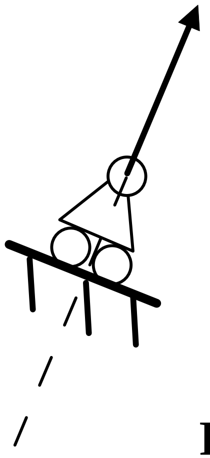
Reazioni vincolari

in

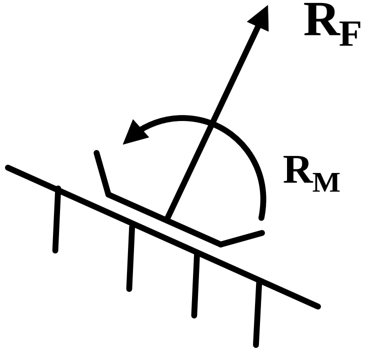
Strutture isostatiche

Reazioni trasmesse dai vincoli a terra

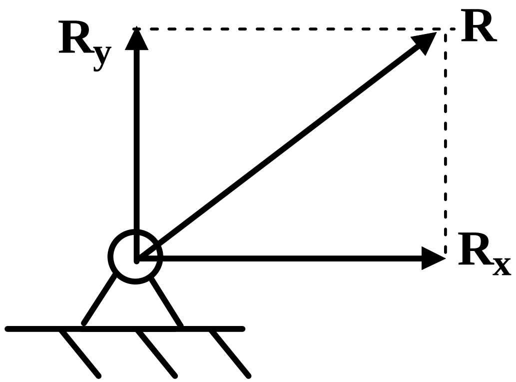
- I vincoli a terra tramettono alla struttura reazioni corrispondenti ai gdl impediti



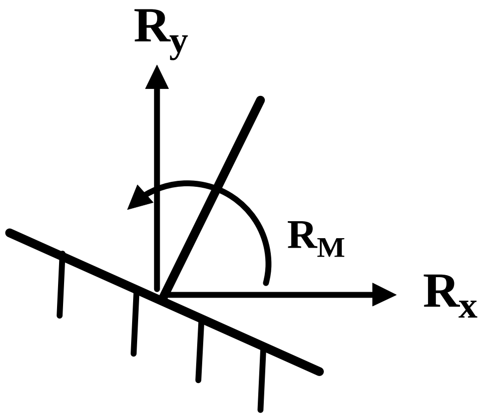
Il carrello trasmette una forza diretta come l'asse del carrello



Il pattino trasmette una forza diretta come l'asse e una coppia



La cerniera trasmette un vettore forza con 2 componenti cartesiane



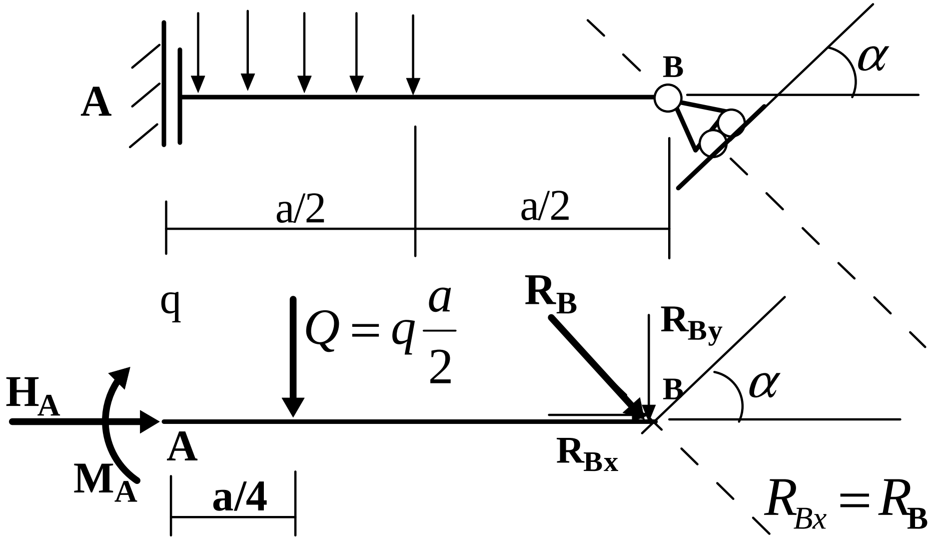
L'incastro trasmette 2 componenti cartesiane di forza e una coppia

Reazioni vincolari a terra per aste singole isostatiche

- In genere le reazioni vincolari sono incognite mentre sono note le forze applicate. In questo caso si procede così:
  - Si sostituiscono i vincoli con le reazioni vincolari corrispondenti
  - S'impostano le 3 equazioni cardinali della statica del corpo rigido piano. Il polo per il calcolo dei momenti è del tutto arbitrario e la sua scelta è puramente una questione di convenienza
  - Si ricavano, avendo 3 equazioni in 3 incognite, le 3 reazioni.

N.B. I versi delle reazioni vincolari sono inizialmente arbitrari e non necessariamente devono essere concordi con gli assi.

