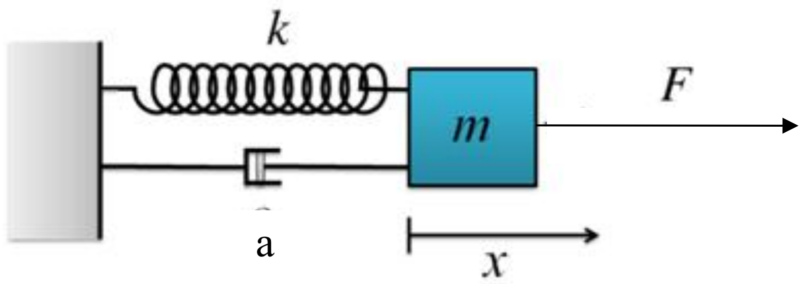
Esercitazione 5

Progettare un sistema per la misura dell'accelerazione; rappresentare il modello descrittivo del sensore e la risposta al gradino

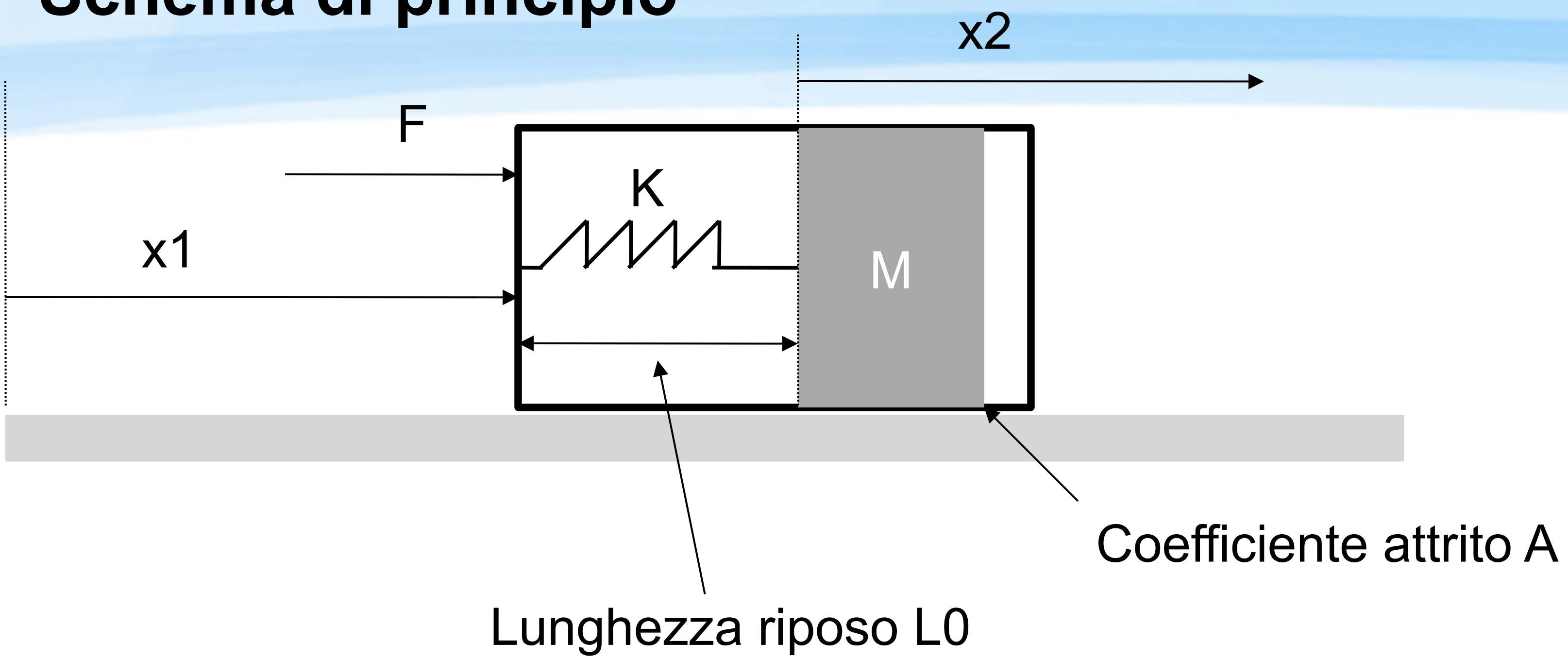
Esercitazione: sistema massa-molla-smorzatore



