5 CINEMATICA RELATIVA

5.1 Generalitá

Nei due precedenti capitoli é stato studiato il moto di un elemento o di un corpo rigido rispetto ad un assegnato riferimento $\mathcal{R}$. É da sottolineare che non ha senso parlare di moto se non si specifica il riferimento rispetto al quale l'elemento o il corpo rigido si muove.

In molti casi il riferimento é sottinteso (parlando del moto di un automobile appare naturale riferirlo al riferimento solidale alla Terra), in altri casi deve essere specificato in quanto, come apparirá nel seguito del presente capitolo, il moto (traiettoria, velocitá, accelerazione) non ha carattere intrinseco, ma é strettamente legato al riferimento.

Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ due riferimenti in moto l'uno rispetto all'altro. Si indichi con $Oxyz$ una terna cartesiana solidale al primo riferimento, e con $\Omega\,\xi\eta\zeta$ una terna cartesiana solidale al secondo riferimento.

In modo del tutto convenzionale, il riferimento $\mathcal{R}$ viene detto **fisso** o **assoluto**, mentre il riferimento $\mathcal{R}'$ viene detto **mobile** o **relativo**. Naturalmente nulla vieta di scambiare i ruoli tra i due riferimenti, assumendo come fisso $\mathcal{R}'$ e come mobile $\mathcal{R}$.

Il moto del riferimento mobile $\mathcal{R}'$ rispetto al riferimento fisso $\mathcal{R}$ viene detto **moto di trascinamento.** Si supponga che sia assegnato il moto di trascinamento mediante le funzioni vettoriali

$$\overrightarrow{O\Omega}(t)\,, \qquad \vec{\imath}(t)\,, \quad \vec{\jmath}(t)\,, \quad \vec{k}(t) \tag{5.1}$$

che vengono supposte generalmente di classe C^2 .

La velocitá angolare di $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$ viene detta **velocitá angolare di trascinamento**, ed indicata col simbolo $\vec{\omega}_\tau$.

Si consideri un elemento P . La velocitá e l'accelerazione di P rispetto al riferimento fisso $\mathcal{R}$ vengono dette velocitá e accelerazione **assolute**, e indicate con i simboli $\vec{v}_a$ e $\vec{a}_a$ rispettivamente.

La velocitá e l'accelerazione di P rispetto al riferimento mobile $\mathcal{R}'$ vengono dette velocitá e accelerazione **relative**, e indicate con i simboli $\vec{v}_r$ e $\vec{a}_r$ rispettivamente.

La velocitá e l'accelerazione assolute di quel punto geometrico del riferimento mobile $\mathcal{R}'$ che é occupato nell'istante considerato dall'elemento P , vengono dette velocitá e accelerazione di **trascinamento**, e indicate con i simboli $\vec{v}_\tau$ e $\vec{a}_\tau$ rispettivamente.

Tenendo conto della formula fondamentale della cinematica rigida (4.27) e della formula delle accelerazioni (4.28), la velocitá e l'accelerazione di trascinamento hanno rispettivamente le seguenti espressioni

$$\vec{v}_\tau \;=\; \vec{v}_\Omega \,+\, \vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} \tag{5.2}$$

$$\vec{a}_\tau \;=\; \vec{a}_\Omega \,+\, \dot{\vec{\omega}}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} \,+\, \vec{\omega}_\tau \times \left(\vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P}\right) \tag{5.3}$$

avendo indicato con $\vec{v}_\Omega$ e $\vec{a}_\Omega$ rispettivamente la velocitá e l'accelerazione assolute dell'origine Ω della terna cartesiana mobile.

Si consideri un corpo rigido S . La velocitá angolare di S rispetto al riferimento fisso $\mathcal{R}$ viene detta velocitá angolare **assoluta**, e indicata col simbolo $\vec{\omega}_a$.

La velocitá angolare di S rispetto al riferimento mobile $\mathcal{R}'$ viene detta velocitá angolare **relativa**, e indicata col simbolo $\vec{\omega}_r$.

5.2 Derivata assoluta e derivata relativa

Assegnata una funzione scalare oppure vettoriale del tempo, essa puó essere derivata sia nel riferimento fisso, sia nel riferimento mobile.

La derivata nel riferimento fisso viene detta **assoluta**, e indicata col simbolo D/Dt , mentre la derivata nel riferimento mobile viene detta **relativa**, e indicata col simbolo d/dt .

