

# BILANCIO DEI VINCOLI ED ANALISI CINEMATICA

## ESERCIZIO 1

Data la struttura piana rappresentata in Figura 1, sono richieste:

- la classificazione della struttura in base alla condizione di vincolo;
- la classificazione della struttura dal punto di vista cinematico.

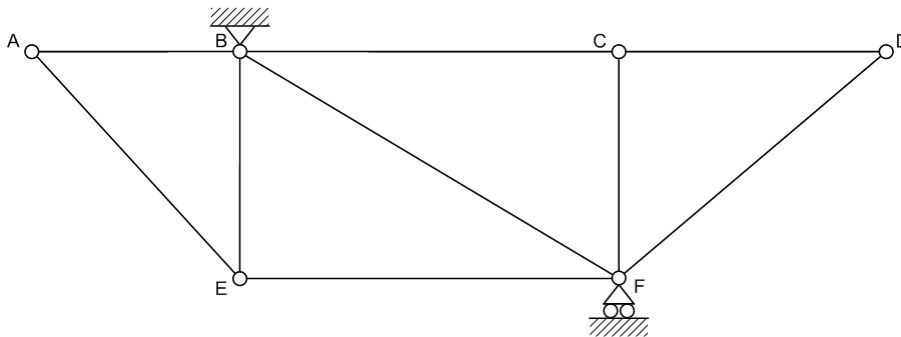


Figura 1

Classificare la struttura in base alla condizione di vincolo significa effettuare il bilancio dei vincoli, ovvero valutare i gradi di libertà della struttura, i gradi di vincolo forniti in totale dai vincoli esistenti e confrontare i due valori ottenuti. Indicando con "GdL" i gradi di libertà della struttura e con "GdV" i gradi di vincolo, si possono verificare le seguenti tre situazioni:

- 1)  $GdL > GdV$  Struttura ipovincolata: mancano dei gradi di vincolo rispetto ai gradi di libertà (ovvero ai movimenti consentiti alla struttura).
- 2)  $GdL = GdV$  Struttura isovincolata: i gradi di vincolo sono in numero pari ai gradi di libertà della struttura.
- 3)  $GdL < GdV$  Struttura ipervincolata: sono presenti gradi di vincolo in eccesso rispetto ai gradi di libertà della struttura.

La classificazione della struttura sulla base del bilancio dei vincoli, in generale, non è sufficiente per determinare la condizione di labilità o meno della struttura stessa, in quanto è un semplice calcolo aritmetico che non tiene conto della disposizione dei vincoli. Per poter parlare di struttura isostatica oppure labile si dovrà quindi in seguito effettuare l'analisi cinematica.

Il bilancio dei vincoli, nel dettaglio, si effettua nel modo seguente.

Come prima cosa si individua il numero di gradi di libertà GdL della struttura. Per fare ciò si considerano le singole aste da cui la struttura è costituita. E' noto che un'asta, nel piano, possiede tre gradi di libertà, in quanto ogni sua posizione nel piano stesso può essere univocamente individuata attraverso un minimo di tre parametri. Pertanto, il numero totale di gradi di libertà di una struttura costituita da  $N$  aste può essere ricavato come prodotto tra il numero di aste e il numero di gradi di libertà di una singola asta nel piano, ovvero:

$$\text{GdL} = N \times 3 \quad (1)$$

Nel caso in esame, essendo  $N = 9$  il numero di aste presenti nella struttura, il numero totale di gradi di libertà sarà pari a:

$$\text{GdL} = 9 \times 3 = 27 \quad (2)$$

Il numero di gradi di vincolo GdV della struttura, invece, si calcola come somma dei numeri di gradi di vincolo forniti da ciascun vincolo applicato. Con riferimento alla Figura 1, indicando con  $n$  il numero di aste che convergono nel vincolo considerato, il conteggio dei gradi di vincolo è il seguente:

A) Cerniera interna multipla:  $2 \cdot (n-1) \hat{=} 2 \cdot (2-1) = 2$

B) Cerniera esterna multipla:  $2 \cdot n \hat{=} 2 \cdot 4 = 8$

C) Cerniera interna multipla:  $2 \cdot (n-1) \hat{=} 2 \cdot (3-1) = 4$

D) Cerniera interna multipla:  $2 \cdot (n-1) \hat{=} 2 \cdot (2-1) = 2$

E) Cerniera interna multipla:  $2 \cdot (n-1) \hat{=} 2 \cdot (3-1) = 4$

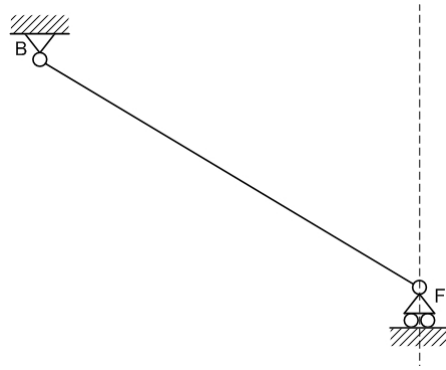
F) Carrello esterno multiplo:  $2 \cdot n - 1 \hat{=} 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Il numero totale di gradi di vincolo della struttura è pari alla somma dei precedenti valori, ovvero  $\text{GdV} = 27$ .

Essendo  $\text{GdL} = \text{GdV}$ , la struttura in esame è isovincolata.

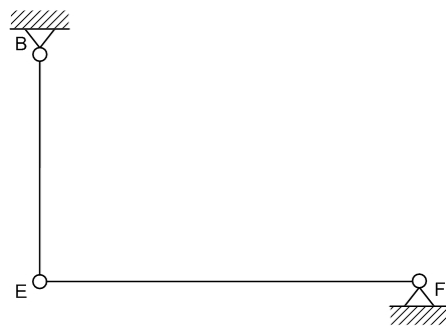
E' ora necessario stabilire se la struttura sia isostatica o labile attraverso l'analisi cinematica, che consente di individuare la presenza o meno di centri di istantanea rotazione per una o più aste dalla struttura. Non è detto che ci sia un'unica strada per effettuare questo studio, per cui nel seguito verranno mostrate due possibilità.

Un primo modo per effettuare l'analisi cinematica della struttura in esame consiste nel partire dalla sottostruttura indicata in Figura 2, ovvero l'asta BF. Questa è sicuramente isostatica (ovvero isovincolata e non labile), in quanto è un'asta vincolata dalla cerniera a terra B e dal carrello a terra F, con il carrello che presenta l'asse dei centri di istantanea rotazione per l'asta BF non passante per la cerniera B. Sia B che F quindi sono due punti fissi, pertanto il carrello F può essere sostituito con una cerniera a terra.



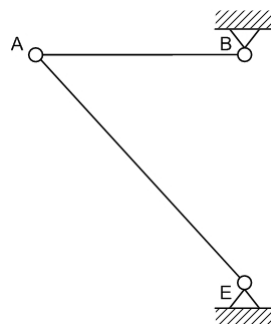
**Figura 2**

Si può quindi passare a considerare la sottostruttura BEF, rappresentata in Figura 3, in cui sia B che F sono considerate cerniere a terra, per quanto appena detto. Questa parte di struttura, costituita da due aste, altro non è che un arco a tre cerniere, in quanto ha due cerniere a terra e la terza cerniera, quella interna, libera. Essendo le tre cerniere non allineate, questo arco a tre cerniere è isostatico, per cui la cerniera E può essere sostituita con una cerniera a terra.



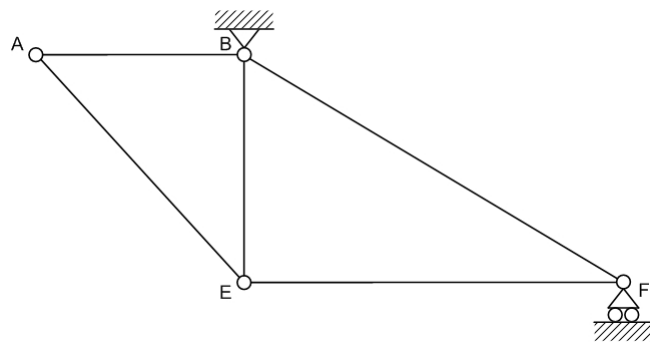
**Figura 3**

La parte di struttura che ora conviene considerare è quella, mostrata nella Figura 4, individuata dalle aste BA ed AE. La cerniera E, come appena dimostrato, è da considerare a terra, per cui, con le stesse considerazioni viste per la Figura 3, si può affermare che BAE è un arco a tre cerniere isostatico (cerniere non allineate). La cerniera A può quindi essere sostituita con una cerniera a terra.