Esempio 1



$$R_{Bx} = R_{\mathbf{B}} \sin\alpha \quad R_{By} = R_B \cos\alpha$$

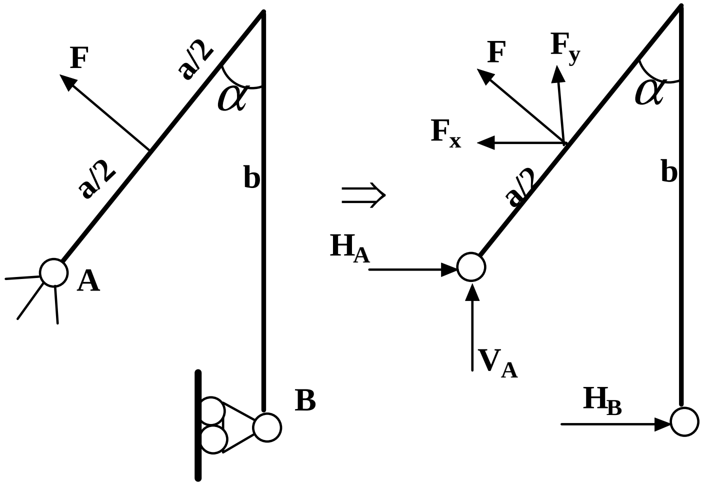
$\rightarrow)\ H_A + R_{Bx} = 0$ dalla $2^a : R_{By} = -Q \rightarrow R_B = -\dfrac{Q}{\cos\alpha}$

$\uparrow)\ -Q - R_{By} = 0$ dalla $1^a :\ H_A = -R_{Bx} = Q\tan\alpha$

$\text{A}\circlearrowleft)\ -M_{\text{A}} - Q\dfrac{a}{4} - R_{By}a = 0$ dalla $3^a : M_{\text{A}} = -Q\dfrac{a}{4} - R_{By}a = Q\dfrac{3a}{4}$

verifica alla rotazione intorno a B: $-M_A + Q\left(\dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{2}\right) = 0$

Esempio 2



dati:

F = 1 kN   a = 1000 mm b = 1400 mm

$$\alpha = 33°$$

$$F_x = F\cos\alpha = 838{,}7\,N$$

$$F_y = F\sin\alpha = 544{,}6\,N$$

$$\rightarrow)\ \ -F_x + H_A + H_B = 0$$

$$\uparrow)\ \ V_A + F_y = 0$$

$$A\circlearrowleft)\ \ F_x\frac{a}{2}\cos\alpha + F_y\frac{a}{2}\sin\alpha + H_B(b - a\cos\alpha) = 0$$

verifica B):

$$-H_A(b - a\cos\alpha) - V_A(a\sin\alpha) + F_x\left(b - \frac{a}{2}\cos\alpha\right) - F_y\frac{a}{2}\sin\alpha = 0$$

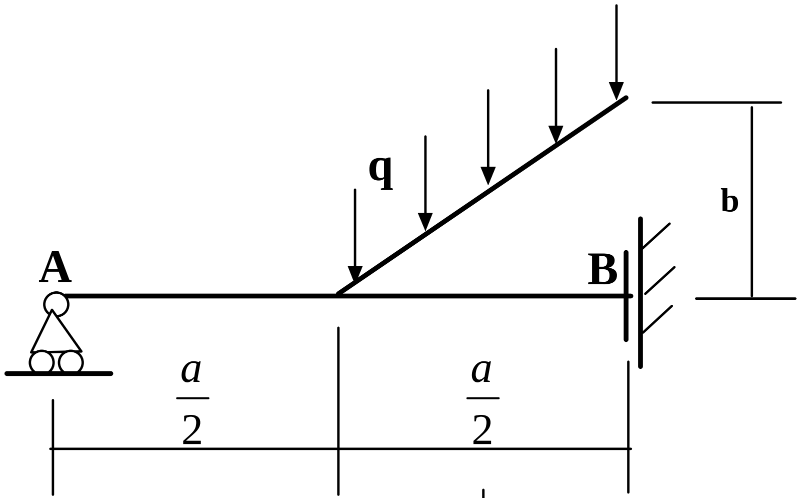
Risultati:

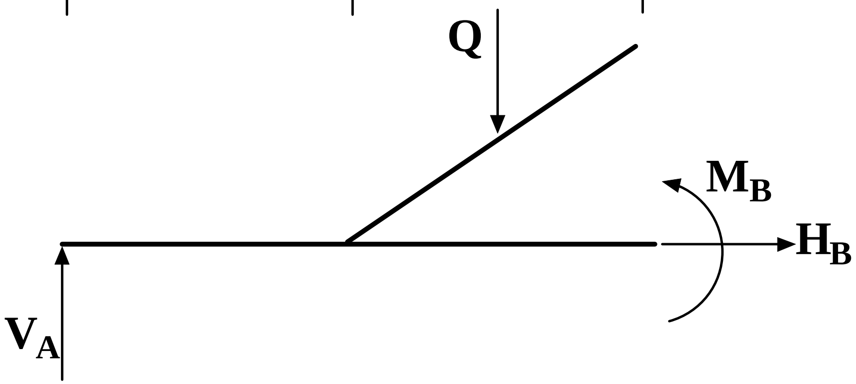
dalla 3ª : $H_B = -890{,}8\ \mathrm{N}$

dalla 2ª : $V_A = -544{,}6\ \mathrm{N}$

dalla 1ª : $H_A = 1730\ \mathrm{N}$

Esempio 3





$$a = 1000mm \quad b = 400mm \quad q = 10N/mm$$

$$Q = q\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b^2} = 6403N$$

$$\rightarrow) \quad H_B = 0$$

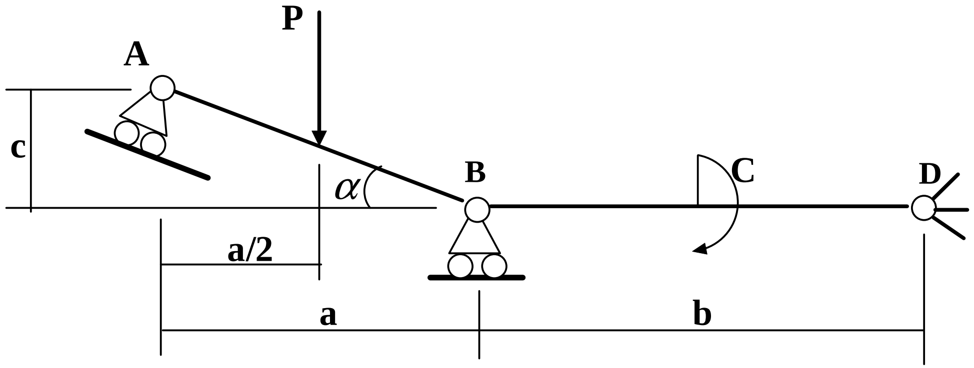
$$\uparrow) \quad V_A - Q = 0 \rightarrow V_A = Q = 6403N$$

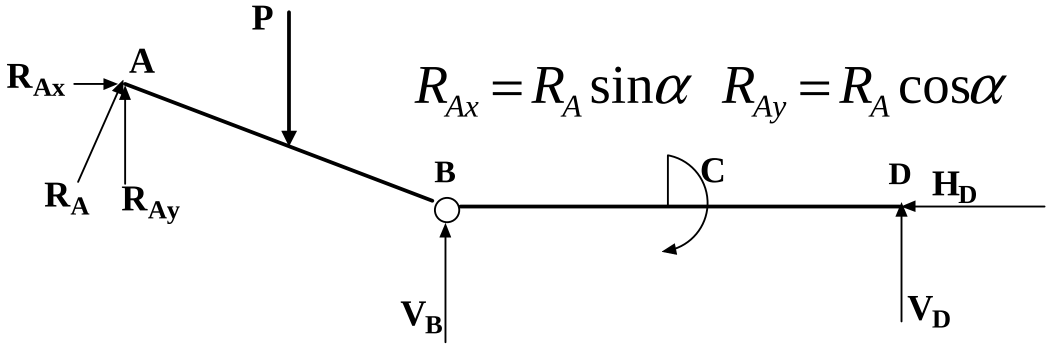
$$A \circlearrowleft) \quad -Q(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}) + M_B = 0 \rightarrow M_B = 4{,}802 \cdot 10^6 \, Nmm$$

Reazioni a terra in strutture con più aste

- Se le reazioni incognite sono più di 3, le 3 equazioni della statica non bastano
- Si devono cercare equazioni ulteriori, considerando l’equilibrio di parti della struttura
- Infatti se una struttura è in equilibrio, ogni sua parte deve essere in equilibrio

Esempio 1





$$R_{Ax} = R_A \sin\alpha \quad R_{Ay} = R_A \cos\alpha$$

$\rightarrow)\quad R_{Ax} - H_D = 0$

$\uparrow)\quad R_{Ay} - P + V_B + V_D = 0$

$BD \quad B\circlearrowright) \quad -C + V_D b = 0 \rightarrow V_D = \dfrac{C}{b}$

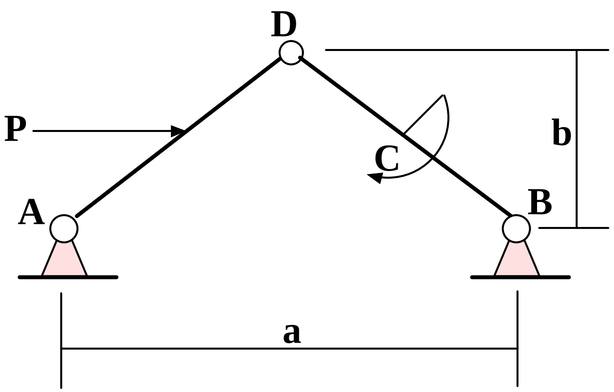
$AB \quad B\circlearrowright) \quad -R_{Ax} c - R_{Ay} a + P\dfrac{a}{2} = 0$