Poiché i due riferimenti misurano il tempo nello stesso modo, appare evidente che la derivata assoluta e la derivata relativa di una funzione scalare $f = f(t)$ coincidono, cioé

$$\frac{D\,f(t)}{D\,t} \;=\; \frac{d\,f(t)}{d\,t} \tag{5.4}$$

Le stessa cosa non accade per le funzioni vettoriali. Ad esempio, se un vettore é solidale al riferimento mobile, il suo derivato relativo é evidentemente nullo, mentre é, in generale, non nullo il suo derivato calcolato nel riferimento assoluto.

Si consideri una funzione vettoriale $\vec{f} = \vec{f}(t)$, definita e di classe C^1 in un certo intervallo $I \subseteq \Re$. Tale funzione vettoriale puó essere espressa sia mediante i versori della terna fissa $Oxyz$

$$\vec{f}(t) \;=\; f_x(t)\,\vec{e}_1 \,+\, f_y(t)\,\vec{e}_2 \,+\, f_z(t)\,\vec{e}_3 \tag{5.5}$$

sia mediante i versori della terna mobile $\Omega\,\xi\eta\zeta$

$$\vec{f}(t) \;=\; f_\xi(t)\,\vec{\imath} \,+\, f_\eta(t)\,\vec{\jmath} + f_\zeta(t)\,\vec{k} \tag{5.6}$$

Calcolando il derivato assoluto della funzione $\vec{f}(t)$ i versori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono costanti, mentre quando si calcola il derivato relativo, devono essere considerati costanti i versori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Pertanto le espressioni di tali derivati sono le seguenti

$$\frac{D\,\vec{f}(t)}{D\,t} \;=\; \dot{f}_x(t)\,\vec{e}_1 \,+\, \dot{f}_y(t)\,\vec{e}_2 \,+\, \dot{f}_z(t)\,\vec{e}_3 \tag{5.7}$$

$$\frac{d\,\vec{f}(t)}{d\,t} \;=\; \dot{f}_\xi(t)\,\vec{\imath} + \dot{f}_\eta(t)\,\vec{\jmath} + \dot{f}_\zeta(t)\,\vec{k} \tag{5.8}$$

Per stabilire il legame tra il derivato assoluto e il derivato relativo, si calcoli il derivato assoluto, esprimendo $\vec{f}(t)$ mediante la (5.6). Si ha

$$\frac{D\,\vec{f}(t)}{D\,t} \;=\; \dot{f}_\xi(t)\,\vec{\imath}(t) \,+\, f_\xi(t)\,\frac{D\,\vec{\imath}(t)}{D\,t} \,+\, \dot{f}_\eta(t)\,\vec{\jmath}(t) \,+\, f_\eta(t)\,\frac{D\,\vec{\jmath}(t)}{D\,Dt} \,+\, \dot{f}_\zeta(t)\,\vec{k}(t) \,+\, f_\zeta(t)\,\frac{D\,\vec{k}(t)}{D\,t} \tag{5.9}$$

Si tenga ora conto del fatto che la velocitá angolare della terna cartesiana mobile $\Omega\,\xi\eta\zeta$ rispetto a quella fissa $Oxyz$ é $\vec{\omega}_\tau = \vec{\omega}_\tau(t)$. Per le formule di Poisson (4.31), risulta allora

$$\frac{D\,\vec{\imath}(t)}{D\,t} \;=\; \vec{\omega}_\tau \times \vec{\imath}(t)\,, \qquad \frac{D\,\vec{\jmath}(t)}{D\,t} \;=\; \vec{\omega}_\tau \times \vec{\jmath}(t)\,, \qquad \frac{D\,\vec{k}(t)}{D\,t} \;=\; \vec{\omega}_\tau \times \vec{k}(t)$$

Sostituendo tali espressioni nella (5.9) si ottiene

$$\frac{D\,\vec{f}(t)}{D\,t} \;=\; \dot{f}_\xi(t)\,\vec{\imath}(t) \,+\, \dot{f}_\eta(t)\,\vec{\jmath}(t) \,+\, \dot{f}_\zeta(t)\,\vec{k}(t) \,+\, f_\xi(t)\,\vec{\omega}_\tau \times \vec{\imath}(t) \,+\, f_\eta(t)\,\vec{\omega}_\tau \times \vec{\jmath}(t) \,+\, f_\zeta(t)\,\vec{\omega}_\tau \times \vec{k}(t)$$

da cui , raccogliendo $\vec{\omega}_\tau$, e tenendo conto della (5.8),

$$\frac{D\,\vec{f}(t)}{D\,t} \;=\; \frac{d\,\vec{f}(t)}{d\,t} + \vec{\omega}_\tau \times \vec{f}(t) \tag{5.10}$$

che fornisce il legame tra il derivato assoluto e il derivato relativo di una funzione vettoriale.