- Vogliamo determinare la relazione che lega il misurando all'uscita di questo sistema dinamico del secondo ordine

- Risoluzione diretta
- Risoluzione con analogie

Schema di principio



- Caso monodimensionale
- Esplicitiamo le equazioni del moto
    - Equilibrio forze

Equilibrio delle forze

$$x_3 = x_1 + L_0 + x_2$$

$$F_M = M\ddot{x}_3(t) = M\ddot{x}_1(t) + M\ddot{x}_2(t)$$

$$F_M = -A\dot{x}_2(t) - Kx_2(t)$$

$$M\ddot{x}_1(t) = -M\ddot{x}_2(t) - A\dot{x}_2(t) - Kx_2(t)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\ddot{x}_2(t) - \frac{A}{M}\dot{x}_2(t) - \frac{K}{M}x_2(t)$$

Ho trovato un modello matematico che lega <u>l'accelerazione del sistema (misurando) all'allungamento della molla</u> che suppongo di poter misurare con un sensore di deformazione

$\ddot{x}_1(t) = x(t)$ Misurando

$-x_2(t) = y(t)$ Uscita

Risolvo l'equazione differenziale: metodo di fourier

$$x(t) = \ddot{y}(t) + \frac{A}{M}\dot{y}(t) + \frac{K}{M}y(t)$$

$$X(s) = +\,s^2 Y(s) + \frac{A}{M}s\,Y(s) + \frac{K}{M}Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + \frac{A}{M}s + \frac{K}{M}}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{K}{M}}{\frac{M}{K}s^2 + \frac{A}{K}s + 1} = \frac{\frac{K}{M}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0}s + 1}$$

Sistema secondo ordine in forma canonica

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ Frequenza di risonanza

$$\zeta = \frac{A}{2\sqrt{km}}$$ Coefficiente di smorzamento

Parametri **fisici** del sistema

$$\frac{s^2}{\omega_0^2}+\frac{2\zeta}{\omega_0}s+1=0\rightarrow-\omega_0(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})$$

Poli del sistema

$\zeta>1$ 1) Sistema sovra-smorzato (poli reali e distinti)

$\zeta=1$ 2) Smorzamento critico (poli reali e coincidenti)

$\zeta<1$ 3) Sistema sotto-smorzato (poli complessi e coniugati)

Risposta al gradino (1/s)

caso 1)

$$Y(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s-p_1}+\frac{A_3}{s-p_2}$$

$$A_1=\lim_{s\rightarrow 0}Y(s)s$$

$$A_2=\lim_{s\rightarrow p_1}Y(s)(s-p_1)$$

$$A_1+A_2+A_3=y_0=0$$

Anti-trasformata

$$y(t)=A_1+A_2e^{p1t}+A_3e^{p2t}$$

<u>Teorema valore iniziale</u>

$$\lim_{s\rightarrow\infty}sY(s)=y_0$$

caso 2)

$$Y(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s-p_1}+\frac{A_3}{(s-p_1)^2}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}V_u(s)s$$
$$A_3=\lim_{s\to p_1}V_u(s)(s-p_1)^2$$
$$A_1+A_2=0$$

$$Y(t)=A_1+A_2e^{p_1t}+A_3te^{p_1t}$$ **Anti-trasformata**

caso 3)

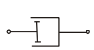
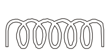
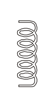
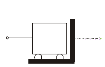
$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2s+A_3}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}Y(s)s$$
$A_{2,}A_3$ *identità dei polinomi*

$$L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\cdot(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\right]=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\xi\omega_n t}\cdot sen(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cdot t+\varphi)\quad \text{con}:\ \varphi=\arccos\xi$$

