati si ottiene un dato sintetico che, convenzionalmente, viene poi attribuito ad una certa ora. Ad esempio, un dato di moto ondoso, per essere raccolto, necessita di un'esposizione dello strumento per un intervallo minimo dell'ordine dei 20 minuti primi. La registrazione così raccolta, una volta elaborata e tradotta quindi in spettro di frequenza o direzionale, viene attribuita allo stato del moto ondoso dell'istante in cui è stata ultimata. Di solito l'ora di attribuzione è un'ora sinottica e quindi il rilievo del moto ondoso ha sempre inizio circa 20 minuti prima di tale ora. L'insieme dei dati resi sintetici e archiviati costituisce la *raccolta storica dei dati*.

Come si è detto nel § 10.6, la raccolta storica RON del moto ondoso dei mari italiani, iniziata nel luglio 1989, è composta dai dati degli spettri direzionali o, più sinteticamente, da altezza significativa, periodo di picco, periodo medio e direzione, riferiti alle ore sinottiche. Per uno studio degli eventi estremi, che bisogna affrontare per le verifiche delle infrastrutture, occorre estrarre dalla raccolta storica gli eventi eccezionali che, molto sinteticamente, saranno rappresentati dalle massime altezze significative e associate direzioni, periodi di picco e medi. Estrahendo le sole altezze significative massime annuali e i relativi periodi per le direzioni di prestabiliti settori di provenienza, si ottengono tante serie annuali quanto sono i settori.

La serie annuale, che si può estrarre dalla raccolta RON fino a tutto l'anno 2004, è composta di soli 15 elementi per ciascun settore. Due massimi annuali, appartenenti a settori molto diverse, non possono essere considerati omogenei in quanto prodotti da condizioni meteorologiche diverse e quindi non possono essere introdotti entrambi in una stessa elaborazione di ricerca degli eventi estremi, ma ciascuno di essi dovrà essere esaminato unitamente ai dati appartenenti ad analoghe condizioni meteorologiche. La scelta dei settori di appartenenza degli eventi è necessaria per ottenere l'omogeneizzazione dei dati.

Molto spesso, essendo ridotto il numero di anni di osservazione, le serie annuali possono essere poco rappresentative per la valutazione degli eventi estremi. Si può allora ricorrere all'uso delle serie limitate inferiormente la cui scelta può essere giustificata considerando che esistono anni in cui il secondo, il terzo evento, ...etc., in ordine di magnitudine decrescente, sia superiore al massimo osservato in altri anni, per cui, se si accettano come eventi eccezionali questi ultimi, a maggior ragione si devono accettare quelli di più alta intensità, anche se secondi o terzi, ...etc. di altri anni. Inoltre, come si è visto, la serie limitata inferiormente fornisce tempi di ritorno che si avvicinano tanto più al tempo di ritorno ottenuto con la serie annuale quanto più detto tempo è grande.

L'analisi delle serie campionarie comporta la necessità di controllare l'indipendenza statistica dei dati. Se per le serie annuali di massimi la possibilità di includere eventi statisticamente non indipendenti è limitata al caso della tempesta di fine anno in cui il massimo dell'anno precedente appartiene alla stessa tempesta di quello dell'anno successivo, per le serie limitate inferiormente la valutazione è meno semplice e include in sé, in effetti, il problema stesso di definizione del valore da assumere come rappresentativo della tempesta. È infatti evidente che il secondo dato di un anno, in ordine di intensità, può essere proprio quello osservato dopo sole 3 ore dal massimo annuale di quell'anno. In tal caso l'indipendenza statistica dei due dati non sussiste. Per ovviare a questo inconveniente occorre stabilire un criterio di scelta dei dati da introdurre nella serie. Due dati appartenenti a

tempeste diverse sono indubbiamente indipendenti; si tratta quindi di stabilire un criterio di distinzione delle tempeste. A tale proposito, in primo luogo si può stabilire un'altezza significativa di soglia, al di sotto della quale il moto ondoso non è da considerarsi di tempesta, ma semplicemente come *rumore di fondo* del mare. Tale soglia per il Mediterraneo è stata individuata in $H_{soglia}=1.5\text{ m}$ (Boccotti, 1997). Valori osservati di altezza d'onda superiori all'altezza di soglia appartengono, dunque, ad una tempesta. Inoltre, la tempesta continua anche se l'altezza dell'onda si riduce a valori inferiori della soglia, purché la durata di tale riduzione sia inferiore ad un tempo massimo prestabilito che per il Mediterraneo può essere fissato in 12 ore. Nella Fig. 12. 1 sono riportati tre esempi di tempeste del Mediterraneo analizzate con i criteri ora esposti.

Una volta individuate le tempeste, per essere certi che tutti i valori di altezza d'onda introdotti nella serie limitata inferiormente siano statisticamente indipendenti, basta introdurre in essa solo i valori massimi di tali tempeste.

Resta da stabilire il criterio di omogeneità dei dati da utilizzare nella elaborazione degli eventi estremi. Ciò è necessario perché, se i dati che si adoperano per passare alla distribuzione degli eventi estremi non sono omogenei, anche supposto di aver scelto la distribuzione ottimale, si rischia di determinare i relativi parametri in modo errato in quanto condizionati appunto dall'assenza di omogeneità. Nella scelta del limite di separazione di due settori ci si può orientare, in prima battuta, ricorrendo alle conoscenze di tipo climatico.

Come si è detto a proposito del regime dei venti, con riferimento al Mediterraneo si può affermare che ciascuno di questi venti produce sul mare lo stesso regime di tempesta, dunque, per verificare l'omogeneità dei dati basta che essi vengano raggruppati per settori di provenienza dei venti che li generano. In considerazione del fatto che certi regimi di venti sono più frequenti e intensi di altri, si può verificare se ciò ha un riscontro anche sul moto ondoso raggruppando i dati della serie storica per direzione di appartenenza e tracciando un grafico che in ascisse riporta le direzioni e in ordinate il corrispondente numero di volte che il dato della serie storica viene osservato, ponendo anche una condizione sulle altezze d'onda: ad esempio, considerando solo le onde di altezza superiore a 1.5 m. Il grafico così tracciato, che potrà essere chiamato "delle frequenze assolute delle altezze d'onda superiori ad un limite fissato", in generale, presenta massimi e minimi: i massimi potranno rappresentare le direzioni principali del moto ondoso, i minimi i limiti di separazione dei settori di tempeste omogenee.

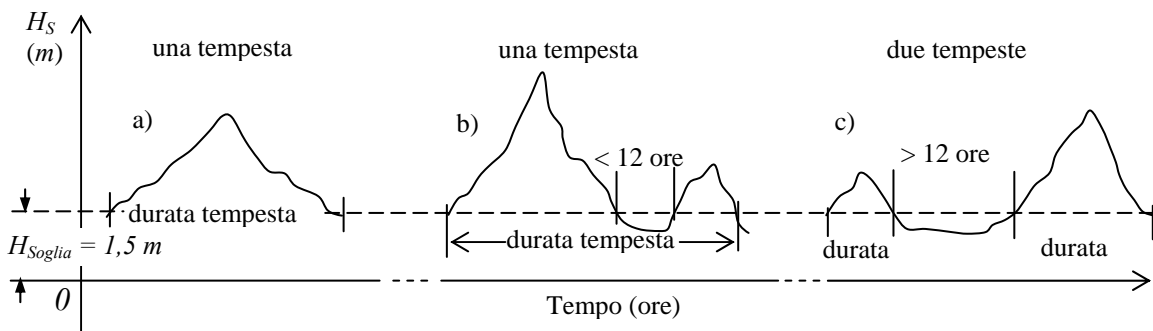


Fig. 12. 1. Tre esempi di tempeste di mare: a) tempesta ad un solo picco; b) tempesta a due picchi; c) due tempeste ad un picco.

Nella Fig. 12. 2 è riportato il grafico delle frequenze assolute della serie storica di moto ondoso registrata ad Alghero dalla stazione RON fino al 1997. L'esame è esteso al settore $0 \div 180^\circ N$ comprendente le direzioni verso le quali, secondo la convenzione allora in uso della rete RON, è diretto il moto ondoso. Nella figura si individuano due massimi, corrispondenti alle direzioni di Maestrale ($125+180=305^\circ N$) e di Libeccio ($65+180=245^\circ N$). Come si è osservato nel § 4.5, le frequenti affluenze di masse d'aria fredda che entrano in Mediterraneo, prevalentemente incanalate attraverso le porte della Garonne e del Rodano, generano il Maestrale, vento spesso molto intenso, da cui la massima frequenza e altezza d'onda registrata ad Alghero in questa direzione. I venti di Libeccio, associati a centri depressionari di circolazione ciclonica nel mar Ligure, nelle coste occidentali della Sardegna si presentano di assai più modesta intensità e frequenza del Maestrale.

La Fig. 12. 2 permette di individuare due regimi omogenei di moto ondoso separati dalla direttrice compresa tra 80 e $90^\circ N$ ($80+180 = 260^\circ N$; $90+180 = 270^\circ N$). Si osservi, però, che detto limite di separazione tra i settori omogenei riguarda solo le direzioni delle tempeste al massimo di intensità. Può, infatti, capitare che le singole tempeste abbiano inizio partendo da direzioni esterne a tale limite e solo nella loro evoluzione assumano direzioni appartenenti ai suddetti settori omogenei. Comunque le tempeste saranno nominalmente attribuite al settore di appartenenza della massima altezza significativa.

Dunque, volendosi assicurare l'indipendenza e l'omogeneità delle tempeste, nella determinazione delle serie limitate inferiormente, non è sufficiente assumere semplicemente i valori delle altezze d'onda superiori ad un dato limite, ma occorre esaminare le diverse tempeste e assumere le massime altezze di queste.

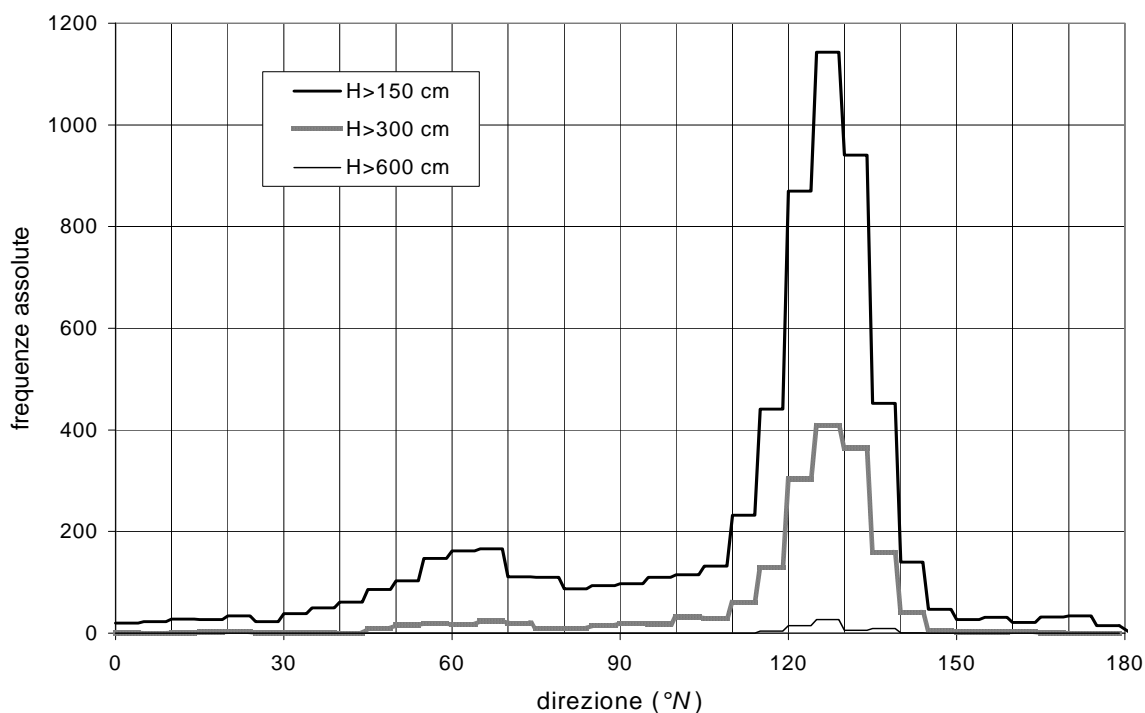


Fig. 12. 2. Frequenze assolute delle osservazioni nella stazione ondometrica di Alghero. Anni di osservazione (1989÷1997).

12.3 PERIODO DI RITORNO, DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ E FREQUENZE CUMULATE.

Data una serie annuale (il campione), ad esempio di n anni, di una variabile aleatoria, ci si propone di determinare la distribuzione di probabilità della variabile e , secondo quanto espresso nel § 12.1, il periodo medio di ritorno di singoli eventi.

L'evento di massima magnitudine si è verificato una volta negli n anni. Tuttavia, questa constatazione non autorizza a concludere che il periodo di ritorno dell'evento di tale magnitudine è n anni o, equivalentemente, che la probabilità di osservare il dato evento sia pari a $1/n$. Infatti, è comprensibile che in un'altra serie annuale della stessa variabile aleatoria, sempre di n anni, un evento della stessa magnitudine si possa verificare più di una volta o anche nessuna. È del resto evidente che la determinazione della funzione di distribuzione di probabilità, oppure la funzione di densità di probabilità, non può eseguirsi che sulla base dello studio delle frequenze di un campione estratto dalla serie storica, nella certezza che la frequenza osservata di un evento coincide con la sua probabilità soltanto al limite per $n \rightarrow \infty$.