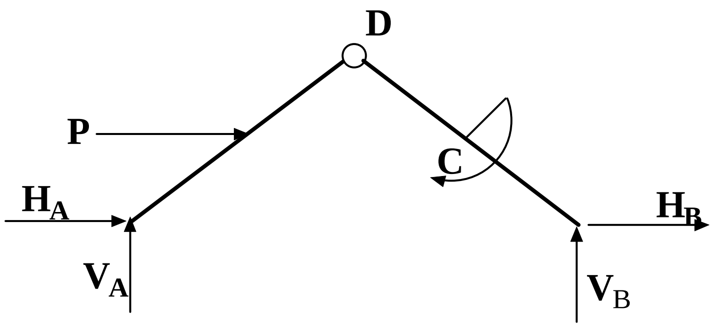
dalla 4ª : $R_A(c\sin\alpha + a\cos\alpha) = P\dfrac{a}{2} \rightarrow R_A$

dalla 1ª : $H_D = R_A \sin\alpha$

dalla 2ª : $V_B = -R_A\cos\alpha + P - \dfrac{C}{b}$

Esempio 2
arco a 3 cerniere





$$\rightarrow) \quad H_A + P + H_B = 0 \qquad 1)$$

$$\uparrow) \quad V_A + V_B = 0 \qquad 2)$$

$$AD\ D)\ H_A b - V_A \frac{a}{2} + P\frac{b}{2} = 0 \qquad 3)$$

$$BD\ D)\ V_B \frac{a}{2} + H_B b - C = 0 \qquad 4)$$

dalla 1) $H_A = -P - H_B$

dalla 2) $V_A = -V_B$

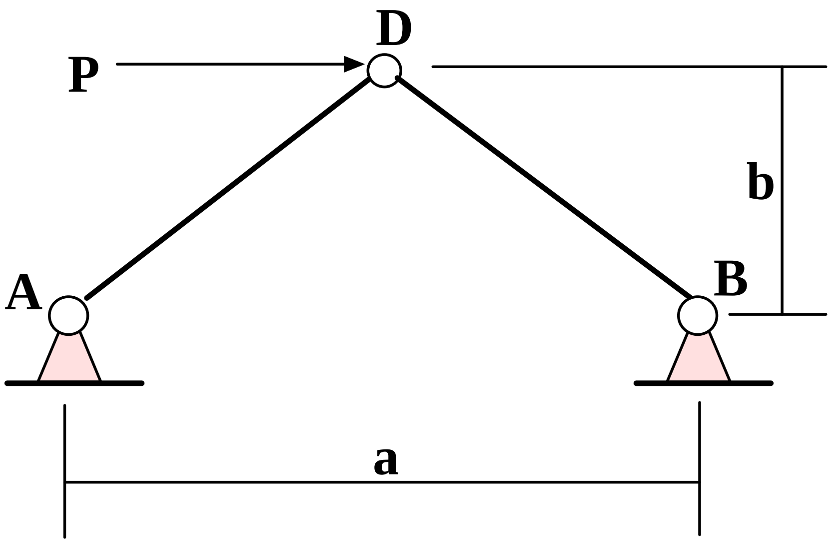
dalla 3) $-H_B b + V_B \frac{a}{2} = P\frac{b}{2}$ 3')

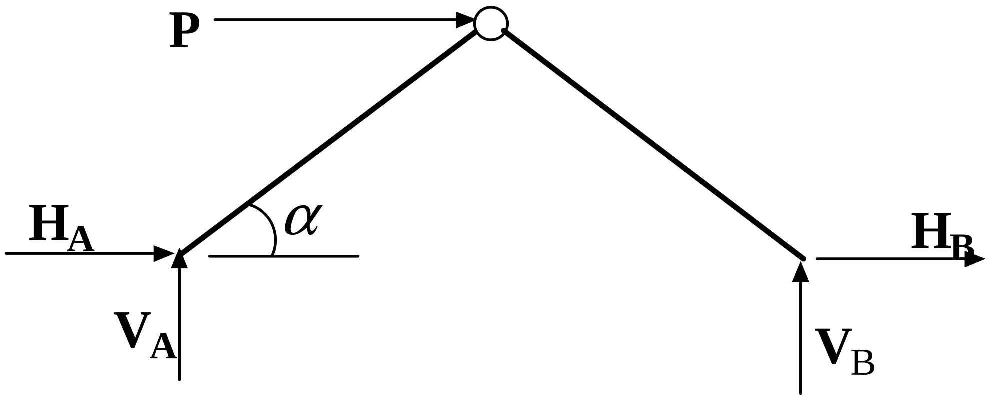
dalla 4) $V_B \frac{a}{2} = -H_B b + C$ 4')

sostituendo la 4') *nella* 3') *si ottiene*:

$$H_B = \frac{C}{2b} - \frac{P}{4} \rightarrow V_B = \frac{C}{a} + P\frac{b}{2a}\ ; H_A = -\frac{C}{2b} - \frac{3P}{4}; V_A = -\frac{C}{a} - P\frac{b}{2a}$$