Costruiamo l'Analogo Elettrico - Maxwell

Analoghi	Elettrico	Meccanico (Maxwell)	Meccanico (Firestone)	Fluidodinamico
per-varibile intensiva η	Corrente I	velocità v	forza f	flusso u
trans-variabile intensiva ϕ	Tensione V	forza f	velocità v	pressione p
per-variabile estensiva μ	Carica Q	posizione x	impulso forza y	volume V
trans-variabile estensiva δ	Induzione Φ	impulso forza y	posizione x	
da η a ϕ	R	attrito A	1/attrito $(1/A)$	res. Idraulica
da μ a ϕ	C	molla K	massa M	Cavità
da δ a η	L	massa M	molla K	Inerzia

Elemento Meccanico			Elemento Elettrico Corrispondente				
			Nell'analogia di Maxwell			Nell'analogia di Firestone	
Simbolo	Nome	Equazione	Simbolo	Nome	Equazione	Nome	Equazione
	Elemento di Attrito	$F = Av$		Resistenza	$e = Ri$	Conduttanza	$i = Ge$
	Molla	$F = M\frac{dv}{dt}$		Induttanza	$e = L\frac{di}{dt}$	Capacità	$i = C\frac{de}{dt}$
	Massa	$\frac{dF}{dt} = Kv$		Capacità	$\frac{de}{dt} = \frac{1}{C}i$	Induttanza	$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}e$

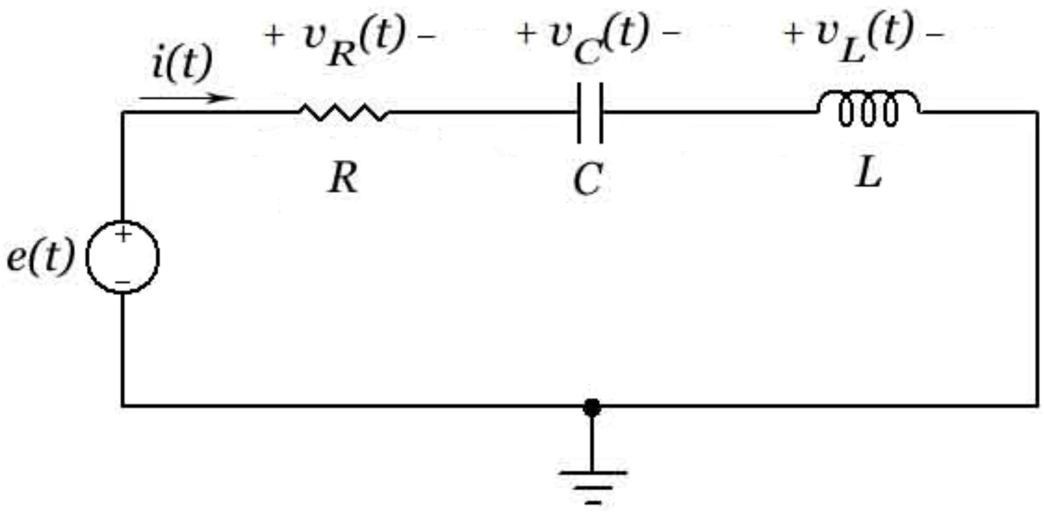
Modelli a parametri concentrati

Scritti in termini di per/trans variabili intensive

Analogia di Maxwell

- Elementi massa, molla, smorzatore sono collegati in **serie** perché caratterizzati dalla stessa per-variabile intensiva.