Si tratta, in definitiva, di determinare in quale relazione stanno la probabilità di un evento di assegnata magnitudine ed il periodo di ritorno, inteso come periodo di ritorno medio. Allo scopo, si consideri tale periodo T come una variabile casuale indipendente che può assumere tutti i valori t , essendo questo un intero, misurato in anni, compreso tra 1 e ∞ . Se p è la probabilità che un evento di assegnata magnitudine ha di verificarsi per ogni dato anno, la probabilità che il periodo di ritorno T di tale evento sia uguale a t , ossia che un solo evento si verifichi nel tempo t , è data dalla probabilità composta di t valori di probabilità indipendenti: uno di probabilità di accadimento pari a p , e $t-1$ valori di probabilità di non accadimento, ciascuno pari a $1-p$. Nell'ipotesi di eventi statisticamente indipendenti si ha pertanto

$$P(T_R = t) = p(1-p)^{t-1} \quad (12.8)$$

Il valore medio del periodo di ritorno risulta quindi

$$E[T_R] = \sum_{t=1}^{\infty} t p(1-p)^{t-1} = \frac{1}{p} \quad (12.9)$$

L'eq. (12.9) mostra che, se il tempo a disposizione per l'osservazione è infinitamente lungo, il periodo di ritorno medio di un dato evento cui compete la probabilità di accadimento p coincide con l'inverso di p . Ma, per come è stata definita la probabilità di un evento che ha il periodo di ritorno T_R , deve essere

$$p = P^+(H), \quad (12.10)$$

dunque vale la relazione

$$E[T_R] = \frac{1}{p} = \frac{1}{P^+(H)} = T_R \quad (12.11)$$

La funzione $P = P(H)$, che come si è detto è il complemento ad uno della funzione $P^+(H)$, ossia

$$P(H) = 1 - P^+(H),$$

è la distribuzione di probabilità introdotta nel capitolo 9, che rappresenta la probabilità che hanno di verificarsi, cumulativamente, tutti gli eventi di magnitudine non superiore ad H (probabilità di non superamento). A seguito di queste precisazioni, introducendo nell'eq. (12.11) il periodo di ritorno medio dato dall'eq. (12.2), si ottiene la relazione che lega detto periodo di ritorno al valore corrispondente della funzione di distribuzione di probabilità

$$T_R = \frac{I}{P^+} = \frac{I}{I-P} \quad (12.12)$$

o, generalizzando al caso di una serie limitata inferiormente

$$T_L = \frac{I}{\lambda P^+} = \frac{I}{\lambda(I-P)} \quad (12.13)$$

e viceversa

$$P = \frac{T_R - I}{T_R}. \quad (12.14)$$

Naturalmente, la serie annuale disponibile è sempre finita e quindi, per determinare il periodo di ritorno medio di un dato evento, occorre individuare la funzione teorica che meglio interpreta la serie annuale, o quella limitata inferiormente. Tale funzione, che è da ricercare tra le varie forme disponibili, è la funzione distribuzione di probabilità $P = P(H)$ della variabile aleatoria H , o la corrispondente funzione di densità di probabilità, legata alla funzione di distribuzione di probabilità dalla relazione

$$p(H) = \frac{dP}{dH}. \quad (12.15)$$

Anche per rappresentare gli eventi estremi, sono disponibili, come si è già detto in generale nel § 9.2, numerose forme di funzioni utilizzabili per descrivere la densità di probabilità, o la distribuzione. L'adattamento di una di queste funzioni alla serie dei dati disponibile avviene mediante la determinazione dei relativi parametri. Tale adattamento deve farsi utilizzando le *frequenze cumulate* dei valori contenuti nella serie. Si distingue la *frequenza cumulata superiore* f_C^+ dalla *frequenza cumulata inferiore* f_C che è legata alla prima dalla relazione $f_C^+ + f_C = I$ e che, per analogia con la distribuzione di probabilità (probabilità cumulata) di cui essa è una stima, sarà chiamata semplicemente *frequenza cumulata*.

La frequenza cumulata dell'evento di assegnata magnitudine è solo una stima approssimativa della probabilità cumulata. Anzi, nel caso degli eventi eccezionali, l'insieme delle frequenze ottenibili è spesso costituito da un numero molto limitato. Gumbel (1958) ha stabilito alcuni requisiti per la determinazione delle frequenze cumulate superiori dei dati della serie:

- a) le frequenze cumulate superiori devono essere determinate utilizzando tutti i dati della serie;
- b) le frequenze cumulate superiori devono essere interne all'intervallo $(m-1)/n \div m/n$, essendo m il numero d'ordine decrescente dei dati ed n il numero dei dati della serie ($m=1$ per l'evento massimo);
- c) il periodo di ritorno dell'evento massimo osservato, o maggiore del massimo, deve avvicinarsi ad n ;

- d) le osservazioni devono essere equispaziate nella scala delle frequenze cumulate superiori;
- e) la forma della frequenza cumulata superiore deve avere un significato intuitivo e deve essere analiticamente semplice.

Una forma semplice della frequenza cumulata superiore è data dall'espressione

$$f_C^+ = \frac{m}{n}. \tag{12.16}$$

Essa è però difettosa in quanto per $m = n$ fornisce $f_C^+ = 1$ che è in contrasto con la condizione di serie limitata e quindi incapace di rappresentare tutti i possibili eventi, come invece la condizione $f_C^+ = 1$ porterebbe a concludere. D'altra parte la condizione

$$f_C^+ = \frac{m-1}{n}, \tag{12.17}$$

pur superando l'inconveniente evidenziato, cade in difetto nel caso di $m = 1$ che corrisponde all'evento massimo della serie, per il quale si avrebbe $f_C^+ = 0$, ossia, contrariamente all'evidenza dell'osservazione, una stima *nulla* della probabilità di superamento di questo evento. Gli inconvenienti delle eq. (12.16) e (12.17) possono essere superati facendo la media delle due, ossia assumendo come frequenza cumulata superiore l'espressione

$$f_C^+ = \frac{2m-1}{2n}, \tag{12.18}$$

che però non rispetta la condizione c) di Gumbel in quanto porta alla conclusione che il periodo di ritorno dell'evento massimo sarebbe di $2n$, pari ad un tempo di ritorno doppio della popolazione di dati della serie. Nella Fig. 12. 3 è riportato uno schema grafico della distribuzione delle frequenze cumulate superiori estratte da una ipotetica serie annuale di 10 anni. Si nota, in particolare, la riduzione dei dati utili che comporta la rinuncia al valore minimo della serie in quanto per tale dato è $f_C^+ = 1$, nel caso in cui si adotti la definizione dell'eq. (12.16), o la rinuncia al massimo della serie, nel caso in cui si adotti la definizione dell'eq. (12.17), in quanto per tale dato è $f_C^+ = 0$.

Nella figura è riportata anche la posizione della frequenza cumulata superiore ottenuta mediante l'equazione

$$f_C^+ = \frac{m}{n+1}. \tag{12.19}$$

Quest'ultima definizione della frequenza cumulata soddisfa a pieno le cinque condizioni di Gumbel. Infatti, le frequenze cumulate superiori risultano ripartite uniformemente, con il passo $1/(n+1)$, nell'intervallo $0 \div 1$; il valore minimo delle frequenze cumulate è maggiore di zero ed il valore massimo è minore di uno; il periodo di ritorno medio dell'evento massimo della serie di n dati è di $n+1$ anni, che rispetta tanto meglio la condizione c) quanto più n è grande.

Esistono altri modi di definire la frequenza cumulata superiore, ma l'ultimo criterio esposto, godendo più degli altri della semplicità dell'espressione-condizione e) di Gumbel, è quello più diffusamente adottato e verrà usato anche nel seguito.

12.4 SCELTA DELLA DISTRIBUZIONE E CALCOLO DEI PARAMETRI

Nella verifica di un'infrastruttura esposta al moto ondoso è fondamentale la conoscenza dell'evento di massima intensità (espresso sinteticamente come altezza e periodo dell'onda significativa e noto con il nome di *onda di progetto*) cui detta infrastruttura potrà essere esposta nell'arco temporale del suo esercizio. Questo arco temporale, cui si dà il nome di *vita di progetto* e si misura in *anni*, può essere stabilito, come si vedrà più avanti, in funzione del tipo di opera, del livello di sicurezza nel quale essa si dovrà trovare per assolvere alle sue funzioni e, considerato il livello di rischio per la vita umana, della probabilità di danneggiamento che per essa si potrà accettare. Stabilita la vita di progetto si tratta di stimare quale potrà essere l'evento di moto ondoso critico cui l'infrastruttura potrà essere esposta, avendo a disposizione una serie storica di dati osservati da cui si potrà estrarre la serie annuale o una serie limitata inferiormente. Naturalmente, più la serie degli eventi statisticamente indipendenti è estesa, più sarà affidabile la funzione di distribuzione di probabilità o la relativa densità che la interpreta.

Sono disponibili diverse forme della funzione probabilità e delle relative distribuzioni, continue e discrete. Tra le funzioni continue, per definire la magnitudine dell'evento in funzione della probabilità di accadimento, sono molto usate nelle costruzioni marittime quella di Gumbel e quella di Weibull. Tra le distribuzioni discrete è molto usata quella di Poisson, che è adatta per la valutazione del rischio che l'evento si verifichi durante la vita di progetto.

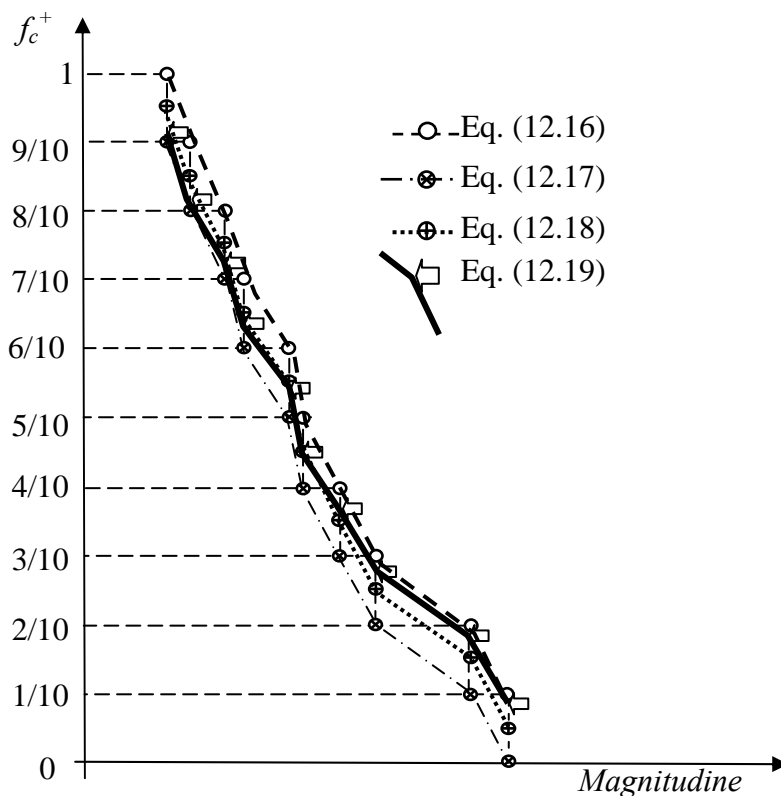


Fig. 12. 3. Forme diverse assunte dalla frequenza cumulata delle magnitudini di una serie annuale di 10 eventi estremi per alcuni dei possibili modi di definire tale frequenza.

Una volta che sia disponibile la serie annuale o la serie limitata inferiormente, si pone il problema di scegliere la distribuzione più adatta, sempre che essa esista. Si tratta di un aspetto delicato del problema in quanto i dati disponibili sono sempre limitati e quindi ristretti a periodi di ritorno piccoli, mentre gli eventi che si cercano, in generale, hanno periodi di ritorno grandi (interessa cioè conoscere quella distribuzione la cui coda interpreti al meglio l'evento cercato). Molte distribuzioni hanno forme analoghe nella zona centrale, ma differiscono notevolmente nella coda. Può quindi capitare che il corpo centrale della distribuzione si adatti bene ai dati sperimentali, ma che la coda se ne discosti e, quindi, si stimino tempi di ritorno anche molto diversi da quelli più adatti per gli eventi estremi del sito. Tests di adattabilità ottimale, tipo il test del chi-quadro o simili, possono essere usati per scegliere la distribuzione che meglio si adatta ai dati sperimentali, ma con questo non si supera il problema di base.

Comunque, una volta fatta la scelta della distribuzione si pone il problema di scegliere il criterio di stima dei suoi parametri. Anche questa operazione è fonte di errori in quanto, appoggiandosi ai dati misurati, soffre degli errori di questi, per cui la ottimizzazione della stima dei parametri della distribuzione deve tendere a rendere minimi gli errori.

Esistono quattro metodi per determinare i coefficienti delle distribuzioni:

1. il metodo dei momenti;
2. il metodo della massima verosimiglianza;
3. il metodo dei minimi quadrati;
4. il metodo grafico.

12.4.1 IL METODO DEI MOMENTI

Questo metodo consiste nel calcolare i valori dei q parametri della distribuzione in modo che i primi q momenti rispetto all'origine, o quelli centrali (fatti rispetto al valore medio), di una data distribuzione $p(x)$

$$m'_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x) dx, \tag{12.20}$$

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m'_1)^r p(x) dx, \tag{12.21}$$

risultino uguali alle corrispondenti stime campionarie. In concreto, uguagliando il valore medio $m'_1 = \mu$, dato dall'equazione (12.20) per $r = 1$, al valore campionario medio

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tag{12.22}$$

si ottiene una prima equazione con tante incognite quanti sono i parametri. Una seconda equazione si ottiene uguagliando la varianza del campione

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \tag{12.23}$$

al momento centrale del secondo ordine (varianza) della distribuzione

$$s^2 = m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx. \tag{12.24}$$

Alla stessa maniera, una terza equazione si ottiene calcolando il momento centrale del terzo ordine del campione

$$\kappa_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad (12.25)$$

e uguagliandolo al momento centrale del terzo ordine della distribuzione

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^3 p(x) dx, \quad (12.26)$$

e così via, fino ad ottenere un sistema di tante equazioni quante sono le variabili da stimare. Risolvendo il sistema si determinano i parametri della distribuzione.