Osservazione 5.1 – *Poiché il derivato assoluto differisce, in generale, da quello relativo, non é lecito indicare il derivato di una funzione vettoriale col semplice "puntino". Ad esempio, il derivato del vettore $\vec{\imath}$ ha valori diversi a seconda che venga calcolato nel riferimento fisso, oppure in quello mobile, e quindi non puó essere indicato col semolice simbolo "$\dot{\vec{\imath}}$".*

L'unica eccezione é rappresentata dal vettore $\vec{\omega}_\tau$. Infatti, dalla (5.10) risulta

$$\frac{D\,\vec{\omega}_\tau}{D\,t} \;=\; \frac{d\,\vec{\omega}_\tau}{d\,t}$$

e pertanto il derivato rispetto al tempo della velocitá angolare di trascinamanto puó essere indicato col simbolo "$\dot{\vec{\omega}}_\tau$" senza alcuna ambiguitá.

5.3 Cinematica relativa dell'elemento

Si consideri un elemento materiale P , che si muove sia rispetto al riferimento fisso $\mathcal{R}$ sia ripsetto al riferimento mobile $\mathcal{R}'$.

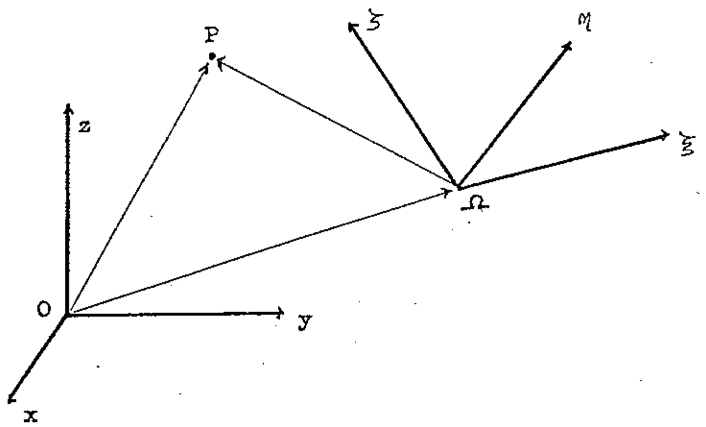


Figura 5.1

Per definizione di somma tra vettori é $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P}$. Derivando primo e secondo membro rispetto al tempo nel riferimento fisso, si ha

$$\frac{D\,\overrightarrow{OP}}{D\,t} \;=\; \frac{D\,\overrightarrow{O\Omega}}{D\,t} + \frac{D\,\overrightarrow{\Omega P}}{D\,t} \tag{5.11}$$

Poiché

$$\vec{v}_r \;=\; \frac{d\,\overrightarrow{\Omega P}}{d\,t}$$

tenendo conto della (5.10) risulta

$$\frac{D\,\overrightarrow{\Omega P}}{D\,t} \;=\; \frac{d\,\overrightarrow{\Omega P}}{d\,t} + \vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} \;=\; \vec{v}_r + \vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} \tag{5.12}$$

D'altra parte, per definizione é

$$\vec{v}_a \;=\; \frac{D\,\overrightarrow{OP}}{D\,t}\,, \qquad \vec{v}_\Omega \;=\; \frac{D\,\overrightarrow{O\Omega}}{D\,t}$$

e pertanto, in virtú della (5.2) e della (5.12), dalla (5.11) segue

$$\vec{v}_a \;=\; \vec{v}_r + \vec{v}_\tau \tag{5.13}$$

ovvero, *in ogni istante la velocitá assoluta di un elemento é la somma della sua velocitá relativa e della sua velocitá di trascinamento.* Tale risultato vá sotto il nome di **teorema dei moto relativi.**