- Analogia con un circuito RLC serie



$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = e(t) \qquad R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(x)\,dx = e(t)$$

Risoluzione Analogia Elettrica

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = e(t)$$

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,dx = e(t)$$

Trasformata di Laplace

$$I(s) = sQ(s) = \frac{E(s)}{R + \frac{1}{Cs} + Ls}$$

$$I(s)R + LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = E(s)$$

$$\xi = \frac{R}{2\omega_n L}$$ smorzamento

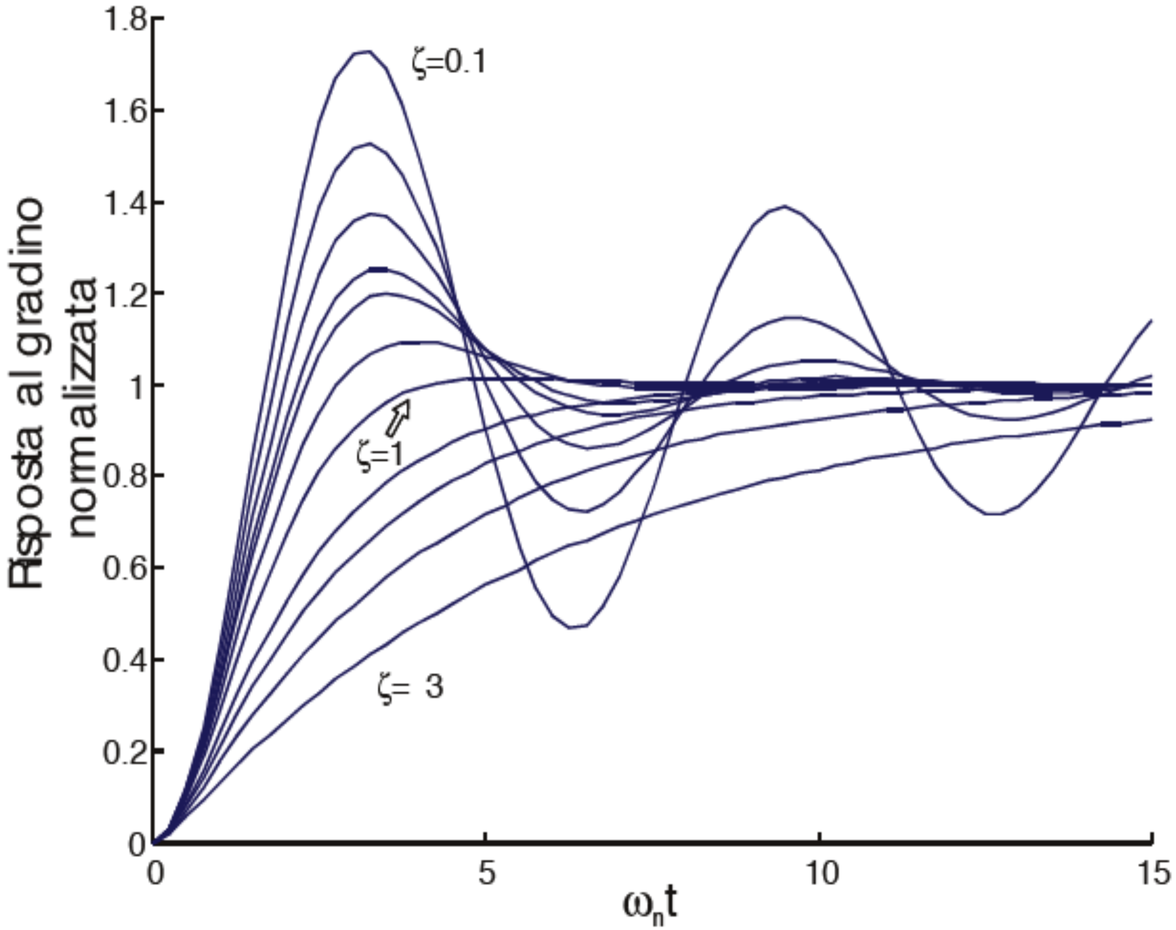
$$Q(s) = \frac{E(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ Frequenza di risonanza

Analogie Elettriche/Meccaniche

L → M
R → A
1/C → K
E(s) → F(s)
Q(s) → X(s)

Risposta al gradino



Risposta in frequenza

- Numero complesso ottenuto sostituendo in F(s) → s=jω
- Rappresentato in modulo e fase al variare di ω
-