12.4.2 IL METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Più efficace, ma più complesso da applicare, è il metodo della *massima verosimiglianza* (*Maximum Likelihood, ML*) che assume come stima dei parametri la q -upla che rende massima la probabilità di estrazione del campione, intesa come probabilità composta di eventi statisticamente indipendenti. Scelta la distribuzione avente la densità di probabilità $p = p(x; \alpha, \beta \dots)$, per ogni valore della serie, x_i , si può scrivere la relativa densità $p_i = p(x_i; \alpha, \beta \dots)$ e quindi la densità di probabilità di estrazione dell'intera serie

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i; \alpha, \beta \dots). \quad (12.27)$$

Il valore massimo di tale probabilità (condizione di massima verosimiglianza) si ottiene derivando l'eq. (12.27) rispetto ai parametri $\alpha, \beta \dots$ e uguagliando a zero le derivate. Si ottiene così un sistema di tante equazioni quante sono i coefficienti della distribuzione.

12.4.3 IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

Meno efficace dei precedenti due è il metodo dei minimi quadrati, il quale, stabilita la funzione di distribuzione $P = P(x; \alpha, \beta \dots)$, si basa sulla condizione di minimo della somma degli scarti quadratici

$$\Delta = \sum_{i=1}^n [f_{Ci} - P(x_i; \alpha, \beta \dots)]^2, \quad (12.28)$$

ove f_{Ci} è la frequenza cumulata corrispondente alla i -esima osservazione di magnitudine x_i . Derivando l'eq. (12.28) rispetto ad $\alpha, \beta \dots$ e uguagliando a zero, si ottiene ancora un sistema di tante equazioni quanti sono i parametri incogniti. Nonostante il suo largo uso, il metodo dei minimi quadrati non sempre è efficace per il calcolo dei parametri.

12.4.4 IL METODO GRAFICO

Il quarto metodo, definito grafico, considerato il meno efficace di tutti per la sua soggettività, consiste nel tracciare in un diagramma, ove sono state preventivamente riportate le coppie di valori magnitudine-frequenza cumulata, la curva che meglio interpola i dati. In particolare, l'impiego di carte statistiche consente di utilizzare una trasformazione delle variabili tale che la curva di distribuzione di probabilità assuma una forma relativamente semplice, tipicamente una retta, dalla quale, una volta tracciata sul diagramma, sia agevole determinare i parametri della distribuzione originaria.

12.5 FATTORE DI FREQUENZA

Una volta determinati i parametri, la distribuzione è nota. La sua utilizzazione pratica, nella determinazione dell'evento di assegnato tempo di ritorno, si basa sull'uso dell'eq. (12.12) o (12.13) e presuppone che sia esplicitabile la funzione distribuzione di probabilità. Tale caratteristica non è tuttavia sempre verificata, anche per distribuzioni relativamente semplici o, comunque, di uso frequente, come la distribuzione normale.

Al fine di semplificare i calcoli delle analisi degli eventi estremi, Chow (1964) ha proposto una semplice equazione generale che rappresenta la magnitudine dell'evento come la somma del valore medio della distribuzione e di uno scarto dalla media proporzionale alla deviazione standard della distribuzione. Tale equazione recita

$$x_T = \mu + K_T \sigma, \quad (12.29)$$

essendo x_T la magnitudine di un evento di periodo di ritorno T , μ e σ rispettivamente il valore medio e la deviazione standard della distribuzione. K_T è il *fattore di frequenza* che è funzione del periodo di ritorno e del tipo di distribuzione. Per ogni distribuzione scelta, esiste cioè una relazione che lega il periodo di ritorno con il fattore di frequenza.

L'equazione (12.29) può scriversi, in modo approssimato, utilizzando la media \bar{x} e la deviazione standard s campionarie

$$x_T = \bar{x} + K_T s \quad (12.30)$$

le quali, peraltro, coincidono con i corrispondenti parametri stimati per la distribuzione se l'analisi è stata condotta con il metodo dei momenti imponendo l'uguaglianza della media e della varianza con i corrispondenti valori campionari.

12.6 ERRORE STANDARD E INTERVALLO DI CONFIDENZA DELLA STIMA

L'*errore standard* è la deviazione standard delle magnitudini degli eventi calcolate mediante la distribuzione, i cui parametri sono ottenuti in base ai valori del campione rispetto alla magnitudine vera degli eventi. Esso esprime la bontà della stima operata nella valutazione dei parametri della distribuzione, ma non esprime alcunché sulla scelta della forma della funzione distribuzione assunta. L'errore standard è definito dalla relazione

$$S_T = \delta \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \quad (12.31)$$

essendo δ una funzione del fattore di frequenza K_T ($\delta = \delta(K_T)$). L'errore standard è dunque funzione del periodo di ritorno T e per mettere in evidenza questo aspetto esso è stato indicato con S_T . Dato il tipo di distribuzione utilizzata nell'analisi statistica, esso potrà essere calcolato in funzione dei valori dei parametri della distribuzione, stimati con il metodo dei momenti o con il metodo della massima verosimiglianza.

Sulla base del valore dell'errore standard determinato, si può valutare in modo relativamente semplice l'*intervallo di confidenza* $\pm \Delta_c$ all'interno del quale il valore vero x_T^* , associato al periodo di ritorno T e calcolato con l'eq. (12.30), ricade rispetto al valore calcolato x_T con una assegnata probabilità (*livello di confidenza*). Si dice *livello di significatività* della stima la metà del complemento ad uno del livello di confidenza. Esso rappresenta la

probabilità che il valore vero x_T^* ricada in una delle due code della distribuzione interne all'intervallo di confidenza rispetto a x_T .

La determinazione dell'intervallo di confidenza può eseguirsi rigorosamente mediante un metodo analitico basato sulla determinazione della distribuzione della variabile aleatoria x_T in funzione della distribuzione di probabilità $P(x)$ della variabile x , determinata con uno dei metodi descritti in precedenza. Il procedimento è tuttavia piuttosto lungo e complesso. In alternativa, un metodo empirico speditivo per la determinazione dell'intervallo di confidenza Δ_C , basato sull'ipotesi che la distribuzione degli eventi di periodo di ritorno T sia una distribuzione normale, è dato dalla relazione

$$\Delta_C = t S_T, \quad (12.32)$$

in cui t è il frattile della distribuzione normale standardizzata corrispondente al livello di confidenza richiesto. Detto x_T^* il valore vero della variabile corrispondente al periodo di ritorno T si ha quindi

$$x_T - \Delta_C \leq x_T^* \leq x_T + \Delta_C,$$

con probabilità pari al livello di confidenza.

12.7 LE DISTRIBUZIONI CONTINUE

Si supponga di disporre di una serie di dati osservati con una assegnata frequenza, ad es. trioraria. Ogni anno della serie costituisce un campione di un numero fisso di osservazioni, pari a $N=2920+8B$ ($B = 1$ se l'anno è bisestile; $B = 0$ se l'anno non è bisestile) nel caso di osservazioni triorarie. Per n anni di osservazione si dispone di una popolazione di $n \times N$ dati. La distribuzione dei massimi annuali osservati, al crescere del numero n di anni di osservazione, tende asintoticamente ad una forma limite. La forma dell'andamento asintotico dipende dal tipo della distribuzione della serie degli $n \times N$ dati.

Fisher e Tippett (1929) hanno mostrato che esistono tre possibili soluzioni per la distribuzione dei massimi (o dei minimi):

- distribuzione tipo I (illimitata);
- distribuzione tipo II (limitata inferiormente);
- distribuzione tipo III (limitata superiormente).

12.7.1 LA DISTRIBUZIONE DI GUMBEL (ESTREMALE TIPO I)

Per la ricerca degli eventi estremi è molto usata la distribuzione tipo I, detta anche di Gumbel (1958), che costituisce la forma asintotica di una distribuzione iniziale di tipo esponenziale, quale, ad esempio, la distribuzione Normale o Lognormale. La sua forma è

$$P(x) = \exp\{-\exp[-\alpha(x - \beta)]\}. \quad (12.33)$$

La corrispondente densità di probabilità è

$$p(x) = \alpha \exp\{-\alpha(x - \beta) - \exp[-\alpha(x - \beta)]\}. \quad (12.34)$$

L'inverso di α è detto *parametro di scala* e β è detto *parametro del posto* (*location parameter*).

L'eq. (12.33) esprime la probabilità cumulata degli eventi non superiori ad x ; essa è illimitata ($-\infty < x < +\infty$): vale zero per $x \rightarrow -\infty$ e vale 1 (certezza dell'accadimento) per $x \rightarrow +\infty$.

Introducendo la variabile ridotta $y = \alpha(x - \beta)$ si svicola la distribuzione dalla contingenza della particolarità della serie cui le eq. (12.33) e (12.34) sono vincolate. Si ha così

$$P(y) = \exp[-\exp(-y)], \quad (12.35)$$

$$p(y) = \exp[-y - \exp(-y)]. \quad (12.36)$$

12.7.1.1 Stima dei Parametri della Distribuzione di Gumbel

Lowery e Nash (1970) hanno esaminato diversi metodi di stima dei parametri della distribuzione estrema tipo I riscontrando che il metodo della massima verosimiglianza è il più efficace; tuttavia, essi raccomandano il metodo dei momenti per la sua semplicità e per la mancanza di distorsione¹ (*bias*). Per questo, nel seguito, ci si limita all'applicazione di questo metodo.

Il momento di ordine r della densità di probabilità (12.36) è dato dalla relazione

$$m'_{y,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^r \exp[-y - \exp(-y)] dy. \quad (12.37)$$

Ponendo $z = \exp(-y)$, essendo $dy = -\frac{dz}{z}$, l'eq. (12.37) diventa

$$m'_{y,r} = \int_{\infty}^0 (-\ln z)^r \exp(-z) dz. \quad (12.38)$$

Il momento del primo ordine risulta dunque

$$m'_{y,1} = -\int_0^{\infty} \ln z \exp(-z) dz, \quad (12.39)$$

che è la costante di Eulero-Mascheroni: $\gamma_E = 0.5772$. Ritornando alla variabile originaria x , si ha

$$m'_{x,1} = \frac{m'_{y,1}}{\alpha} + \beta = \frac{\gamma_E}{\alpha} + \beta. \quad (12.40)$$

Come è stato mostrato da Gumbel (1958), il momento centrale del secondo ordine è dato dalla relazione

$$m_{x,2} = \frac{m_{y,2}}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}. \quad (12.41)$$

Sostituendo al primo membro delle eq. (12.40) e (12.41) rispettivamente il valor medio \bar{x} e la varianza s^2 campionarie, si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite α e β che fornisce i seguenti risultati

¹ Uno stimatore $E(W_n)$ di un parametro θ si dice *corretto* (*unbiased*, non distorto) quando $E(W_n) = \theta$. In caso contrario lo stimatore si dice *distorto* e il relativo scarto del valore atteso dal valore vero è detto *errore sistematico* (*bias*).

$$\alpha = \frac{1.2825}{s}, \quad (12.42)$$

$$\beta = \bar{x} - 0.4500 s \quad (12.43)$$

I coefficienti di *asimmetria* (skewness) e *curtosi* (momenti centrali del terzo e quarto ordine normalizzati rispettivamente con il cubo e la quarta potenza della deviazione standard) della distribuzione estrema del tipo I sono delle costanti e valgono rispettivamente

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{(m_{x2})^{3/2}} = 1.14 \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{m_4}{(m_{x2})^2} = 5.40.$$

12.7.1.2 Fattore di Frequenza della Distribuzione di Gumbel

Sostituendo al primo membro dell'eq. (12.35) l'eq. (12.14) ed esplicitando rispetto ad y si ottiene la relazione

$$y_T = -\ln\left(-\ln\frac{T_R - I}{T_R}\right), \quad (12.44)$$

ove il pedice T della variabile ridotta sta a significare che tale variabile è calcolata per il periodo di ritorno T_R . In particolare, data una serie di n elementi disposti in ordine decrescente, con il pedice m che assume il valore I per il massimo della serie ed il valore n per il minimo, il tempo di ritorno che compete all' m -esimo termine, assimilando la probabilità cumulata alla corrispondente frequenza e assumendo per questa l'espressione data dall'eq. (12.19), si ha

$$T_R = \frac{I}{I - f_C} = \frac{I}{f_C^+} = \frac{n + I}{m}, \quad (12.45)$$

che, sostituita nell'eq. (12.44), fornisce

$$y_m = -\ln\left(-\ln\frac{n + I - m}{n + I}\right), \quad (12.46)$$

ove il pedice m della variabile ridotta significa che tale variabile è calcolata per l'evento la cui magnitudine ha la m -esima posizione. Mediante l'eq. (12.46) si può ricostruire una volta per tutte la serie degli n valori della variabile ridotta. Si può quindi calcolare la media di questa serie

$$\bar{y} = \frac{I}{n} \sum_{m=I}^n y_m \quad (12.47)$$

e la varianza

$$s_y^2 = \frac{I}{n - I} \sum_{m=I}^n (y_m - \bar{y})^2. \quad (12.48)$$

Introducendo il valore ottenuto dall'eq. (12.48) nella prima delle eq. (12.41) e calcolando la deviazione standard s della serie campionaria dei dati della variabile originaria, si ottiene la relazione

$$s = \frac{s_y}{\alpha}. \quad (12.49)$$

Analogamente, introducendo il valore ottenuto dall'eq. (12.47) nella prima delle eq. (12.40) e calcolando la media \bar{x} dei valori della serie campionaria dei dati della variabile originaria, si ottiene

$$\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\alpha} + \beta. \quad (12.50)$$

Dalle eq. (12.49) e (12.50) si possono quindi ricavare i parametri α e β

$$\alpha = \frac{s_y}{s}, \quad (12.51)$$

$$\beta = \bar{x} - \frac{\bar{y}}{s_y} s. \quad (12.52)$$

Ricordando che tra la variabile ridotta y_T e la variabile aleatoria x_T esiste la relazione

$$y_T = \alpha(x_T - \beta), \quad (12.53)$$

esplicitando rispetto ad x_T e sostituendo i valori di α e β , si ottiene

$$x_T = \bar{x} + \frac{y_T - \bar{y}}{s_y} s, \quad (12.54)$$

ove y_T è dato dall'eq. (12.44).