Esempio 3 - Arco a 3 cerniere con carico sulla cerniera centrale





$$\rightarrow)\quad H_A + P + H_B = 0$$

$$\uparrow)\quad V_A + V_B = 0$$

$$AD\ D)\ H_A b - V_A \frac{a}{2} = 0 \rightarrow \frac{V_A}{H_A} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

$$BD\ D)\ V_B \frac{a}{2} + H_B b = 0 \rightarrow \frac{V_B}{-H_B} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

dalla 1ª $H_A = -P - H_B$

dalla 2ª $V_A = -V_B$

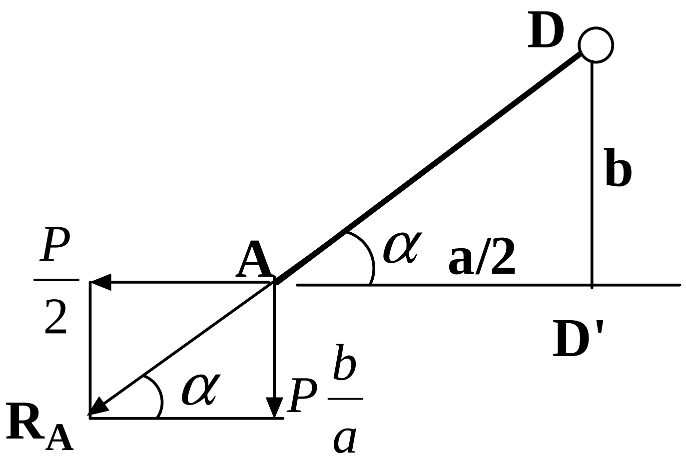
dalla 3ª $-H_B b + V_B \frac{a}{2} = Pb$

dalla 4ª $V_B \frac{a}{2} = -H_B b$

si ottiene:

$$H_B = -\frac{P}{2};\ V_B = P\frac{b}{a} \quad \text{etc.}$$

(Continua)



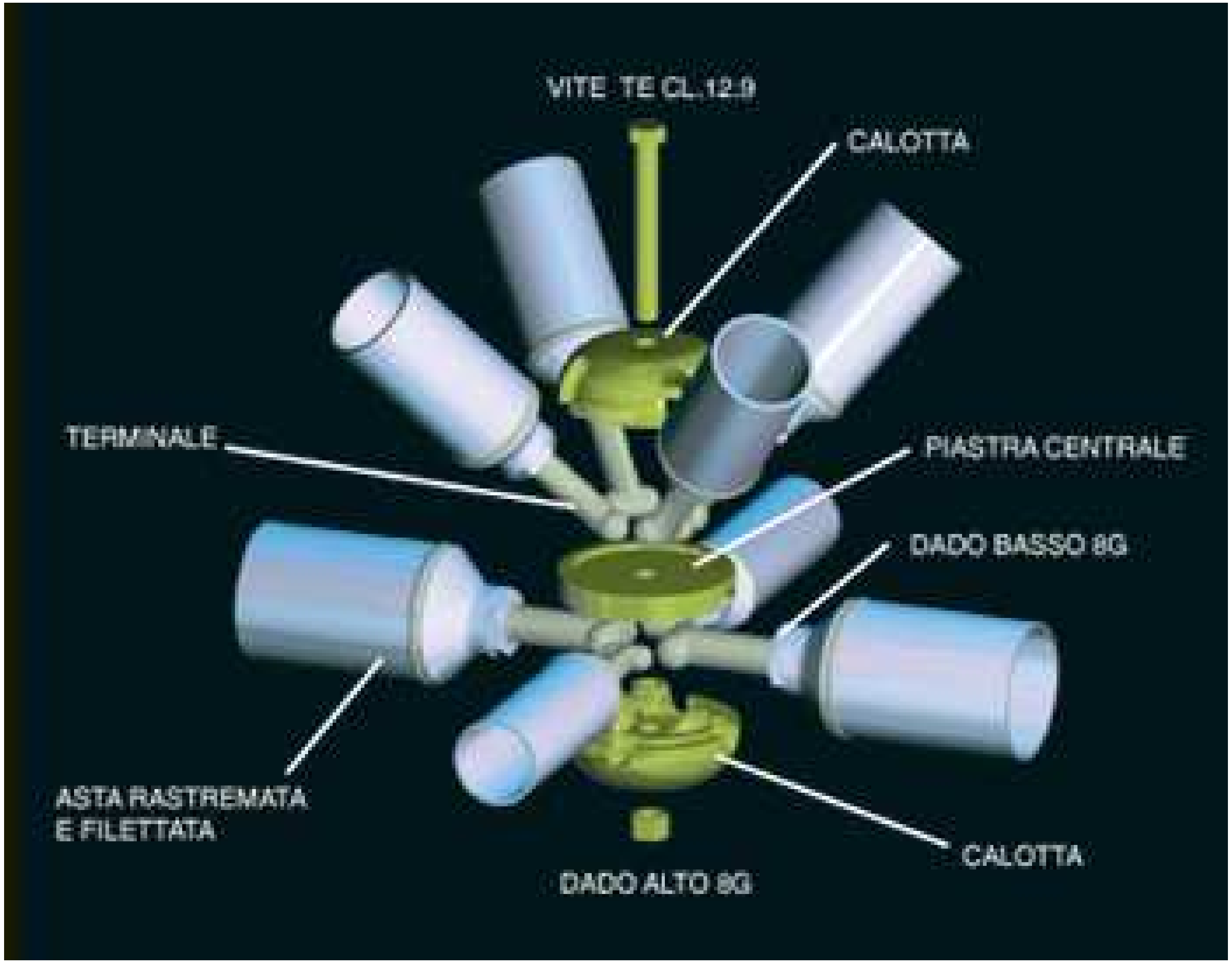
N.B.