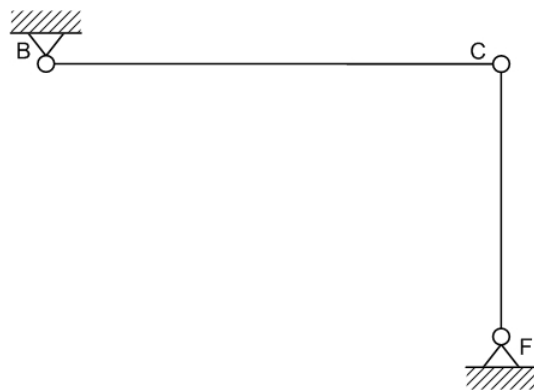
**Figura 4**

L'analisi cinematica ancora non è completa, ma quanto detto finora può essere riassunto schematicamente attraverso quanto riportato nella Figura 5: è stato dimostrato che tutta la parte di struttura qui rappresentata è isostatica, in quanto tutte le cerniere sono fisse e le aste non hanno quindi alcuna possibilità di compiere movimenti infinitesimi, ovvero non esiste alcun centro di istantanea rotazione per nessuna asta.



**Figura 5**

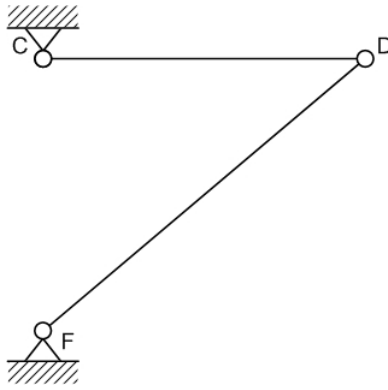
E' necessario continuare l'analisi per verificare il resto della struttura. Dato che B ed F si possono considerare cerniere a terra, si individua subito (Figura 6) l'arco a tre cerniere BCF, isostatico perché le tre cerniere non sono allineate. La cerniera C è quindi assimilabile ad una cerniera a terra.



**Figura 6**

Per concludere, essendo C ed F due cerniere fisse, si può individuare l'arco a tre cerniere CDF, rappresentato nella Figura 7, che è isostatico in quanto le cerniere non sono allineate.

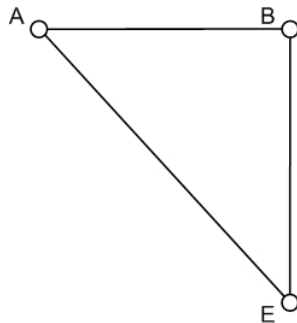
A questo punto è stato dimostrato che tutte le aste della struttura, per la situazione di vincolo esistente, non hanno alcuna possibilità di movimento, pertanto la struttura esaminata è isostatica.