Derivando ulteriormente la (5.11) rispetto al tempo, sempre nel riferimento assoluto, e tenendo presente la (5.12), si ha

$$\frac{D^2\,\overrightarrow{OP}}{D\,t^2} \;=\; \frac{D^2\,\overrightarrow{O\Omega}}{D\,t^2} + \frac{D^2\,\overrightarrow{\Omega P}}{D\,t^2} \;=\; \frac{D^2\,\overrightarrow{O\Omega}}{D\,t^2} + \frac{D\,\vec{v}_r}{D\,t} + \frac{D}{D\,t}\left(\vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P}\right) \tag{5.14}$$

Per definizione é

$$\vec{a}_a \;=\; \frac{D^2\,\overrightarrow{OP}}{D\,t^2}\,, \qquad \vec{a}_\Omega \;=\; \frac{D^2\,\overrightarrow{O\Omega}}{D\,t^2} \tag{5.15}$$

Inoltre risulta, per la (5.10),

$$\frac{D\,\vec{v}_r}{D\,t} \;=\; \frac{d\,\vec{v}_r}{d\,t} + \vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r \;=\; \vec{a}_r + \vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r \tag{5.16}$$

in quanto $\vec{a}_r = (d/dt)\,\vec{v}_r$. Infine si ha, per la (5.12),

$$\frac{D}{D\,t}\left(\vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P}\right) \;=\; \dot{\vec{\omega}}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} + \vec{\omega}_\tau \times \left(\vec{v}_r + \vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P}\right) \tag{5.17}$$

Sostituendo le espressioni (5.15), (5.16), (5.17) nella (5.14) si ottiene

$$\vec{a}_a \;=\; \vec{a}_\Omega + \vec{a}_r + 2\,\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r + \dot{\vec{\omega}}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} + \vec{\omega}_\tau \times \left(\vec{\omega}_\tau \times \overrightarrow{\Omega P}\right) \tag{5.18}$$

La quantitá

$$\vec{a}_c \;=\; 2\,\vec{\omega}_\tau \times \vec{v}_r \tag{5.19}$$

viene detta **accelerazione del Coriolis**. Pertanto, tenendo conto della definizione (5.3) dell'accelerazione di trascinamento, dalla (5.18) si ottiene il seguente risultato

$$\vec{a}_a \;=\; \vec{a}_r + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c \tag{5.20}$$

ovvero *in ogni istante l'accelerazione assoluta di un elemento é la somma della sua accelerazione relativa, della sua accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione del Coriolis.* Tale risultato vá sotto il nome di **teorema del Coriolis.**

Si supponga che il moto di trascinamento sia traslatorio. Allora, poiché tutti i punti del riferimento mobile hanno la stessa velocitá e la stessa accelerazione dell'origine Ω , la velocitá e l'accelerazione di trascinamento valgono rispettivamente

$$\vec v_\tau = \vec v_\Omega \,, \qquad \vec a_\tau = \vec a_\Omega$$

Inoltre, l'accelerazione del Coriolis é nulla, in quanto $\vec\omega_\tau = 0$ durante il moto.

Dalla (5.13) e dalla (5.20) si deduce allora che

$$\vec v_a = \vec v_r + \vec v_\Omega \,, \qquad \vec a_a = \vec a_r + \vec a_\Omega$$

In particolare, se il moto di trascinamento é traslatorio rettilineo uniforme, allora $\vec a_\omega = 0$ durante il moto, e quindi l'accelerazione assoluta dell'elemento coincide con quella relativa.

Si supponga che il moto di trascinamento sia rotatorio. Detta P_* la proiezione ortogonale di P sull'asse della rotazione, si ha, ponendo $\dot\vartheta\,\vec e_3 = \vec\omega_\tau$ nella (4.35) e nella (4.36),

$$\vec v_\tau = \vec\omega_\tau \times \overrightarrow{P_*P} \,, \qquad \vec a_\tau = \dot{\vec\omega}_\tau \times \overrightarrow{P_*P} - \omega_\tau^2\,\overrightarrow{P_*P}$$

da cui segue

$$\vec v_a = \vec v_r + \vec\omega_\tau \times \overrightarrow{P_*P} \,, \qquad \vec a_a = \vec a_r + \dot{\vec\omega}_\tau \times \overrightarrow{P_*P} - \omega_\tau^2\,\overrightarrow{P_*P} + 2\vec\omega_\tau \times \vec v_r$$

In particolare, se il moto di trascinamento é **rotatorio uniforme**, l'accelerazione di trascinamento é data da

$$\vec a_\tau = -\,\omega_\tau^2\,\overrightarrow{P_*P}$$

essendo ω_τ una costante. Tale espressione é molto importante in quanto é il termine da cui trae origine la forza centrifuga che verrá definita nel successivo capitolo 10.