Le componenti verticale e orizzontale della reazione R_A *stanno nello stesso rapporto (* $\tan\alpha$ *) dei lati b e* $\frac{a}{2}$ *del triangolo ADD', cioè* R_A *è diretta come l'asta AD*

- Aste connesse alla struttura da cerniere d’estremità e non sottoposte a forze o coppie nella loro lunghezza, sono soggette a reazioni dirette da cerniera a cerniera

Snodi meccanici

Nodo sferico per strutture reticolari spaziali



Modello di movimentazione del ginocchio

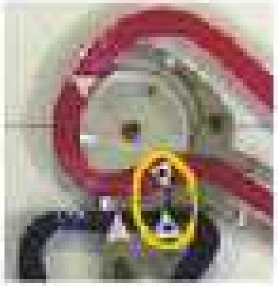


Fig.1

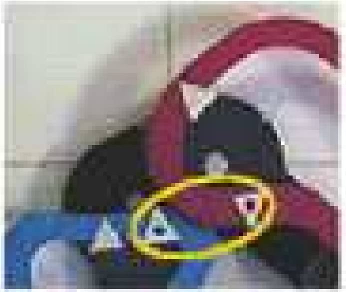


Fig.2

Fig.3

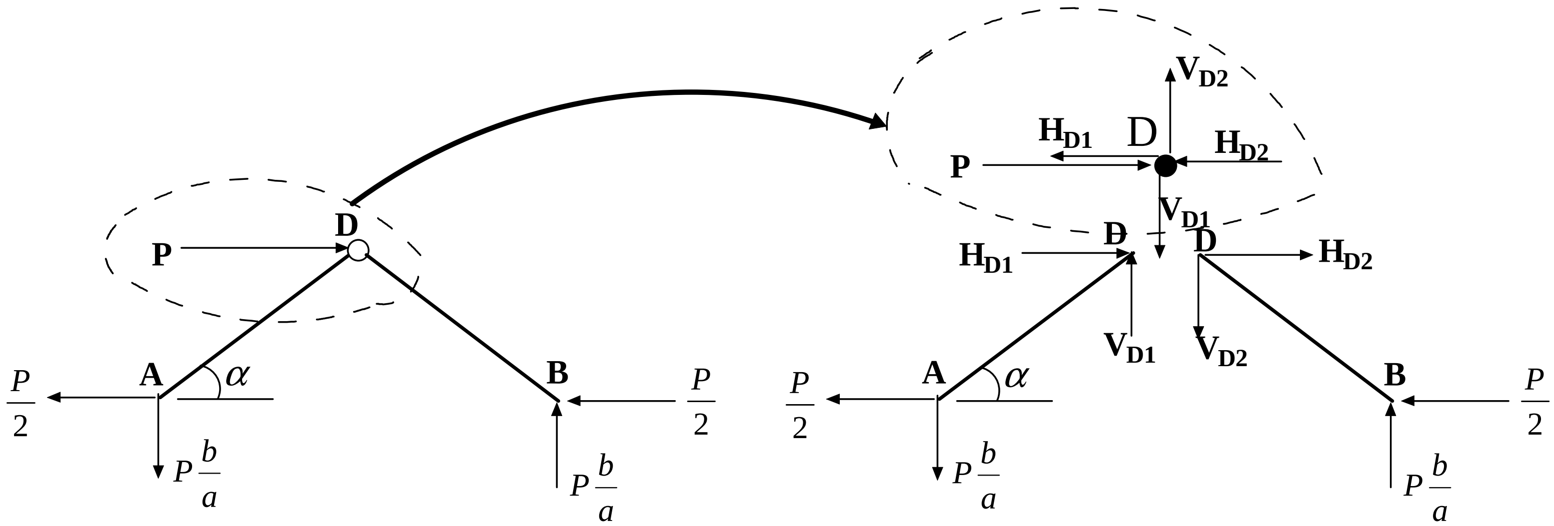
Fig.4

Ginocchiera per moto cross

Protesi articolazione malleolare

Reazioni interne dell’esempio 3

- Scomponendo la struttura nelle singole aste si possono scrivere per ogni asta ed ogni nodo le condizioni di equilibrio