L'eq. (12.54) è formalmente identica all'eq. (12.30) e quindi il fattore di frequenza, nel caso particolare della distribuzione di Gumbel, vale

$$K_T = \frac{y_T - \bar{y}}{s_y}. \quad (12.55)$$

Riassumendo, assegnato il numero n dei termini della serie, mediante l'eq. (12.46) si può ricostruire la serie delle variabili ridotte e quindi calcolare la sua media (eq. (12.47) e la sua varianza (eq. (12.48)); assegnato il periodo di ritorno T_R , utilizzando l'eq. (12.44), si calcola la corrispondente variabile ridotta y_T ; entrando con questi valori nell'eq. (12.55) si determina il fattore di frequenza K_T . L'eq. (12.54) assume la forma

$$x_T = \bar{x} + K_T s. \quad (12.30)$$

Si deve però ricordare che K_T è anche funzione del numero n dei dati della serie, per via del valore medio \bar{y} e della deviazione standard s_y .

Nella Tab. 12. II sono riportati i valori di K_T in funzione del periodo di ritorno T_R e del numero dei dati della serie n .

Un altro modo per determinare il fattore di frequenza consiste nel sostituire nel primo membro dell'eq. (12.33) il secondo membro dell'eq. (12.14). L'equazione così ottenuta, esplicitata rispetto ad $x = x_T$ fornisce

$$x_T = \beta - \frac{I}{\alpha} \ln \left(-\ln \frac{T_R - I}{T_R} \right), \quad (12.56)$$

Tab. 12. II. Fattore di frequenza K_T per la distribuzione estrema tipo I-

n	Periodo di ritorno (anni)								
	2	5	10	20	50	100	200	500	1000
10	-0.1355	1.0580	1.8483	2.6063	3.5874	4.3227	5.0553	6.0217	6.7522
15	-0.1434	0.9672	1.7025	2.4078	3.3208	4.0049	4.6866	5.5859	6.2655
20	-0.1478	0.9187	1.6247	2.3020	3.1787	3.8356	4.4902	5.3537	6.0064
25	-0.1506	0.8879	1.5754	2.2350	3.0886	3.7283	4.3657	5.2066	5.8422
30	-0.1526	0.8664	1.5410	2.1881	3.0257	3.6534	4.2788	5.1038	5.7274
35	-0.1540	0.8504	1.5153	2.1532	2.9789	3.5976	4.2141	5.0274	5.6421
40	-0.1552	0.8379	1.4954	2.1261	2.9425	3.5543	4.1638	4.9679	5.5757
45	-0.1561	0.8279	1.4794	2.1044	2.9133	3.5194	4.1234	4.9202	5.5224
50	-0.1568	0.8197	1.4663	2.0864	2.8892	3.4908	4.0901	4.8809	5.4785
55	-0.1575	0.8128	1.4552	2.0714	2.8690	3.4667	4.0622	4.8479	5.4417
60	-0.1580	0.8069	1.4458	2.0586	2.8518	3.4461	4.0384	4.8197	5.4102
65	-0.1584	0.8018	1.4376	2.0474	2.8368	3.4284	4.0177	4.7953	5.3830
70	-0.1588	0.7974	1.4305	2.0377	2.8238	3.4128	3.9997	4.7740	5.3591
75	-0.1592	0.7934	1.4242	2.0291	2.8122	3.3991	3.9837	4.7551	5.3381
80	-0.1595	0.7899	1.4185	2.0215	2.8020	3.3868	3.9695	4.7383	5.3194
85	-0.1597	0.7868	1.4135	2.0146	2.7927	3.3758	3.9568	4.7232	5.3025
90	-0.1600	0.7840	1.4089	2.0084	2.7844	3.3659	3.9453	4.7096	5.2873
95	-0.1602	0.7814	1.4048	2.0028	2.7769	3.3569	3.9348	4.6973	5.2735
100	-0.1604	0.7791	1.4010	1.9977	2.7700	3.3487	3.9253	4.6860	5.2609

ove il pedice T della variabile x vuole rappresentare ancora il legame di questa variabile con il periodo di ritorno T_R . Sostituendo nell'eq. (12.56) i valori di α e β delle eq. (12.42) e (12.43) si ottiene

$$x_T = \bar{x} - \left[0.45 + 0.7797 \ln \left(-\ln \frac{T_R - 1}{T_R} \right) \right] s, \quad (12.57)$$

la quale, paragonata all'eq. (12.30), permette di fornire un'altra forma del fattore di frequenza

$$K_T = - \left[0.45 + 0.7797 \ln \left(-\ln \frac{T_R - 1}{T_R} \right) \right]. \quad (12.58)$$

L'espressione di K_T dell'eq. (12.58) è svincolata dalla dimensione del campione, ma solo apparentemente in quanto essa, per come è stata ricavata, è valida per un campione infinitamente numeroso. Infatti può essere ottenuta come limite per $n \rightarrow \infty$ dell'eq. (12.55).

12.7.1.3 Errore Standard

Se il fattore di frequenza non è funzione del coefficiente di asimmetria, come nel presente caso, l'errore standard della stima della distribuzione a due parametri, come quella di cui si tratta, assume la forma semplice:

$$S_T^2 = \frac{s^2}{n} \left[1 + K\gamma_1 + \frac{K^2}{4}(\gamma_2 - 1) \right], \quad (12.59)$$

essendo γ_1 ($\gamma_1 = 1.1396$) il coefficiente di asimmetria e γ_2 ($\gamma_2 = 5.4002$) il coefficiente di curtosi.

Sostituendo nell'eq. (12.59) il valori dei coefficienti γ_1 e γ_2 si ottiene

$$S_T = \left(1 + 1.1396 K_T + 1.1000 K_T^2\right)^{1/2} \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \delta \sqrt{\frac{s^2}{n}} \quad (12.60)$$

Il fattore δ è riportato nella Tab. 12. III. Nota la varianza, è relativamente semplice calcolare il valore dell'errore standard.

Ad es., sia $x_{T=100}$ il valore, calcolato da una serie annuale di 55 eventi, della variabile casuale di un evento con 100 *anni* di periodo di ritorno. Dalla Tab. 12. III risulta $\delta=4.263$, per cui, calcolata la deviazione standard s dei dati della serie, è immediato calcolare S_T mediante l'eq. (12.60). L'intervallo di confidenza del valore calcolato al 95% risulta quindi

$$\mathfrak{S}_C = x_{T=100} \pm 1.96 S_T \quad (12.61)$$

essendo il frattile di ordine 0.975 della distribuzione normale pari a 1.96.

12.7.2 LA DISTRIBUZIONE DI WEIBULL (ESTREMALE TIPO III)

Delle tre forme di distribuzione estremale stabilite da Fisher e Tippett (1928), la estremale tipo III, limitata superiormente, è stata utilizzata in idrologia per l'analisi dei deflussi di magra, nei quali i valori della variabile aleatoria sono tanto più rari quanto più sono piccoli. La distribuzione di Weibull, derivata dalla estremale tipo III, è invece limitata inferiormente e può essere utilizzata per l'analisi di eventi estremi quali le tempeste, nei quali i valori alti della variabile sono associati a tempi di ritorno elevati. La caratteristica della limitazione inferiore implica l'esistenza di un valore minimo della variabile aleatoria per il quale la probabilità di superamento è pari ad uno. Nella sua espressione più generale la distribuzione di Weibull ha la forma

$$P^+(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^\alpha \right], \quad (12.62)$$

ove x_0 è il valore minimo della variabile statistica che è interpretabile con l'eq. (12.62) ed è detto *parametro del posto* (location parameter), $x_C - x_0$ è il *parametro di scala* e α il *parametro di forma*. Per tutti gli $x > x_0$, l'eq. (12.62) rappresenta la probabilità cumulata di incontrare un valore della variabile aleatoria non inferiore ad x . Volendo applicare la distribuzione di Weibull al calcolo delle onde estreme, occorre quindi considerarne la forma

$$P(x) = 1 - P^+(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^\alpha \right]. \quad (12.63)$$

Il parametro di forma α può variare di solito entro gli estremi $0.75 \leq \alpha \leq 2$. Con $\alpha = 0.75$ si hanno i valori estremi più alti; per α compreso tra 1.0 e 1.4 si hanno stime analoghe a quelle della distribuzione di Gumbel; con $\alpha = 2$ si ha una distribuzione formalmente identica a quella di Rayleigh.

La densità di probabilità dell'eq. (12.63) è data dalla relazione

$$p(x) = \frac{\alpha}{x_C - x_0} \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^\alpha \right] \quad (12.64)$$

Tab. 12. III. Parametro δ per il calcolo dell'errore standard della distribuzione estrema tipo I.

n	Periodo di ritorno (anni)								
	2	5	10	20	50	100	200	500	1000
10	0.93046	1.85394	2.61992	3.38261	4.38692	5.14591	5.90527	6.91013	7.67112
15	0.92694	1.76954	2.47559	3.18141	4.11276	4.81741	5.52278	6.45660	7.16399
20	0.92500	1.72490	2.39903	3.07451	3.96698	4.64267	5.31929	6.21528	6.89413
25	0.92376	1.69676	2.35065	3.00691	3.87472	4.53204	5.19044	6.06245	6.72321
30	0.92290	1.67718	2.31693	2.95974	3.81031	4.45481	5.10047	5.95571	6.60384
35	0.92226	1.66267	2.29190	2.92469	3.76244	4.39738	5.03355	5.87633	6.51505
40	0.92176	1.65142	2.27247	2.89748	3.72524	4.35276	4.98156	5.81464	6.44604
45	0.92137	1.64241	2.25688	2.87564	3.69538	4.31693	4.93981	5.76510	6.39063
50	0.92105	1.63500	2.24407	2.85767	3.67081	4.28744	4.90544	5.72431	6.34500
55	0.92078	1.62880	2.23332	2.84259	3.65018	4.26268	4.87658	5.69006	6.30668
60	0.92055	1.62351	2.22415	2.82972	3.63258	4.24155	4.85194	5.66082	6.27397
65	0.92036	1.61894	2.21622	2.81860	3.61735	4.22327	4.83064	5.63553	6.24568
70	0.92019	1.61495	2.20929	2.80887	3.60403	4.20728	4.81199	5.61340	6.22092
75	0.92005	1.61143	2.20318	2.80028	3.59227	4.19315	4.79553	5.59385	6.19905
80	0.91992	1.60830	2.19773	2.79263	3.58179	4.18057	4.78086	5.57644	6.17956
85	0.91980	1.60549	2.19285	2.78577	3.57239	4.16929	4.76770	5.56081	6.16208
90	0.91970	1.60296	2.18844	2.77957	3.56390	4.15909	4.75581	5.54670	6.14628
95	0.91960	1.60066	2.18444	2.77395	3.55620	4.14983	4.74501	5.53388	6.13194
100	0.91952	1.59857	2.18079	2.76881	3.54916	4.14138	4.73516	5.52217	6.11884

Sostituendo all'esponente dell'eq. (12.63) la variabile ridotta

$$y = \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^\alpha, \quad (12.65)$$

le eq. (12.63) e (12.64) diventano rispettivamente

$$P(y) = 1 - \exp(-y), \quad (12.66)$$

$$p(y) = \frac{\alpha}{x_C - x_0} y^{(\alpha-1)/\alpha} \exp(-y). \quad (12.67)$$

12.7.2.1 Stima dei Parametri

Talvolta, per semplicità di calcolo, nell'eq. (12.63) si pone $x_0=0$, ottenendosi così la riduzione del numero dei parametri a due. Tuttavia, a causa della tendenza dei valori più piccoli di x a deviare dalla retta nel piano coordinato frequenze cumulate-variabile aleatoria, come è stato suggerito da Hombs (1977), è bene mantenere la forma completa della distribuzione di Weibull, con i tre parametri. Nella stima dei parametri ci si limita all'adozione del metodo dei momenti che, rispetto al metodo della massima verosimiglianza, è di più immediata applicazione.