**Figura 7**

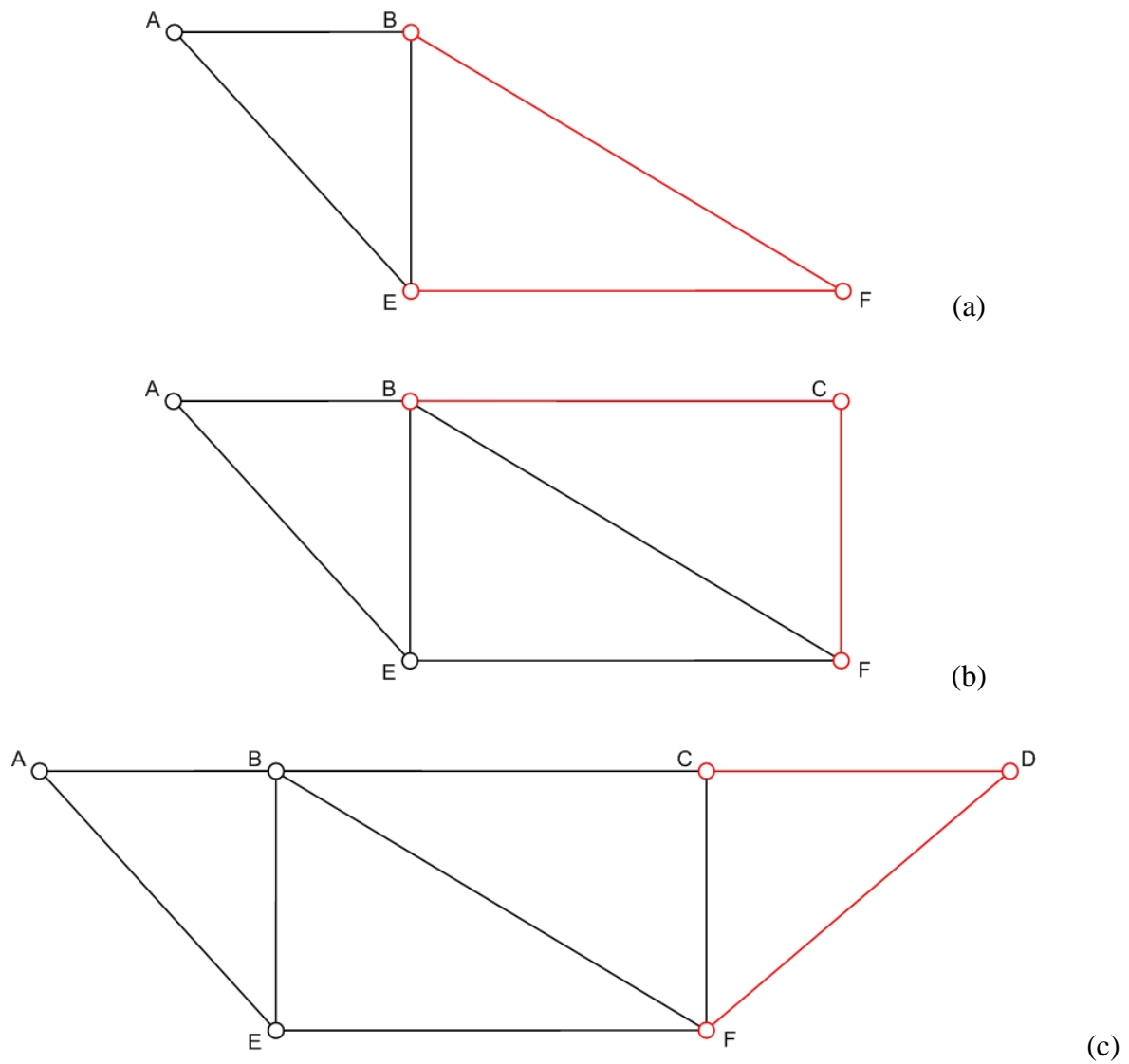
Come detto in precedenza, però, ci possono essere modi diversi per effettuare l'analisi cinematica. Per la struttura in esame si poteva ad esempio procedere nel modo seguente.

Si ricordi che un anello isostatico, ovvero una struttura chiusa costituita da tre aste incernierate tra loro, è isostatica internamente, ovvero non è deformabile. Si consideri ora la parte della struttura proposta rappresentata in Figura 8, ovvero il triangolo ABE, senza la cerniera a terra originariamente presente nel punto B. Questo triangolo, libero di muoversi nel piano, è però indeformabile, ovvero è un corpo rigido. Le cerniere B ed E, pertanto, pur non essendo fisse, non possono variare la loro distanza relativa.



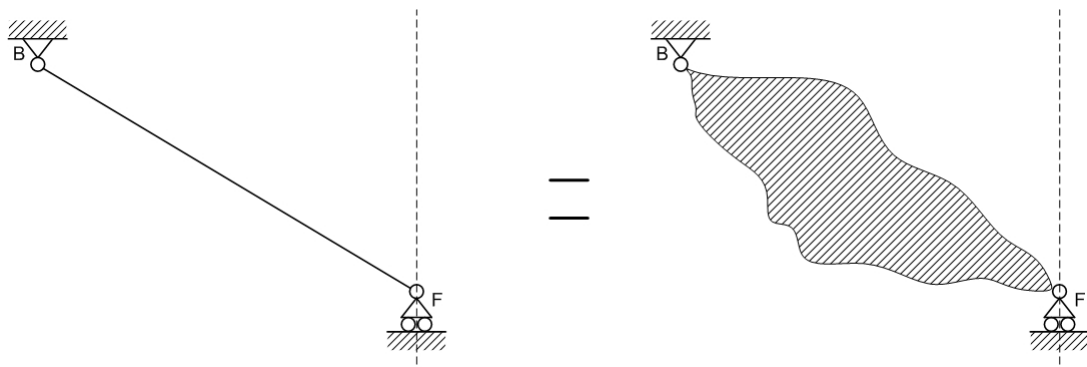
**Figura 8**

A partire dalle cerniere B ed E, quindi, si può individuare, trascurando per ora il vincolo del carrello a terra in F, l'arco a tre cerniere interno BFE, in rosso nella Figura 9(a), che sarà solidale con il corpo rigido ABE. Tutta la struttura ABFE sarà quindi un unico corpo rigido, libero di muoversi nel piano. Con le stesse considerazioni si possono individuare gli archi a tre cerniere interni BCF, nella Figura 9(b), e CDF, nella Figura 9(c). Se ne deduce che tutta la struttura è un unico corpo rigido.