Viene detto **reciproco** il moto dell'elemento quando si assume come fisso il riferimento $\mathcal{R}'$, e di conseguenza mobile il riferimento $\mathcal{R}$.

Siano $\vec v_a{}'$, $\vec v_r{}'$, $\vec v_\tau{}'$ rispettivamente la velocitá assoluta, relativa e di trascinamento dell'elemento nel moto reciproco. Senza difficoltá si verifica che

(5.21) $$\vec v_a{}' = \vec v_r \,, \qquad \vec v_r{}' = \vec v_a \,, \qquad \vec v_\tau{}' = -\vec v_\tau$$

Analogamente, dette $\vec a_a{}'$, $\vec a_r{}'$, $\vec a_\tau{}'$ rispettivamente l'accelerazione assoluta, relativa, e di trascinamento nel moto reciproco, si verifica che

(5.22) $$\vec a_a{}' = \vec a_r \,, \qquad \vec a_r{}' = \vec a_a \,, \qquad \vec a_\tau{}' = -\vec a_\tau + 2\vec\omega_\tau \times \vec v_r$$

5.4 Cinematica relativa del corpo rigido

Si consideri un corpo rigido non allineato S in moto sia rispetto al riferimento fisso, sia rispetto al riferimento mobile. Siano P e Q due generici punti del corpo rigido. Scrivendo la formula fondamentale della cinematica rigida nel riferimento fisso e in quello mobile, si ha, con ovvio significato dei simboli,

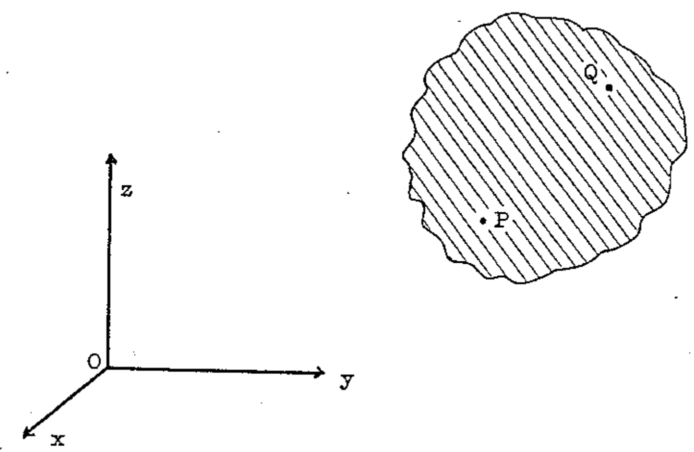
$$\vec v_a(P) = \vec v_a(Q) + \vec\omega_a \times \overrightarrow{QP}$$

$$\vec v_r(P) = \vec v_r(Q) + \vec\omega_r \times \overrightarrow{QP}$$

da cui, sottraendo membro a membro e tenendo conto del teorema dei moti relativi,

(5.23) $$\vec v_\tau(P) = \vec v_\tau(Q) + (\vec\omega_a - \vec\omega_r) \times \overrightarrow{QP}$$

Figura 5.2



D'altra parte é, per la (5.2),

$$\vec v_\tau(P) = \vec v_\Omega + \vec\omega_\tau \times \overrightarrow{\Omega P} \,, \qquad \vec v_\tau(Q) = \vec v_\Omega + \vec\omega_\tau \times \overrightarrow{\Omega Q}$$

da cui segue, sottraendo membro a membro e ricordando che $\overrightarrow{\Omega P} - \overrightarrow{\Omega Q} = \overrightarrow{QP}$,

(5.24) $$\vec v_\tau(P) - \vec v_\tau(Q) = \vec\omega_\tau \times \overrightarrow{QP}$$

Confrontando la (5.24) con la (5.23) si verifica allora che

$$(\vec\omega_a - \vec\omega_r) \times \overrightarrow{QP} = \vec\omega_\tau \times \overrightarrow{QP}$$

da cui segue, per l'arbitrarietá dei punti P e Q ,

(5.25) $$\vec\omega_a = \vec\omega_r + \vec\omega_\tau$$

ovvero, *in ogni istante la velocitá angolare assoluta di un corpo rigido é la somma della sua velocitá angolare relativa e della velocitá angolare di trascinamento.*

Si consideri il moto reciproco del corpo rigido, e siano $\vec\omega_a'$, $\vec\omega_r'$, $\vec\omega_\tau'$ rispettivamente la velocitá angolare assoluta, relativa e di trascinamento nel moto reciproco.