L'espressione generale del momento di ordine r della distribuzione di Weibull, riferita al valore minimo x_0 della variabile aleatoria, è data dall'espressione

$$m_{x_0,r} = \int_0^\infty (x - x_0)^r \frac{\alpha}{x_C - x_0} \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^{(\alpha-1)} \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{x_C - x_0} \right)^\alpha \right] dx. \quad (12.68)$$

Sostituendo nell'eq. (12.68) la variabile ridotta y [eq. (12.65)], si ottiene

$$m_{x_0,r} = (x_C - x_0)^r \int_0^\infty y^{r/\alpha} e^{-y} dy = (x_C - x_0)^r \Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right). \quad (12.69)$$

Per le note proprietà della funzione Γ , se l'argomento $\frac{r}{\alpha} + 1$ è un intero, si ha

$$\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) = \left(\frac{r}{\alpha} + 1 - 1\right)!;$$

se l'argomento $\frac{r}{\alpha} + 1 > 1$, si ha

$$\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) = \frac{r}{\alpha} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \frac{r}{\alpha} \left(\frac{r}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{r}{\alpha} - 2\right) \dots \Gamma\left(\frac{r}{\alpha} - n\right), \quad (12.70)$$

con n intero positivo ed $\frac{r}{\alpha} < n + 1$. Se l'argomento $\frac{r}{\alpha} + 1 < 1$, si ha

$$\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + n\right)}{\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{r}{\alpha} + 2\right) \dots \left(\frac{r}{\alpha} + n - 1\right)}. \quad (12.71)$$

Calcolata la funzione Γ , applicando la seconda eq. (12.69), è immediato il calcolo del momento di ordine r ; ad es. il momento del primo ordine vale

$$m_{x_0,1} = (x_C - x_0) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right), \quad (12.72)$$

e quindi il momento del primo ordine rispetto all'origine (valor medio) diventa

$$m'_1 = \bar{x} = x_0 + (x_C - x_0) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right). \quad (12.73)$$

Il momento del secondo ordine rispetto al valore minimo x_0 vale

$$m_{x_0,2} = (x_C - x_0)^2 \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) \quad (12.74)$$

e il momento centrale del secondo ordine (varianza)

$$m_2 = s^2 = m_{x_0,2} - (m_{x_0,1})^2$$

da cui, sostituendovi le eq. (12.72) e (12.74), si ricava

$$m_2 = s^2 = (x_C - x_0)^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right]. \quad (12.75)$$

Analogamente, si ottengono gli altri momenti rispetto all'origine (per il successivo calcolo dell'errore standard servono tutti i momenti fino al sesto ordine)

$$m_3 = m_{x_0,3} - 3m_{x_0,2}(m_{x_0,1}) + 2(m_{x_0,1})^3,$$

ossia, sostituendo le eq. (12.72) e (12.74)

$$m_3 = (x_C - x_0)^3 \left[\Gamma\left(\frac{3}{\alpha} + 1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right]. \quad (12.76)$$

$$m_4 = (x_C - x_0)^4 \left[\begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{4}{\alpha} + 1\right) - 4\Gamma\left(\frac{3}{\alpha} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 6\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \\ - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \end{array} \right], \quad (12.77)$$

$$m_5 = (x_C - x_{min})^5 \left[\begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{5}{\alpha} + 1\right) - 5\Gamma\left(\frac{4}{\alpha} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 10\Gamma\left(\frac{3}{\alpha} + 1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \\ - 10\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\Gamma^3\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 4\Gamma^5\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \end{array} \right], \quad (12.78)$$

$$m_6 = (x_C - x_0)^6 \left[\begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{6}{\alpha} + 1\right) - 6\Gamma\left(\frac{5}{\alpha} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 15\Gamma\left(\frac{4}{\alpha} + 1\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \\ - 20\Gamma\left(\frac{3}{\alpha} + 1\right)\Gamma^3\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 15\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\Gamma^4\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) - 5\Gamma^6\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \end{array} \right]. \quad (12.79)$$

Si definiscano ora due parametri

$$A_\alpha = \frac{x_C - \bar{x}}{s}, \quad (12.80)$$

$$B_\alpha = \frac{x_C - x_0}{s}. \quad (12.81)$$

Per l'eq.(12.75) il parametro B_α vale

$$B_\alpha = \left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right]^{-1/2}. \quad (12.82)$$

Sommando x_0 al primo e secondo membro dell'eq. (12.72) si ottiene

$$m'_1 = x_0 + (x_C - x_0)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

Sottraendo al primo e secondo membro x_C , dopo aver diviso tutto per s e tenuto conto delle eq. (12.80) e (12.81), si ottiene la seguente espressione del parametro A_α

$$A_\alpha = \left[1 - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right] B_\alpha. \quad (12.83)$$

Il coefficiente di asimmetria della distribuzione

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}},$$

dopo la sostituzione al posto di m_2 ed m_3 delle relative espressioni (12.75) e (12.76), tenuto anche conto dell'eq. (12.82), assume la forma

$$\gamma_1 = \left[\Gamma\left(\frac{3}{\alpha} + 1\right) - 3\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right] B_\alpha^3. \quad (12.84)$$

L'eq. (12.84) è solo funzione di α , dunque, calcolando la stima campionaria del coefficiente di asimmetria nella forma

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{n(n-1)^{1/2} \sum (x - \bar{x})^3}{(n-2) \left[\sum (x - \bar{x})^2 \right]^{3/2}} \quad (12.85)$$

e sostituendo il valore ottenuto nell'eq. (12.84), si ottiene il valore di α in funzione di B_α . Noto α si possono determinare B_α mediante l'eq. (12.82) ed A_α mediante l'eq. (12.83) e quindi x_C

$$x_C = A_\alpha s + \bar{x}, \quad (12.86)$$

$$x_0 = x_C - B_\alpha s, \quad (12.87)$$

in cui \bar{x} e s sono le stime campionarie della media e della deviazione standard, date rispettivamente dalle eq. (12.22) e (12.23).

Un modo rapido per risolvere l'eq. (12.84) è fornito dalla relazione

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + a_2 \hat{\gamma}_1 + a_3 \hat{\gamma}_1^2 + a_4 \hat{\gamma}_1^3 + a_5 \hat{\gamma}_1^4}, \quad (12.88)$$

con i seguenti valori dei coefficienti

$$a_1=0.2777757913 \qquad a_4=-0.0013038566$$

$$a_2=0.3132617714 \qquad a_5=-0.0081523408$$

$$a_3=0.0575670910$$

L'approssimazione dell'eq. (12.88) è valida per valori di $\hat{\gamma}_1$ compresi tra -1.02 e $+2.00$, intervallo per il quale la formula approssimata ha un coefficiente di correlazione di 0.9999 e un errore standard di 0.0006575. Nella Tab. 12. IV sono riportati i valori del parametro α della distribuzione e dei parametri A_α e B_α in funzione di $\hat{\gamma}_1$.

Se nella distribuzione si può porre $x_0=0$, il metodo di stima dei restanti parametri x_C e α diventa assai più semplice, anche se meno accurato. Per $x = x_C$ l'eq. (12.62) diventa

$$P(x_C) = 1 - e^{-1} = 0.632. \quad (12.89)$$

Il valore mediano della distribuzione estrema tipo III, per il quale la variabile aleatoria assume il valore M , si ha per $P = 0.5$. Per questa coppia di valori l'eq. (12.62) fornisce

$$M = x_C (\ln 2)^{1/\alpha}. \quad (12.90)$$

A questo punto, tracciato il grafico dei dati x in funzione delle frequenze cumulate, i valori di x_C ed M possono essere ricavati dal grafico per i valori di $P^+ = 0.5$ e di $P = 0.632$. Indi, la sostituzione del valore M trovato nell'eq. (12.90) permette di ricavare il valore di α .

12.7.2.2 Fattore di Frequenza

Esplicitando l'eq. (12.62) rispetto alla variabile x e sostituendo al posto di P^+ il periodo di ritorno T_R ottenibile dalla prima delle eq. (12.12), si ha la relazione valida per una serie annuale

$$x = x_0 + (x_C - x_0) [\ln(T_R)]^{1/\alpha}. \quad (12.91)$$

Nel caso in cui l'analisi statistica venga eseguita su una serie limitata inferiormente la relazione fra il tempo di ritorno e la probabilità di superamento è data dalla eq. (12.13). Peraltro, si è mostrato che per eventi abbastanza poco frequenti i due tempi di ritorno stimati con la serie limitata inferiormente o con la serie annuale sono praticamente uguali (Tab. 12. I).

Sostituendo nell'eq. (12.91) i parametri A_α e B_α definiti dalle eq. (12.80) e (12.81) si ottiene la relazione

$$x = \bar{x} + \left\{ A_\alpha - B_\alpha + B_\alpha \left[-\ln\left(\frac{I}{T_R}\right) \right]^{1/\alpha} \right\} s, \quad (12.92)$$

L'eq. (12.92) permette di riconoscere che il fattore di frequenza K della distribuzione estrema tipo III è dato dalla relazione

$$K = A_\alpha + B_\alpha \left\{ \left[-\ln\left(\frac{I}{T_R}\right) \right]^{1/\alpha} - 1 \right\}. \quad (12.93)$$

L'eq. (12.93) indica che il fattore di frequenza K è funzione di γ_1 , attraverso A_α , B_α ed α , e di T_R . Nella Tab. 12. V esso è riportato per alcuni valori di γ_1 e del periodo di ritorno T_R .

12.7.2.3 Errore Standard della Stima

L'errore standard della stima, calcolato con il metodo dei momenti per la distribuzione contenente tre parametri, ha la forma generale

$$S_T^2 = \frac{m_2}{n} \left\{ I + K\gamma_1 + \frac{K^2}{4}(\gamma_2 - I) + \frac{\partial K}{\partial \gamma_1} \left[2\gamma_2 - 3\gamma_1^2 - 6 + K \left(\gamma_3 - \frac{3\gamma_1\gamma_2}{2} - \frac{5\gamma_1}{2} \right) \right] + \left(\frac{\partial K}{\partial \gamma_1} \right)^2 \left(\gamma_4 - 3\gamma_3\gamma_1 - 6\gamma_2 + 9\frac{\gamma_1^2\gamma_2}{4} + 35\frac{\gamma_1^2}{4} + 9 \right) \right\}. \quad (12.94)$$

Tab. 12. IV. Parametri α , A_α e B_α in funzione del coefficiente di asimmetria γ_1 .

γ_1	α	A_α	B_α
-1.00	65.63043	0.44760	52.24465
-0.90	26.26360	0.44229	21.47978
-0.80	16.30207	0.43629	13.68443
-0.70	11.73785	0.42952	10.10381
-0.60	9.10978	0.42193	8.03409
-0.50	7.39676	0.41343	6.67757
-0.40	6.18962	0.40397	5.71462
-0.30	5.20236	0.39350	4.99218
-0.20	4.59925	0.38198	4.42770
-0.10	4.04809	0.36938	3.97275
0.00	3.59997	0.35571	3.59692
0.10	3.22914	0.34098	3.28029
0.20	2.91791	0.32523	3.00911
0.30	2.65366	0.30851	2.77366
0.40	2.42717	0.29089	2.56682
0.50	2.23149	0.27246	2.38329
0.60	2.06133	0.25334	2.19100
0.70	1.91253	0.23367	2.07116
0.80	1.78181	0.21360	1.93718
0.90	1.66654	0.19329	1.81524
1.00	1.56457	0.17291	1.70391
1.10	1.47416	0.15265	1.60204
1.20	1.39386	0.13268	1.50873
1.30	1.32247	0.11318	1.42324
1.40	1.25900	0.09432	1.34501
1.50	1.20261	0.07626	1.27360
1.60	1.15260	0.05914	1.20866
1.70	1.10840	0.04344	1.14991
1.80	1.06954	0.02828	1.09714
1.90	1.03562	0.01477	1.05020
2.00	1.00634	0.00268	1.00900

I coefficienti di asimmetria γ_1 , di curtosi γ_2 e gli altri due coefficienti γ_3 e γ_4 si ottengono facilmente facendo i rapporti dei momenti di terzo (eq. 12.76), quarto (eq.12.77), quinto (eq. 12.78) e sesto ordine (eq. 12.79), rispetto alla potenza terza, quarta, quinta e sesta della radice quadrata del momento centrale del secondo ordine (eq. 12.75). Il fattore di frequenza K si calcola mediante l'eq. (12.93). Resta da calcolare $\partial K / \partial \gamma_1$ che può ottenersi in via analitica o in via numerica.

Tab. 12. V. Fattore di frequenza K della distribuzione estrema tipo III.

γ_I	Periodo di ritorno (anni)								
	2	5	10	20	50	100	200	500	1000
-1.00	0.1567	0.8278	1.1158	1.3284	1.5448	1.6776	1.7919	1.9223	2.0089
-0.90	0.1446	0.8350	1.1354	1.3586	1.5874	1.7283	1.8502	1.9896	2.0825
-0.80	0.1321	0.8416	1.1546	1.3890	1.6306	1.7802	1.9100	2.0591	2.1587
-0.70	0.1189	0.8476	1.1736	1.4195	1.6746	1.8334	1.9717	2.1311	2.2379
-0.60	0.1051	0.8528	1.1922	1.4502	1.7196	1.8883	2.0356	2.2060	2.3207
-0.50	0.0906	0.8572	1.2105	1.4812	1.7657	1.9448	2.1019	2.2842	2.4073
-0.40	0.0754	0.8607	1.2283	1.5123	1.8129	2.0031	2.1707	2.3660	2.4983
-0.30	0.0595	0.8632	1.2456	1.5436	1.8612	2.0634	2.2423	2.4516	2.5939
-0.20	0.0428	0.8647	1.2623	1.5749	1.9107	2.1257	2.3167	2.5413	2.6945
-0.10	0.0255	0.8650	1.2783	1.6062	1.9612	2.1900	2.3942	2.6352	2.8004
0.00	0.0075	0.8641	1.2935	1.6374	2.0128	2.2563	2.4747	2.7336	2.9117
0.10	-0.0110	0.8618	1.3077	1.6683	2.0653	2.3246	2.5582	2.8365	3.0288
0.20	-0.0300	0.8583	1.3209	1.6988	2.1185	2.3947	2.6447	2.9441	3.1518
0.30	-0.0493	0.8533	1.3328	1.7287	2.1724	2.4665	2.7340	3.0562	3.2806
0.40	-0.0689	0.8469	1.3434	1.7579	2.2267	2.5397	2.8261	3.1727	3.4153
0.50	-0.0885	0.8390	1.3525	1.7860	2.2810	2.6141	2.9205	3.2934	3.5556
0.60	-0.1036	0.8223	1.3460	1.7932	2.3088	2.6585	2.9820	3.3779	3.6577
0.70	-0.1275	0.8188	1.3659	1.8384	2.3888	2.7651	3.1152	3.5460	3.8520
0.80	-0.1466	0.8067	1.3700	1.8623	2.4417	2.8410	3.2147	3.6772	4.0074
0.90	-0.1651	0.7932	1.3722	1.8844	2.4934	2.9165	3.3149	3.8108	4.1667
1.00	-0.1829	0.7786	1.3727	1.9046	2.5436	2.9913	3.4153	3.9462	4.3292
1.10	-0.2000	0.7630	1.3715	1.9228	2.5920	3.0649	3.5153	4.0827	4.4941
1.20	-0.2162	0.7466	1.3685	1.9388	2.6383	3.1367	3.6143	4.2194	4.6604
1.30	-0.2313	0.7296	1.3640	1.9527	2.6823	3.2064	3.7115	4.3553	4.8269