**Figura 9**

Essendo un corpo rigido, la struttura può essere considerata equivalente ad un'unica asta o, in generale, ad un corpo rigido di forma qualunque. Reintroducendo ora i vincoli a terra, si può affermare che la struttura originaria di Figura 1, dal punto di vista cinematico, è equivalente a quelle mostrate in Figura 10.



**Figura 10**

Si è già dimostrato che queste ultime sono isostatiche, per cui si può concludere che la struttura in esame è isostatica.

A questo punto si può fare una osservazione. Se la struttura proposta fosse stata quella indicata in Figura 11, ovvero con il carrello posizionato in E ed avente il piano di scorrimento orizzontale, sarebbe stata sempre isovincolata, ma labile.

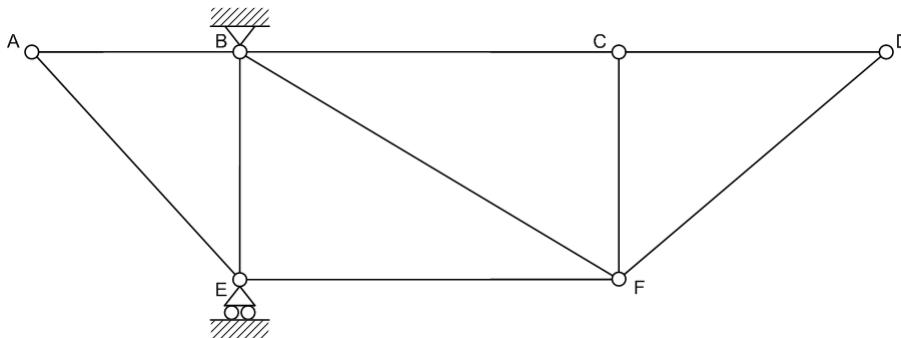


Figura 11

Infatti, considerando, per quanto già detto, la struttura come un unico corpo rigido, rappresentabile con la sola asta BF, vincolato con una cerniera a terra e con un carrello a terra, si può notare (Figura 12) che in questo caso l'asse del carrello F passa per la cerniera B. Pertanto il corpo rigido, ovvero tutta la struttura, ha un centro di istantanea rotazione (CIR) nel punto in cui l'asse del carrello incontra la cerniera, ovvero in B. Da qui la labilità della struttura in quest'ultima situazione.



Figura 12

## ESERCIZIO 2

Data la struttura piana rappresentata in Figura 13, sono richieste:

- la classificazione della struttura in base alla condizione di vincolo;
- la classificazione della struttura dal punto di vista cinematico.

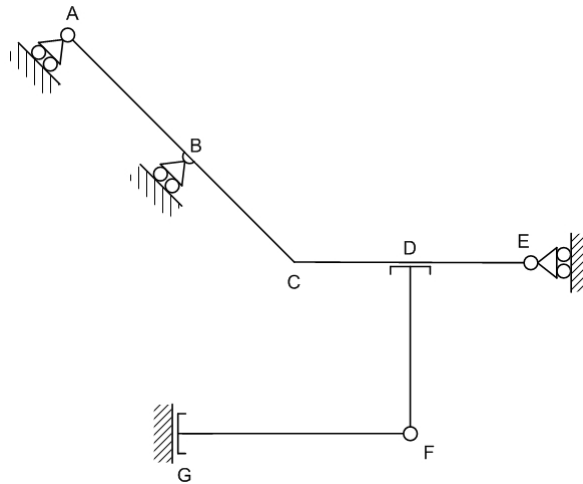


Figura 13

Il primo passo è rappresentato dalla classificazione sulla base del bilancio dei vincoli, che consente di stabilire se la struttura sia ipovincolata, isovincolata o ipervincolata.