Equilibrio dell'asta AD:

$$\rightarrow)\ \mathrm{H}_{\mathrm{D1}} - \frac{P}{2} = 0$$

$$\uparrow)\ \mathrm{V}_{\mathrm{D1}} - \frac{Pb}{a} = 0$$

Eq. asta DB:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{D2}} - \frac{P}{2} = 0$$

$$-\mathrm{V}_{\mathrm{D2}} + \frac{Pb}{a} = 0$$

Eq. nodo D:

$$-H_{D1} - H_{D2} + P = 0$$

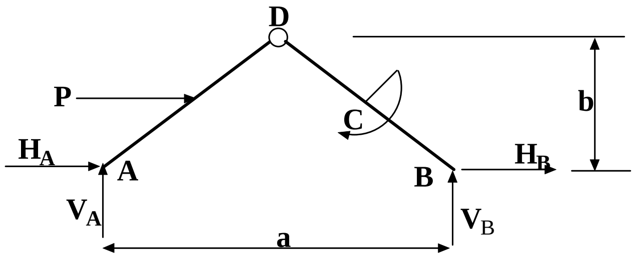
$$-V_{D1} + V_{D2} = 0$$

Reazioni interne
Considerazioni

- Prima di tutto conviene determinare le reazioni esterne
- Poi scomporre la struttura nelle aste componenti e considerare le condizioni di equilibrio per ciascuna di esse
- Infine considerare le condizioni di equilibrio dei nodi
- N.B. le azioni a un nodo provenienti dalle aste sono uguali e contrarie alle corrispondenti azioni sulle aste

Reazioni interne dell’esempio 2

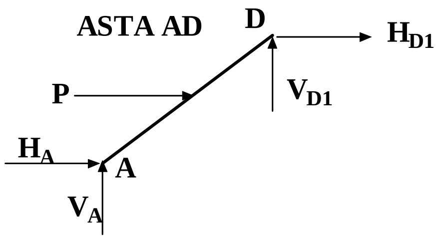
REAZIONI ESTERNE



$$H_A = -\frac{3P}{4} - \frac{C}{2b}; H_{\mathbf{B}} = -\frac{P}{4} + \frac{C}{2b};$$