Analiticamente si ha

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_I} = \frac{\partial K}{\partial(I/\alpha)} \frac{\partial(I/\alpha)}{\partial \gamma_I}, \quad (12.95)$$

ove $\partial K/\partial(I/\alpha)$ si ottiene derivando l'eq. (12.93) e $\partial(I/\alpha)/\partial \gamma_I$ derivando l'eq. (12.84), notando che

$$\frac{\partial \Gamma(r/\alpha + 1)}{\partial(I/\alpha)} = r\Gamma(r/\alpha + 1)\psi(r/\alpha + 1), \quad (12.96)$$

essendo ψ la *funzione psi*, detta anche *funzione digamma* che può essere calcolata con una funzione asintotica (Abramowitz e Stegun, 1965). Secondo quanto riferito da Condie e Nix (1975) per mantenere l'accuratezza ai bassi valori della variabile, la funzione ψ si può calcolare mediante la seguente espressione

$$\psi(z) \approx \ln(z+2) - \frac{1}{2(z+2)} - \frac{1}{12(z+2)^2} + \frac{1}{120(z+2)^4} - \frac{1}{252(z+2)^6} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z}. \quad (12.97)$$

Indicando con $y = \ln(T_R)$, $G_r = \Gamma(r/\alpha + 1)$ e con $P_r = \psi(r/\alpha + 1)$, l'eq. (12.95) assume la forma

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_1} = \frac{\left[(\ln y)y^{1/\alpha} - G_1 P_1 - (y^{1/\alpha} - G_1)(G_2 - G_1^2)^{-1}(G_2 P_2 - G_1^2 P_1) \right] (G_2 - G_1^2)^2}{3 \left[(G_2 - G_1^2)(G_3 P_3 - G_1 G_2 P_1 - 2G_1 G_2 P_2 + 2G_1^3 P_1) - (G_3 - 3G_2 G_1 + 2G_1^3)(G_2 P_2 - G_1^2 P_1) \right]} \quad (12.98)$$

Scritta in forma sintetica, l'eq. (12.94) assume l'espressione

$$S_T = \delta \sqrt{\frac{s^2}{n}}. \quad (12.99)$$

Nella Tab. 12. VI sono riportati i valori di δ per alcuni periodi di ritorno T_R e del coefficiente di asimmetria.

Il calcolo della derivata del fattore di frequenza rispetto al coefficiente di asimmetria può essere fatto più semplicemente per via numerica, anche se con una certa approssimazione, calcolando K_+ e K_- per i valori di $\gamma_{+,-} = \gamma_1 \pm \Delta\gamma_1$ e assumendo per la derivata il valore numerico ottenuto mediante la seguente espressione

$$\frac{\partial K}{\partial \gamma_1} = \frac{K_+ - K_-}{2\Delta\gamma_1}. \quad (12.100)$$

Usando $\Delta\gamma_1 = 0.05$, questo metodo, tenuto conto della sua semplicità, fornisce un'accuratezza accettabile.

12.8 DISTRIBUZIONE DISCRETA DI POISSON

Come si è detto nel § 12.4, il progettista ha bisogno di conoscere l'arco temporale di vita della struttura, detto anche vita di progetto, e la probabilità, o il rischio, che l'evento critico di riferimento, da assumere come onda di progetto, si possa verificare durante tale arco temporale.

Il legame tra il periodo di ritorno, la vita di progetto della struttura ed il rischio che l'evento connesso al suddetto periodo di ritorno si verifichi si ottiene facilmente facendo riferimento all'ipotesi di *processo poissoniano*. Tale processo si basa sulla considerazione che le tempeste possano essere considerate come eventi istantanei indipendenti.

Il processo poissoniano, nella sua forma più generale è rappresentato dalla relazione

$$P(n) = \frac{(Nt)^n \exp(-Nt)}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.101)$$

ove $P(n)$ è la probabilità che n eventi si verifichino nel tempo t , N è la frequenza degli eventi per anno, ossia l'inverso del tempo di ritorno $N = 1/T_R$, t è l'intervallo di tempo di riferimento dell'evento, ad esempio la vita di progetto V_P dell'opera, $t = V_P$. La probabilità che nessuno degli eventi di assegnato periodo di ritorno T_R si verifichi nella vita di progetto V_P si ottiene ponendo $n = 0$ nell'eq. (12.101). Si ha così

$$P_V = \exp\left(-\frac{V_P}{T_R}\right). \quad (12.102)$$

Tab. 12. VI. Parametri δ per il calcolo dell'errore standard della distribuzione estrema tipo III.

γ'	Tempo di ritorno in anni								
	2	5	10	20	50	100	200	500	1000
-0.40	1.0790	1.3227	1.5707	1.9441	2.2336	3.2702	3.9741	4.9681	5.7446
-0.30	1.0885	1.2937	1.5059	1.8328	2.4399	2.9963	3.6034	4.4467	5.0927
-0.20	1.0978	1.2621	1.4394	1.7254	2.2638	2.7530	3.2823	4.0018	4.5422
-0.10	1.1069	1.2279	1.3720	1.6229	2.1052	2.5414	3.0051	3.6241	4.0791
0.00	1.1157	1.1916	1.3044	1.5261	1.9641	2.3573	2.7686	3.3057	3.6913
0.10	1.1241	1.1532	1.2372	1.4360	1.8409	2.2002	2.5691	3.0392	3.3681
0.20	1.1320	1.1130	1.1713	1.3538	1.7355	2.0686	2.4030	2.8171	3.1000
0.30	1.1393	1.0712	1.1075	1.2806	1.6481	1.9608	2.2667	2.6348	2.8781
0.40	1.1460	1.0281	1.0469	1.2177	1.5782	1.8748	2.1564	2.4846	2.6948
0.50	1.1517	0.9839	0.9909	1.1662	1.5262	1.8084	2.0688	2.3621	2.5438
0.60	1.1566	0.9391	0.9408	1.1273	1.4883	1.7597	2.0008	2.2628	2.4197
0.70	1.1606	0.8943	0.8981	1.1016	1.4664	1.7266	1.9497	2.1834	2.3187
0.80	1.1636	0.8500	0.8647	1.0896	1.4584	1.7074	1.9133	2.1214	2.2377
0.90	1.1657	0.8072	0.8422	1.0914	1.4629	1.7006	1.8901	2.0749	2.1745
1.00	1.1671	0.7669	0.8319	1.1064	1.4788	1.7047	1.8787	2.0423	2.1274
1.10	1.1678	0.7303	0.8347	1.1337	1.5048	1.7184	1.8780	2.0224	2.0950
1.20	1.1681	0.6989	0.8507	1.1720	1.5395	1.7414	1.8868	2.0141	2.0760
1.30	1.1680	0.6740	0.8792	1.2196	1.5815	1.7716	1.9039	2.0161	2.0687
1.40	1.1676	0.6569	0.9187	1.2746	1.6293	1.8077	1.9282	2.0270	2.0718
1.50	1.1669	0.6487	0.9671	1.3351	1.6813	1.8485	1.9582	2.0452	2.0835
1.60	1.1658	0.6494	1.0220	1.3989	1.7357	1.8924	1.9922	2.0691	2.1019
1.70	1.1643	0.6584	1.0807	1.4637	1.7909	1.9376	1.0287	2.0968	2.1250
1.80	1.1622	0.6742	1.1405	1.5274	1.8446	1.9823	2.0657	2.1263	2.1507
1.90	1.1596	0.6940	1.1987	1.5876	1.8952	2.0247	2.1913	2.1556	2.1769
2.00	1.1564	0.7148	1.2523	1.6421	1.9405	2.0628	2.1336	2.1826	2.2013

Pertanto la probabilità, o il rischio, che almeno un evento critico si verifichi durante la vita di progetto dell'opera è data dal complemento a uno dell'eq. (12.102), ossia

$$P(T_R, V_P) = 1 - \exp\left(-\frac{V_P}{T_R}\right). \quad (12.103)$$

12.9 DURATA DELLA TEMPESTA E SUA PERSISTENZA SOPRA UNA DATA SOGLIA

Come si è detto nel § 9.7 la misura dello stato di mare richiede circa 20 minuti primi di registrazione. Tale misura si sintetizza in tre, quattro parametri ondosi: l'altezza significativa, il periodo di picco, e/o il periodo medio, e la direzione. L'insieme degli stati di mare consecutivi prodotti dalla stessa tempesta di vento costituisce una *tempesta di mare (storm sea)*. La *durata della tempesta* è data dal prodotto del numero degli stati di mare per l'intervallo di tempo che separa due stati di mare consecutivi. Se la misura degli stati di mare si esegue ogni tre ore, la durata della tempesta è un multiplo di tre ore.

Per *persistenza di una tempesta* sopra una data soglia di altezza significativa H_S si intende il tempo durante il quale l'altezza significativa si mantiene al disopra del suddetto

valore. Secondo Houmb e Vik (1977), il calcolo della persistenza della tempesta sopra una determinata soglia H_S si può calcolare con la relazione

$$\tau_s(H_T) = \frac{\sqrt{2\pi}(H_c - H_0)^\alpha}{\alpha \dot{\sigma}_{H_T} (H_S - H_0)^{\alpha-1}}, \quad (12.104)$$

ove α rappresenta il parametro di forma della distribuzione di Weibull, H_0 il parametro del posto, $H_c - H_0$ il parametro di scala e $\dot{\sigma}_H$ la deviazione standard dei rapporti incrementali positivi rispetto al tempo della serie storica della altezze d'onda del sito superiori alla soglia H_S . Per ogni sito, può essere trovata una relazione lineare tra l'altezza dell'onda significativa e la deviazione standard. Per questo la persistenza dell'altezza d'onda sopra la soglia H_S è riconducibile ad una funzione di H_S . Il numero medio N_S di onde sopra la soglia H_S può essere stimato dividendo la persistenza ottenuta dall'eq. (12.104) per il periodo medio T_1 delle onde della tempesta. Si ha dunque

$$N_s = \frac{\tau_s(H_s)}{T_1} \quad (12.105)$$

12.10 DETERMINAZIONE DELL'ONDA DI PROGETTO

Nei precedenti paragrafi del presente capitolo ci si è adoperati per effettuare una valutazione dell'evento ondoso estremo, in termini di altezza d'onda significativa, ed il suo periodo di ritorno. Occorre ricordare che i dati di moto ondoso che si utilizzano nelle analisi degli eventi estremi sono quelli registrati dalle boe ondometriche oppure quelli ricostruiti dai dati di vento o dalle carte bariche o anche dai rilevamenti da satellite. In ogni caso tali dati riguardano caratteristiche delle onde appartenenti a acque profonde. Conseguentemente l'analisi degli eventi estremi è riferita a quelle zone profonde del mare, mentre le opere marittime che si vuole realizzare appartengono quasi sempre a zone poco profonde, di acque di trasformazione o anche, specialmente nel caso di opere di difesa costiera, alle acque basse. Determinato l'evento estremo in acque profonde occorre procedere al calcolo dell'onda nelle zone di trasformazione ove prevale l'effetto della rifrazione e della profondità (shoaling) e, se l'opera ricade nelle acque basse, occorre calcolare le ulteriori trasformazioni dovute prevalentemente al frangimento provocato dalle basse profondità.

12.10.1 VITA DI PROGETTO DELL'OPERA E RISCHIO DELL'EVENTO

La probabilità $P(T_R, V_P)$, o rischio, che almeno un episodio di periodo di ritorno T_R da assumere come dato di progetto si verifichi durante la vita di progetto V_P della struttura sarà assegnata in funzione dell'importanza dell'opera. Noto il rischio $P(T_R, V_P)$ dall'eq. (12.103) si ricava il tempo di ritorno in funzione della vita di progetto

$$T_R = \frac{V_P}{-\ln[1 - P(T_R, V_P)]}. \quad (12.106)$$

Dunque, per conoscere il periodo di ritorno della tempesta contenente l'onda di progetto occorre conoscere il rischio dell'evento $P(T_R, V_P)$ e la vita di progetto V_P .

Tab. 12. VII. Vita minima di progetto (*anni*) per opere o strutture di carattere definitivo.

Tipo di infrastruttura	Livello di sicurezza		
	1	2	3
Uso generale	25	50	100
Uso specifico	15	25	50

Per orientarsi nella scelta dei due parametri $P(T_R, V_P)$ e V_P ci si può avvalere delle “Istruzioni Tecniche per la Progettazione delle Dighe Frangiflutti” del Ministero dei Lavori Pubblici. Tali Istruzioni compendiano, in due tabelle, gli elementi guida per la scelta dei suddetti parametri. La Tab. 12. VII suddivide le infrastrutture marittime in due tipi, uno detto di *uso generale* e uno di *uso specifico*, e fornisce la vita minima di progetto da assumere in funzione del suddetto tipo di infrastruttura e del livello di sicurezza richiesto.

Seguendo le Istruzioni: “Per infrastrutture di uso generale si intendono opere di difesa di complessi civili o industriali, che non siano destinati ad uno specifico scopo e per i quali non è chiaramente identificabile il termine della vita funzionale dell’opera. Per infrastrutture ad uso specifico si intendono le opere di difesa di singole installazioni industriali, di porti industriali, di depositi o piattaforme di carico e scarico, di piattaforme petrolifere, ecc.”