Ricordando l'espressione (1), che definisce il numero di gradi di libertà GdL di una struttura, e applicandola al caso in esame, in cui il numero di aste è  $N = 3$ , si ottiene:

$$\text{GdL} = 3 \times 3 = 9 \quad (3)$$

Il numero di gradi di vincolo della struttura GdV si calcola come somma dei numeri di gradi di vincolo forniti da ciascun vincolo applicato. Con riferimento alla Figura 13, indicando con  $n$  il numero di aste che convergono nel vincolo considerato, il conteggio dei gradi di vincolo è il seguente:

A) Carrello esterno: 1

B) Carrello esterno: 1

D) Pattino interno: 2

E) Carrello esterno: 1

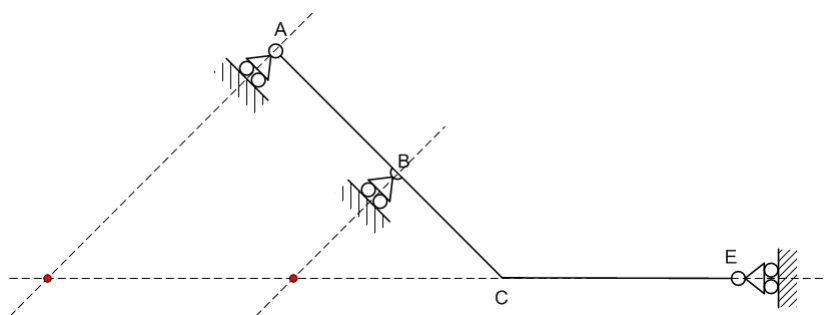
F) Cerniera interna multipla:  $2 \cdot (n-1) \hat{=} 2 \cdot (2-1) = 2$

G) Pattino esterno: 2



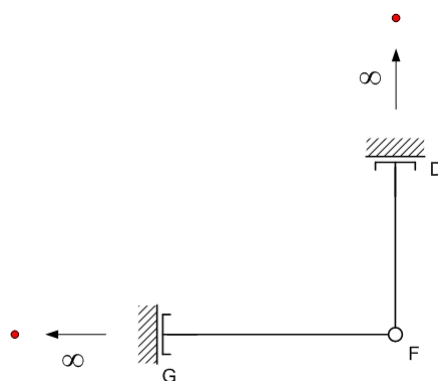
Sommando i precedenti valori si trova il numero totale di gradi di vincolo, che risulta essere  $GdV=9$ . Si ricade quindi nella condizione in cui  $GdL = GdV$ , ovvero la struttura è isovincolata. Bisogna ora effettuare l'analisi cinematica, per stabilire se sia isostatica o labile.

Nel caso in esame, il modo più semplice di procedere è sicuramente quello di individuare l'asta ACE e vederla come un corpo rigido vincolato con tre carrelli, i cui assi dei centri di istantanea rotazione non si incontrano in un unico punto. Per questa ragione, come si vede dalla Figura 14, non esiste un centro di istantanea rotazione per il corpo rigido ACE dovuto ai tre carrelli con cui è vincolato. Tale centro di istantanea rotazione sarebbe esistito solo nel caso in cui i tre assi si fossero incontrati tutti e tre in uno stesso punto. La sottostruttura ACE è pertanto isostatica.



**Figura 14**

Si può ora passare a considerare la sottostruttura DFG. Questa è costituita da due aste, incerniate fra di loro in F, e vincolate con un pattino a terra in G e con un pattino interno in D. Quest'ultimo pattino scorre sul tratto CE dell'asta ACE, che è già stata dimostrata essere isostatica, per cui tale vincolo può essere sostituito con un pattino a terra, come mostrato in Figura 15.



**Figura 15**

Il pattino può sempre essere considerato, per movimenti infinitesimi, equivalente ad una cerniera all'infinito nella direzione ortogonale al piano di scorrimento: ciò significa che le traslazioni del pattino sono approssimabili, per spostamenti infinitesimi, a rotazioni rispetto ad un punto

all'infinito. La sottostruttura DFG, pertanto, dal punto di vista cinematico, è equivalente ad un arco a tre cerniere, in cui due delle cerniere sono all'infinito. Si può facilmente vedere che le tre cerniere non sono allineate, per cui l'arco a tre cerniere DFG è isostatico.

In conclusione, si è dimostrato che la struttura proposta in questo esercizio è isovincolata e non labile, per cui è isostatica.