Si verifica allora che

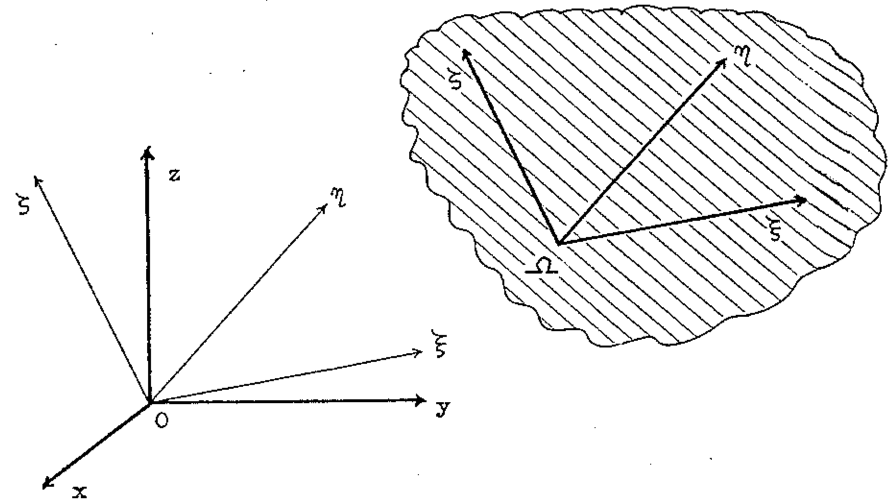
$$\vec\omega_a' = \vec\omega_r \,, \qquad \vec\omega_r' = \vec\omega_a \,, \qquad \vec\omega_\tau' = -\vec\omega_\tau$$

Osservazione 5.2 – *Si puó facilmente dimostrare che la* (5.25) *resta valida anche se il corpo rigido* S *non é allineato.*

5.5 Velocitá angolare nei moti sferici

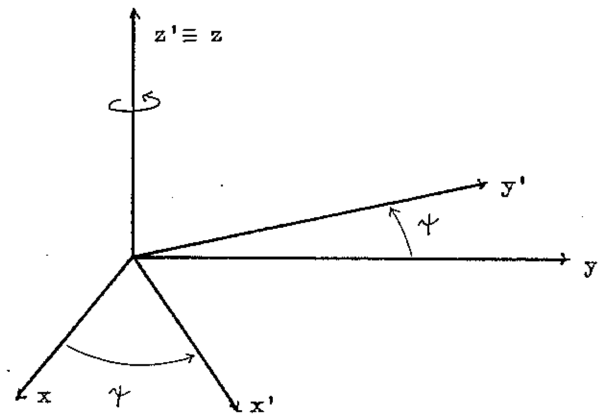
Si consideri un moto rigido sferico di centro O . Siano $O\,xyz$ una terna cartesiana fissa, e $O\,\xi\eta\zeta$ una terna cartesiana solidale al corpo rigido. La velocitá angolare $\vec{\omega}$ del corpo rigido, coincide con la velocitá angolare della terna cartesiana "greca".

Figura 5.3



Si introcuca la terna *mobile* $O\,x'y'z'$ avente l'asse z' sovrapposto ed equiorientato all'asse z , e l'asse x' sovrapposto ed equiorientato alla linea dei nodi.

Figura 5.4



Poiché il moto di $O\,x'y'z'$ é rotatorio, la velocitá angolare della terna $O\,x'y'z'$, cioé la velocitá angolare di trascinamento, é (si veda il paragrafo (4.9))

$$\vec{\omega}_\tau \;=\; \dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