“Il livello di sicurezza 1 si riferisce ad opere o installazioni di interesse locale ed ausiliario, comportanti un rischio minimo di perdita di vite umane o di danni ambientali in caso di collasso della stessa (difese costiere, opere di porti minori o marina, scarichi a mare, strade litoranee ecc.)”

“Il livello di sicurezza 2 si riferisce ad opere o installazioni di interesse generale, comportanti un moderato rischio di perdita di vite umane o di danni ambientali in caso di collasso della stessa (opere di grandi porti minori, scarichi a mare di grandi città, ecc.)”

“Il livello di sicurezza 3 si riferisce ad opere o installazioni per la protezione dall’inondazione o di interesse sopranazionale, comportanti un elevato rischio di perdita di vite umane o di danno ambientale in caso di collasso della stessa (difese di centri urbani o industriali ecc.)”.

Per quanto riguarda la probabilità o il rischio che si verifichi l’evento da assumere a base delle verifiche progettuali le Istruzioni forniscono la Tab. 12. VIII in cui sono distinte la condizione di danneggiamento incipiente da quella di distruzione totale. Il danneggiamento incipiente è plausibile quando si tratta di opere di protezione in scogliera che, pur subendo dei danni durante una tempesta, conservano almeno in parte la loro funzione protettiva e possono essere riparate dal danno in un tempo breve. L’ipotesi di distruzione totale deve essere assunta se l’infrastruttura, una volta danneggiata, non è più in grado di assolvere alla sua funzione, come avviene nel caso di dighe a parete verticale. L’ipotesi di distruzione totale deve essere esaminata anche nel caso di opere di difesa in scogliera allorquando esse non possono essere riparate in tempi ragionevoli e quando il livello di danneggiamento è tale da superare la condizione di funzione protettiva.

Secondo le Istruzioni il significato dei termini ripercussione economica bassa, media e alta della Tab. 12.VIII è da intendere in base al rapporto

$$\Omega = \frac{\text{Costi diretti del danneggiamento} + \text{Costi indiretti per perdita di funzionalità}}{\text{Costo totale per la realizzazione dell'opera}}$$

Tab. 12. VIII. Massima probabilità $P(T_R, V_P)$ di verificarsi dell'evento durante la di vita di progetto dell'opera

Tipo di danneggiamento	Ripercussione economica	Rischio per la vita umana	
		Limitato	Elevato
Danneggiamento incipiente	Bassa	0.50	0.30
	Media	0.30	0.20
	Alta	0.25	0.15
Distruzione totale	Bassa	0.20	0.15
	Media	0.15	0.10
	Alta	0.10	0.05

Se $\Omega < 5$ la ripercussione è bassa, se $5 < \Omega < 20$ la ripercussione è media, infine, se $\Omega > 20$ la ripercussione è alta.

Per quanto riguarda il rischio delle perdite di vite umane il caso in cui non è prevista alcuna perdita di vite umane è da considerare “limitato”, il caso in cui queste perdite sono prevedibili il rischio è da considerare “elevato”.

12.10.2 OPERA RICADENTE IN ACQUE DI TRASFORMAZIONE

L'onda estrema calcolata con i criteri esposti in precedenza, essendo ricavata da dati di moto ondoso al largo, prima di raggiungere la struttura, subisce una trasformazione per rifrazione e profondità (shoaling) e questa trasformazione dovrà essere calcolata per l'ottenimento dell'onda di progetto. I criteri di calcolo da seguire sono relativamente semplici se si può applicare l'ipotesi di fondale piano acclive e onda monocromatica. In tal caso, data la direzione di provenienza dell'onda rispetto all'orientamento delle linee isobate si determina facilmente la direzione dell'onda nel punto prestabilito per la costruzione dell'opera, il coefficiente di rifrazione mediante la formula (7.8 a) e quello di profondità mediante la formula (7.15). Nei casi in cui non è possibile una tale semplificazione si possono usare metodi grafici di costruzione del piano di rifrazione da cui ricavare il coefficiente di rifrazione. Resta ferma l'ipotesi di periodo costante dell'onda durante la trasformazione.

Sono disponibili metodi più approssimati che utilizzano modelli numerici anche per la trasformazione di onde irregolari su un assegnato fondale. Anche per le onde irregolari il periodo di picco si ammette costante durante il processo di trasformazione. Tuttavia, alcune tecniche di trasformazioni spettrali prevedono anche il cambiamento del periodo di picco, anche se questi cambiamenti sono di solito modesti.

12.10.3 OPERA RICADENTE IN ACQUE BASSE

Specialmente nei casi riguardanti la progettazione di opere di difesa costiera occorre spingere la trasformazione delle onde fino alle zone di acque basse, in cui i bassi fondali limitano l'altezza delle onde estreme e di quelle di clima ondoso. Nel caso delle onde irregolari l'altezza significativa dell'ordine di 0.6 volte la profondità comincia ad essere limitata nella crescita per effetto del basso fondale. Durante la propagazione oltre il suddetto limite la crescita dell'altezza dell'onda si riduce, aumenta la crescita della ripidità e la profondità media del fondale, a causa dell'aumento del livello medio, cresce dopo il frangente più esterno. Può accadere anche che le trasformazioni delle onde estreme calcolate in acque profonde possano subire nelle zone di acque basse maggiori riduzioni in altezza rispetto ad altre onde. Conseguentemente, in tal caso l'onda estrema può non essere rappresentativa co-

me onda di progetto. Per accertare ciò occorre esaminare la trasformazione in acque basse di un certo numero di onde, oltre a quelle estreme, per poter scegliere quella più appropriata allo scopo progettuale.

Come è stato riportato nel § 11.6, nel caso di moto ondoso irregolare non è possibile stabilire un limite unico della profondità in cui le onde frangono, esiste però sempre un limite alla crescita dell'altezza dell'onda ma tale limite è compreso tra due valori di altezza, uno inferiore che corrisponde alla situazione in cui le onde cominciano a frangere e uno superiore per il quale tutte le onde superano il frangimento. Nel caso delle onde irregolari è importante conoscere il valore massimo dell'altezza dell'onda frangente nella fascia di mareggiata e la profondità corrispondente a tale altezza massima frangente. La linea isobata corrispondente a tale profondità può essere assunta come limite lato mare della fascia di mareggiata. Il valore massimo o picco dell'altezza dell'onda frangente in acque basse può essere calcolato mediante il diagramma della Fig. 11.17. La profondità di acque basse in cui si verifica la massima altezza d'onda significativa frangente si può calcolare mediante il diagramma della Fig. 11.19.

Altri dati importanti da conoscere per la progettazione delle opere di difesa costiera sono l'innalzamento del livello medio del mare durante la condizione di mareggiata e la quota della cresta dell'onda rispetto al livello medio. Tale quota si può calcolare mediante la Fig. 11.20

ESERCIZIO 12.1. Calcolo delle onde estreme al largo per la determinazione dell'onda di progetto di una assegnata opera.

Da una elaborazione dei dati anemometrici registrati nel trentennio 1951÷1980 presso la stazione di Capo Bellavista, ubicata nella costa della Sardegna centro-orientale, utilizzando il metodo SMB nella forma rielaborata da SPM/84, è stata ricostruita la serie storica delle tempeste di cui nella tabella allegata sono riportate le altezze d'onda significative massime riguardanti il paraggio al largo di Capo Ferrato (costa sud-orientale della Sardegna), per il settore 90÷145 °N. Nella suddetta tabella la serie delle altezze d'onda significative massime riguarda le tempeste il cui limite inferiore è pari a $H_{s0} = 4.0 m$.

Nel paraggio suddetto si deve realizzare un'infrastruttura che, secondo le istruzioni tecniche per la progettazione delle dighe frangiflutti consigliate dal Ministero dei Lavori Pubblici (oggi Ministero delle Infrastrutture), è definibile di *uso generale*, con *livello di sicurezza 2*, nelle ipotesi di *distruzione parziale, ripercussione economica media e rischio per la vita umana elevato*.

Utilizzando la serie limitata inferiormente, determinare l'altezza significativa e l'altezza massima modale. Nell'analisi dell'evento estremo del calcolo delle altezze significativa e massima di progetto è richiesta l'adozione della distribuzione di Weibull. È inoltre richiesto il calcolo dell'altezza estrema ottenibile con la distribuzione di Gumbel.

Per entrambe le stime, calcolare l'intervallo di variazione dei risultati ottenuti relativi ai gradi di confidenza del 90% e del 95%.

Le ultime tre righe della assegnata tabella riportano la media delle altezze \bar{H}_{s0} , la deviazione standard s ed il coefficiente di asimmetria $\hat{\gamma}_1$ calcolati rispettivamente utilizzando le formule che seguono

$$\bar{H}_{s0} = \frac{1}{38} \sum_{j=1}^{38} H_{s0j} .$$

La deviazione standard s del campione è calcolata con la formula

$$s = \sqrt{\frac{1}{37} \sum_{j=1}^{38} (H_{sj} - \bar{H}_{s0})^2} .$$

Il coefficiente di asimmetria $\hat{\gamma}_1$ è calcolato applicando la formula

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{38 \times \sqrt{37} \sum_{j=1}^{38} (H_{sj} - \bar{H}_{s0})^3}{36 \left[\sum_{j=1}^{38} (H_{sj} - \bar{H}_{s0}) \right]^{\frac{3}{2}}} .$$

Serie limitata inferiormente delle altezze d'onda significative non inferiori a 4.0 m, ricostruite con il metodo SMB/SPM/84 dai dati anemometrici osservati a capo bellavista nel trentennio 1951÷1980

Numero	ANNO	MESE	GIORNO	ONDA	
				H_{s0} (m)	Direz. (°N)
1	1951	12	24	4.3	130
2	1953	12	7	5.8	130
3	1953	12	17	6.0	130
4	1953	12	19	6.7	120
5	1954	2	19	6.8	120
6	1954	3	11	5.4	110
7	1954	3	13	4.0	140
8	1955	2	1	4.8	140
9	1955	3	14	6.1	90
10	1955	12	3	4.1	130
11	1957	11	18	7.4	110
12	1957	12	26	7.4	120
13	1959	2	10	5.0	90
14	1959	2	26	5.1	130
15	1959	9	22	4.9	120
16	1960	3	26	5.3	100
17	1960	10	14	4.1	130
18	1960	10	20	4.0	130
19	1960	12	18	4.4	100
20	1961	1	23	4.6	110
21	1962	2	10	4.9	110
22	1962	3	10	5.0	110
23	1962	11	6	6.2	120
24	1971	4	1	4.0	130
25	1972	2	25	4.6	120
26	1975	12	22	4.8	100
27	1975	2	6	4.2	140
28	1976	2	6	6.6	130
29	1976	2	8	5.3	90
30	1976	12	21	4.2	140
31	1976	12	22	4.2	120
32	1977	1	7	4.8	140
33	1978	1	19	6.4	140
34	1979	1	19	6.4	140
35	1979	2	25	5.5	100
36	1980	2	22	4.5	140
37	1980	4	30	4.1	130
38	1980	12	29	4.6	120
medie				5.2	121.0526
deviazione standard H_{s0}				1.0	
Coeff. A simmetria H_{s0}				0.7	

Schema di soluzione

12.1.1 Determinazione del tempo di ritorno. Mediante la Tab. 12. VII, si determina la vita minima di progetto V_p in anni. Per il livello di sicurezza 2 e per una struttura di uso generale tale tabella fornisce la vita di progetto di V_p in anni. La Tab. 12. VIII, per la condizione di danneggiamento incipiente, ripercussione

economica media e rischio per la vita umana elevato fornisce la probabilità di danneggiamento ammissibile $P(T_R, V_P)$.

Il tempo di ritorno T_R dell'evento cui fare riferimento dipende dal rischio $P(T_R, V_P)$ che esso si verifichi almeno una volta durante la vita di progetto. Come risulta dall'eq. (12.105) si ha

$$T_R = \frac{V_P}{-\ln[1 - P(T_R, V_P)]}$$

12.1.2 Calcolo dell'altezza dell'onda estrema utilizzando la distribuzione di Weibull. La distribuzione di Weibull, per il calcolo delle onde estreme, è data dalla eq. (12.63)

$$P(H_{s0}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{H_{s0} - H_0}{H_C - H_0} \right)^\alpha \right]$$

Nel caso in argomento, il limite inferiore H_{\min} , entro il quale è valida la distribuzione di Weibull, ed il parametro di scala H_C devono essere determinati in base ai dati della serie limitata inferiormente. In particolare, si ha (eq. (12.86), (12.87))

$$H_C = A_\alpha s + \bar{H}_{s0},$$

$$H_0 = H_C - B_\alpha s.$$

I valori di A_α , B_α e il parametro di forma α sono funzioni del coefficiente di asimmetria $\hat{\gamma}_I$ e sono riportati nella Tab. 12. IV. Si interpoli linearmente se $\hat{\gamma}_I$ non coincide con uno dei valori della tabella.