$$V_A = -\frac{Pb}{2a} - \frac{C}{a}; V_B = \frac{Pb}{2a} + \frac{C}{a}$$

ASTA AD

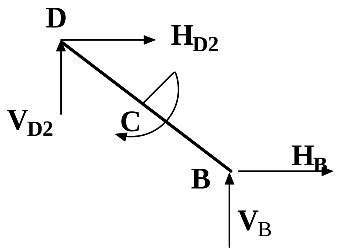


$$\rightarrow): H_{D1} = -H_A - P = \frac{C}{2b} - \frac{P}{4}$$

$$\uparrow): V_{D1} = -V_A = \frac{C}{a} - \frac{Pb}{2a}$$

$$A\circlearrowleft) \; : -P\frac{b}{2} + V_{D1}\frac{a}{2} - H_{D1}b = 0$$

ASTA DB

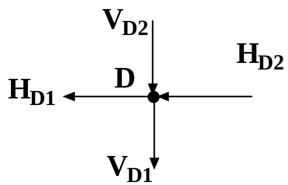


$$\rightarrow) H_{D2} = -H_B = \frac{P}{4} - \frac{C}{2b}$$

$$\uparrow) \; V_{D2} = -V_B = -\frac{Pb}{2a} - \frac{C}{a}$$

$$D\circlearrowleft) \; V_B\frac{a}{2} + H_B b - C = 0$$

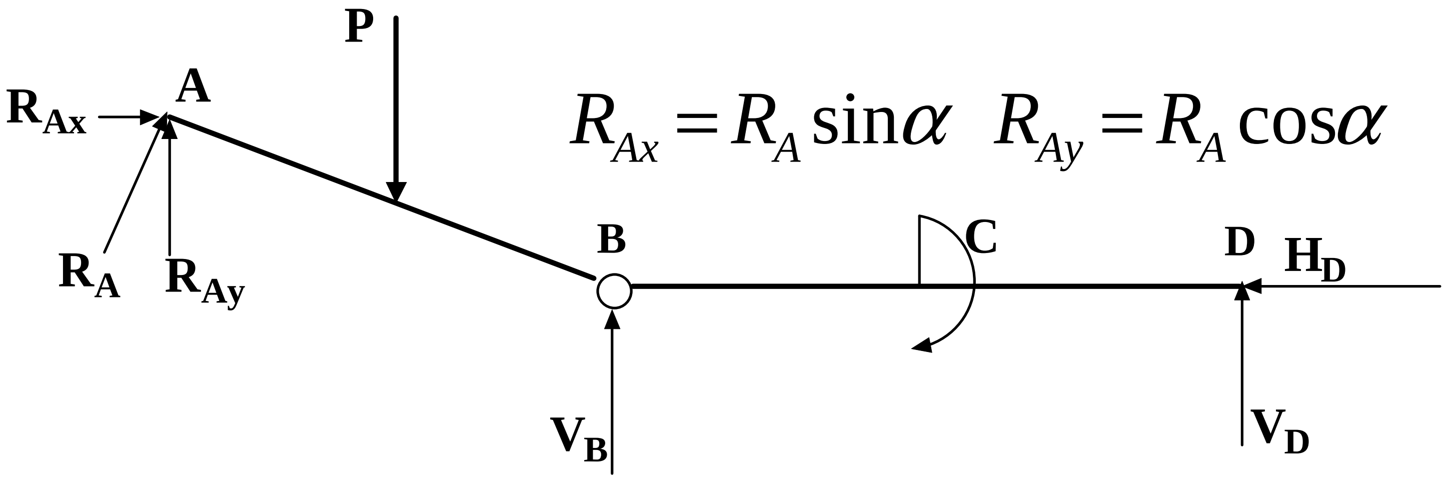
NODO D



$$H_{D1} + H_{D2} = 0$$

$$V_{D1} + V_{D2} = 0$$

Ripresa dell'esempio 1 con valori numerici



$$R_{Ax} = R_A \sin\alpha \quad R_{Ay} = R_A \cos\alpha$$

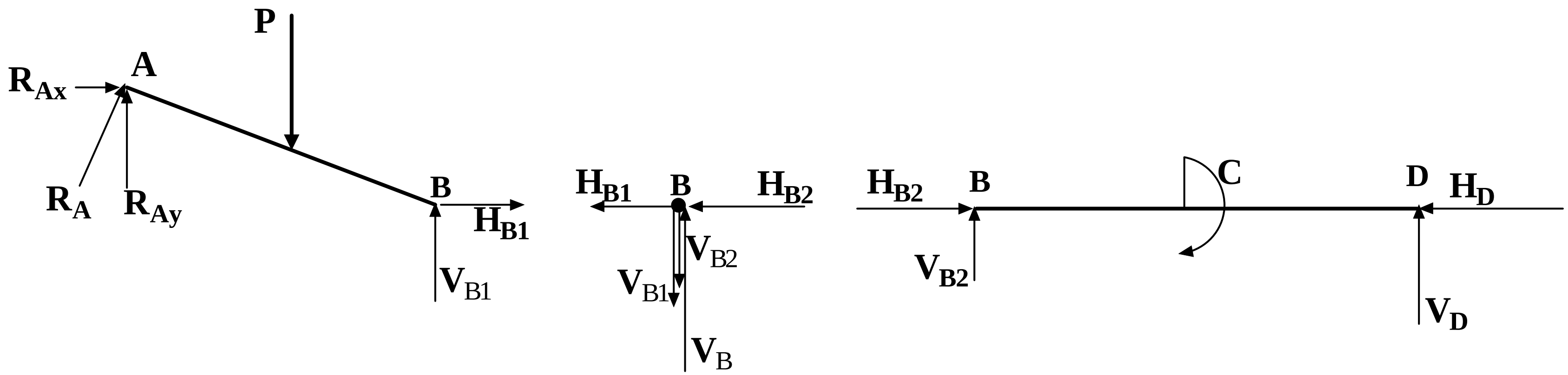
$$a = 1000mm; b = 1300mm; \mathrm{c} = 400\mathrm{mm} \qquad \alpha = \arctan\frac{c}{a} = 21{,}801°;$$

$$R_A = 464{,}2N;\ R_{Ax} = 172{,}4N;\ R_{Ay} = 431{,}0N; \qquad P = 1000N;$$

$$V_B = -584{,}9N;\ H_D = 172{,}4N; V_D = 1154N \qquad C = 1.500.000Nmm;$$

Attribuzione alle aste delle reazioni esterne

- Se nel vincolo concorre una sola asta, la reazione vincolare esterna può essere attribuita totalmente all’asta, es. nodi A e D
- Se nel vincolo concorrono più aste la reazione esterna deve essere ripartita fra le aste, partendo dall’equilibrio del nodo, es. nodo B



- Quindi per l’asta AB, le reazioni interne al nodo A sono R_A, R_{Ax} e R_{Ay}.
- Al nodo B le reazioni sono H_{B1} e V_{B1} e non V_B. Per determinarle bisogna scrivere la condizione di equilibrio dell’asta e quindi verificare l’equilibrio del nodo B al quale converge anche l’asta BD.

(continua)

- Asta AB:
- $H_{B1}=-R_{Ax}= -172,4N$
- $V_{B1}=-R_{Ay}+P = 569N$
- Asta BD
- $H_{B2}=H_D=172,4N$
- $V_{B2}=-V_D=-1154N$

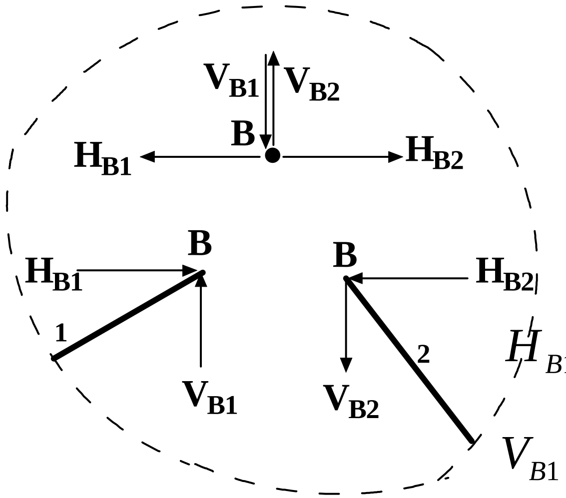
Nodo B:

$-H_{B1} - H_{B2}=0$

$-V_{B1} - V_{B2}+V_B=0$

Nodi interni (o esterni) con 2 aste

- Se il nodo non è caricato le reazioni omologhe sulle aste sono uguali e contrarie



$$H_{B1} = H_{B2}$$

$$V_{B1} = V_{B2}$$

- Se il nodo è caricato le reazioni omologhe non sono uguali