Noti A_α , B_α , α e T_R , si può determinare il fattore di frequenza (eq. (12.93))

$$K_T = A_\alpha + B_\alpha \left\{ \left[-\ln \left(\frac{1}{T_R} \right) \right]^\frac{1}{\alpha} - 1 \right\}$$

e quindi l'altezza d'onda significativa corrispondente al periodo di ritorno T_R (eq. 12.30)

$$H_{sT_R} = \bar{H}_{s0} + K_T s.$$

L'errore standard risulta (eq. (12.31))

$$S_T = \delta \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

essendo n la numerosità della serie limitata inferiormente e δ un parametro dipendente dal coefficiente di asimmetria che si ricava dalla Tab. 12. VI. Il valore reale dell'altezza d'onda significativa di periodo di ritorno T_R risulta dunque compreso tra i due estremi

$$H_{sT_R} \pm t S_T,$$

essendo t il frattile della distribuzione normale standardizzata. Per il livello di confidenza del 90%, il livello di significatività è pari a

$$L_S = \frac{(1-0.9) \times 100}{2} = 5\%$$

ossia per una eccedenza della confidenza del 10%, deve intendersi che il 5% dei valori di H_s estremi sono inferiori al valore stimato e il 5% sono superiori. Dunque si deve assumere il frattile corrispondente al 95% del valore della distribuzione normale standardizzata.

$$t = 1.645.$$

Analogamente per il frattile corrispondente al 97.5% della distribuzione normale standardizzata si ha il valore

$$t = 1.960.$$

12.1.3 Calcolo dell'altezza dell'onda massima modale. La persistenza della tempesta sopra una determinata soglia H_S è dato dall'eq. (12.104)

$$\tau_s(H_T) = \frac{\sqrt{2\pi}(H_c - H_0)^\alpha}{\alpha \dot{\sigma}_{H_T}(H_s - H_0)^{\alpha-1}},$$

ove α rappresenta il parametro di forma della distribuzione di Weibull, H_0 il limite inferiore delle altezze d'onda della serie limitata inferiormente, H_c il parametro di scala e $\dot{\sigma}_H$ la deviazione standard dei rapporti incrementali positivi rispetto al tempo della serie storica delle altezze d'onda del sito. Per ogni sito, può essere trovata una relazione lineare tra l'altezza dell'onda significativa e la deviazione standard dei suoi rapporti incrementali positivi. Si ponga

$$\dot{\sigma}(H_T) = 0.04 + 0.062H_T.$$

Si assuma la condizione di moto ondoso di mare vivo con spettro di frequenza JONSWAP ($\gamma=3.3$) per il quale tra altezza e periodo significativo vale la relazione

$$T_s = \sqrt{\frac{H_{s0}}{0.049}}.$$

Per la determinazione del periodo medio si assuma la relazione

$$\bar{T} = \frac{T_s}{1.2}.$$

Il numero medio di onde della tempesta è dato dalla relazione:

$$N_0 = \frac{\tau_s(H_T)}{\bar{T}}.$$

Dunque la massima altezza d'onda più frequente risulta:

$$(H_{max})_{mod} \approx 2\sqrt{2m_0} \sqrt{\ln N_0} \left(1 + \frac{1}{4(\ln N_0)^2} + \dots \right)$$

essendo:

$$m_0 = \frac{(H_{sT_R})^2}{16}.$$

12.1.2 Calcolo dell'altezza dell'onda estrema utilizzando la distribuzione di Gumbel. La distribuzione di Gumbel ha la forma (eq. (12.33))

$$P(H_{s0}) = \exp\{-[\exp - \alpha(H_{s0} - \beta)]\},$$

Ove α e β devono determinarsi in base alla assegnata serie limitata inferiormente. Secondo il metodo dei momenti, i coefficienti α e β valgono rispettivamente (eq. (12.42), (12.43)):

$$\alpha = \frac{1.2825}{s},$$

$$\beta = \bar{H}_s - 0.4500 s.$$

Il fattore di frequenza K_T può essere calcolato mediante la formula (eq. (12.58))

$$(K_T)_{Gumbel} = - \left[0.45 + 0.7797 \ln \left(- \ln \frac{T_R - 1}{T_R} \right) \right].$$

L'altezza significativa calcolata secondo la distribuzione di Gumbel risulta quindi

$$(H_{sT_R})_{Gumbel} = \bar{H}_s + (K_T)_{Gumbel} s.$$

L'errore standard risulta (eq. (12. 60))

$$S_T = \left[1 - 1.1396(K_T)_{Gumbel} + 1.1000(K_T)_{Gumbel} \right]^{1/2} \frac{S}{\sqrt{n}},$$

essendo n il numero degli elementi della serie limitata inferiormente.

Il valore reale dell'altezza d'onda significativa di periodo di ritorno T_r risulta dunque compreso tra i due estremi

$$(H_{sT_r})_{Gumbel} \pm tS_T,$$

essendo t il frattile della distribuzione normale standardizzata per il livello di confidenza richiesto (Grado di confidenza 90%: $t = 1.645$. Grado di confidenza 95%: $t = 1.960$)

ESERCIZIO 12.2. Trasferimento delle onde estreme all'opera

Nella costa sud-orientale della Sardegna si deve realizzare un'opera di difesa mediante una schiera di frangiflutti paralleli a gettata il cui piede del paramento lato mare è previsto alla profondità di 3.5 m (l. m. m.). Come onda estrema al largo si adotti l'altezza significativa H_T calcolata nell'esercizio 12.1 utilizzando la distribuzione di Weibull in quanto si ammette che tale onda produca la massima sollecitazione sull'opera. Calcolare l'altezza dell'onda di progetto. Si faccia l'ipotesi di fondale piano acclive.

DATI:

orientamento della spiaggia (direzione della normale uscente)
 direzione del moto ondoso al largo
 pressione atmosferica durante la tempesta
 velocità della perturbazione atmosferica
 livello della più bassa minima marea
 livello di bassa marea
 livello media mareale
 livello medio mare (l. m. m.)
 livello alta marea
 livello della più alta alta marea
 pendenza del fondale piano
 Distanza del frangiflutti dal limite della piattaforma continentale

$Dir_s = 80^\circ N$;
 $Dir_0 = 120^\circ N$;
 $p_A = 995 \text{ hPa}$;
 $C_A = 36 \text{ km/ora}$;
 $\eta_0 = 0.000 \text{ m}$;
 $\eta_b = + 0.020 \text{ m}$;
 $\eta_{mm} = + 0.170 \text{ m}$
 $\eta_m = + 0.160 \text{ m}$;
 $\eta_a = + 0.320 \text{ m}$;
 $\eta_{aa} = + 0.340 \text{ m}$;
 $m_f = 0.01$;
 $X_p = 5000 \text{ m}$.

Schema di soluzione

Il livello del mare rispetto al quale si svolge la tempesta è condizionato dal livello della marea astronomica al quale si somma il livello della tempesta (storm surge) più ancora il wave set down /wave set up dovuto al moto ondoso. Il livello della marea astronomica durante la tempesta è indipendente dalla tempesta stessa, mentre il livello della tempesta si verifica insieme al wave set down /wave set up. A favore della sicurezza il set down sarà posto uguale a zero.

Più lunga è la durata della tempesta, più è probabile che il livello di tempesta si verifichi in corrispondenza dell'alta marea. A vantaggio della sicurezza si stabilisca che, se la durata della tempesta supera le due ore, il livello massimo di tempesta coincida con il livello di alta marea.

12.2.1 Durata della tempesta. La persistenza della tempesta sopra una determinata soglia H_T è data dall'eq. (12.104)

$$\tau_s(H_T) = \frac{\sqrt{2\pi}(H_c - H_0)^\alpha}{\alpha \dot{\sigma}_{H_T} (H_T - H_0)^{\alpha-1}},$$

ove α rappresenta il parametro di forma della distribuzione di Weibull, H_0 il limite inferiore delle altezze d'onda della serie, H_c il parametro di scala e $\dot{\sigma}_{H_T}$ la deviazione standard dei rapporti incrementali positivi rispetto al tempo della serie storica delle altezze d'onda del sito. Per ogni sito, può essere trovata una relazione

lineare tra l'altezza dell'onda significativa e la deviazione standard dei suoi rapporti incrementali positivi. Si ponga

$$\dot{\sigma}(H_T) = 0.04 + 0.062H_T.$$

Se $\tau_s(H_T) > 2$ ore si assumerà il livello di alta marea $\eta_a = + 0.320$ m, altrimenti si assuma il livello di alta marea intermedio $\eta_a' = + 0.200$ m.

12.2.2 Livello medio del mare in tempesta. È dato dall'effetto combinato della velocità del vento responsabile del moto ondoso che, a causa della sua azione di trascinamento sulla superficie del mare produce l'accumulo di acqua verso la riva sottovento η_{wi} (wind set up) Utilizzando l'eq. (3.100a) si ottiene la quota dell'innalzamento di livello dovuta al wind set up

$$\eta_{wi} = \frac{K X_P U^2}{g(d_{200} - d_P - \eta_{wi})} \ln\left(\frac{d_{200}}{d_P + \eta_{wi}}\right),$$

essendo K un coefficiente adimensionale ($K = 3 \times 10^6$), U è la velocità del vento che può ottenersi dall'eq. (10.9), valida per fetch molto estesi

$$\tilde{H}_{m0} = \frac{H_T g}{U_A^2} = 0.25,$$

essendo U_A il coefficiente di trascinamento legato ad U dalla relazione

$$U = \left(\frac{U_A}{0.71}\right)^{1/1.23}.$$

η_{wi} si calcherà in corrispondenza del punto al largo, in cui il moto ondoso non è ancora influenzato dal fondo, e al piede dell'opera di difesa. d_{200} è la profondità al limite della piattaforma continentale, d_P la profondità al largo o al piede dell'opera di difesa e X_P la distanza del punto al largo o di quello al piede dal limite della piattaforma.

Per la bassa pressione atmosferica, cautelativamente ammessa sempre presente durante le tempeste, e per la velocità della perturbazione si ha l'innalzamento di livello η_{pa} (eq. (3.116))

$$\eta_{pa} = \frac{\Delta\eta_s}{\left(1 - \frac{C_A^2}{gd}\right)},$$

ove $\Delta\eta_s = -0.995\Delta P_A$ (eq. (3.106)) è la variazione idrostatica di livello dovuta alla variazione Δp_A della pressione atmosferica ($\Delta p_A = p_A - 1013$). ($\Delta\eta_s$) = cm; (Δp_A) = hPa.

Sommando le tre componenti responsabili dell'innalzamento di livello (alta marea, wind set up al largo e pressione atmosferica esaltata dalla velocità della perturbazione) si ottiene il livello al largo rispetto al quale evolve il moto ondoso.

12.2.3 Calcolo del coefficiente di rifrazione. Il calcolo più approssimato del coefficiente di rifrazione delle onde irregolari può farsi servendosi del grafico della Fig. 11.2 per la condizione di mare vivo ($S_{max} = 10$).

L'onda estrema calcolata nel precedente esercizio è un'onda di mare vivo a pieno sviluppo il cui spettro è del tipo JONSWAP medio per cui tra l'altezza significativa al largo H_T e il corrispondente periodo T_s esiste la relazione

$$T_s = \sqrt{\frac{H_T}{0.049}}.$$

La lunghezza dell'onda significativa al largo risulta

$$L_0 = \frac{gT_s^2}{2\pi}$$

Il valore minimo della profondità per la quale l'onda non sente il fondo è

$$d_0 = \frac{L_0}{2},$$

ove con d_0 si deve intendere la profondità di riduzione degli scandagli maggiorata dell'innalzamento dovuto alla tempesta e all'alta marea.

La lunghezza dell'onda nelle acque di trasformazione si calcola applicando l'istruzione "ricerca obiettivo" del foglio elettronico alla formula

$$L_d = L_0 \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L_d}$$

La rifrazione prodotta da un fondale piano acclive è retta dalla relazione di Snellius

$$\operatorname{sen}(DirN - DirH_d) = \frac{L_d}{L_0} \operatorname{sen}(DirN - DirH_0).$$

Assegnata la profondità d del fondale e calcolata la corrispondente lunghezza d'onda, indicate (in gradi Nord) con $DirH_0$ la direzione dell'onda al largo e con $DirN$ la direzione della normale uscente dalla spiaggia la precedente relazione permette di determinare la direzione dell'onda $DirH_d$ in corrispondenza della profondità d . Il coefficiente di rifrazione risulta

$$K_r = \sqrt{\frac{\cos(DirN - DirH_0)}{\cos(DirN - DirH_d)}}$$

L'altezza dell'onda non rifratta vale $H_0' = K_r H_0$.

12.2.4 Calcolo dell'onda massima frangente. Nel caso delle onde irregolari di mare vivo la massima altezza d'onda frangente in acque di trasformazione ($H_{1/3}$)_{picco} e la corrispondente profondità ($d_{1/3}$)_{picco} si determinano entrando nei due diagrammi delle Fig. 11.17 e 11.19 con il parametro H_0'/L_0 . Fino alla profondità ($d_{1/3}$)_{picco} si assuma pari a zero l'innalzamento di livello dovuto alle onde (wave set up).

12.2.5 Coefficiente di profondità (shoaling). Si calcola mediante l'uso del grafico della Fig. 11.4. Fino a quando la profondità è superiore all'8% della lunghezza d'onda al largo il calcolo del coefficiente di profondità può eseguirsi mediante la relazione, valida per la teoria di Airy:

$$K_s = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{th} kd \left(1 + \frac{2kd}{\operatorname{sh} 2kd} \right)}}$$

essendo $k = \frac{2\pi}{L}$ il numero d'onda.

12.2.6 Calcolo del wave set up. Nella zona di mareggiata si verifica il wave set up che occorre calcolare con l'ausilio del diagramma della Fig. 11.15.

Per conoscere come cambia il wave set up dal punto di frangimento più esterno fino al frangiflutti si considerino le profondità comprese tra questi estremi assumendo per esse i valori contenenti gli innalzamenti di livello dovuti alla marea e alla tempesta. Entrando nel diagramma della Fig. 11.15 con i valori di d/H_0' , in

corrispondenza del valore di H_0/L_0 si determina $\bar{\eta}/H_0'$ e quindi $\bar{\eta}$. Se $\bar{\eta}$ è grande occorre ripetere il calcolo ponendo al posto di d il valore $d' = d + \bar{\eta}$.

12.2.7 Calcolo dell'altezza dell'onda al piede del frangiflutti. L'altezza dell'onda frangente al piede del frangiflutti si calcola mediante il grafico della Fig. 11.16 entrando in ascisse con il parametro d/H_0' con d affetto delle maggiorazioni di livello dovute alla marea, alla tempesta e al wave set up.