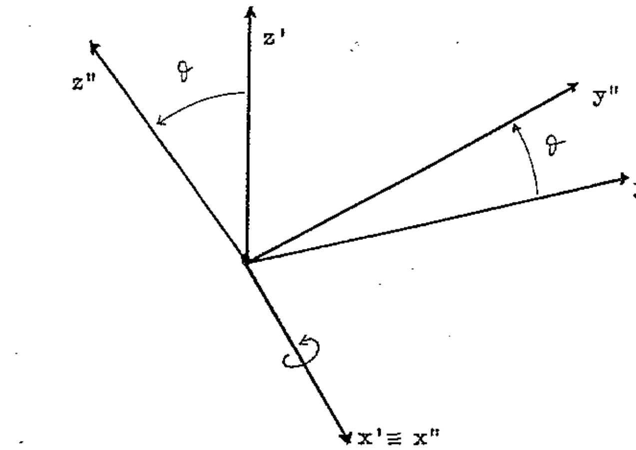
Pertanto risulta, utilizzando la (5.25),

(5.26)
$$\vec{\omega} \;=\; \vec{\omega}_r \,+\, \dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

essendo $\vec{\omega}_r$ la velocitá angolare del corpo rigido rispetto alla terna mobile $O\,x'y'z'$.

Per calcolare quest'ultimo vettore, si assuma come *fissa* la terna $O\,x'y'z'$, e si introduca una seconda terna *mobile* $O\,x''y''z''$, con l'asse x'' sovrapposto ed equiorientato all'asse x' , e l'asse z'' sovrapposto ed equiorientato all'asse ζ .

Figura 5.5



Il moto della terna mobile $O\,x''y''z''$ rispetto alla terna "fissa" $O\,x'y'z'$ é rotatorio attorno all'asse x' , cioé attorno alla linea dei nodi, con velocitá angolare $\dot{\vartheta}\,\vec{N}$. A sua volta, il moto del corpo rigido rispetto alla terna mobile $O\,x''y''z''$ é rotatorio attorno all'asse $\zeta \equiv z''$, con velocitá angolare $\dot{\varphi}\,\vec{k}$.

In virtú della (5.25), la velocitá angolare del corpo rigido rispetto alla terna $O\,x'y'z'$ é allora

$$\dot{\vartheta}\,\vec{N} \,+\, \dot{\varphi}\,\vec{k}$$

D'altra parte, tale vettore é ció che nella (5.26) é stato indicato come $\vec{\omega}_r$, e quindi si ottiene

(5.27)
$$\vec{\omega} \;=\; \dot{\vartheta}\,\vec{N} \,+\, \dot{\varphi}\,\vec{k} \,+\, \dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

che é **l'espressione della velocitá angolare nei moti sferici in funzione degli angoli di Eulero.**

In sostanza, poiché la terna di vettori $\{\vec{e}_3, \vec{k}, \vec{N}\}$ é una base, dalla (5.27) si deduce che $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ sono i coefficienti del vettore $\vec{\omega}$ rispetto a tale base.

Assai spesso é peró necessario calcolare i coefficienti della velocitá angolare $\vec{\omega}$ rispetto alla terna $\Omega\,\xi\eta\zeta$ solidale al corpo rigido. Naturalmente, essendo tale base ortogonale, i coefficienti di $\vec{\omega}$ coincidono con le componenti cartesiane del vettore stésso.

Le componenti cartesiane del vettore $\vec{\omega}$ rispetto alla terna $\Omega\,\xi\eta\zeta$ vengono usualmente indicate con i simboli p, q, r , ovvero si usa porre

(5.28)
$$\vec{\omega} \;=\; p\,\vec{\imath} + q\,\vec{\jmath} + r\,\vec{k}$$

Tenendo conto della (5.27), risulta

$$p \;=\; \vec{\omega}\cdot\vec{\imath} \;=\; \dot{\vartheta}\,\vec{N}\cdot\vec{\imath} \,+\, \dot{\psi}\,\vec{e}_3\cdot\vec{\imath}$$

Per la definizione dell'angolo di rotazione propria φ , é $\vec{N}\cdot\vec{\imath} = \cos\varphi$. Inoltre, dall'espressione (4.5) della matrice dei coseni direttori, si verifica che $\vec{e}_3\cdot\vec{\imath} = \sin\vartheta\,\sin\varphi$. Da ció segue che

(5.29)
$$p \;=\; \dot{\vartheta}\,\cos\varphi \,+\, \dot{\psi}\,\sin\vartheta\,\sin\varphi$$

In modo analogo si ottengono le espressioni di q e di r in funzione degli angoli di Eulero

$$(5.30) \qquad q = -\dot{\vartheta}\,\sin\varphi + \dot{\psi}\,\sin\vartheta\,\cos\varphi\,, \qquad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\cos\vartheta$$

Osservazione 5.3 – *Vale la pena osservare che la (5.28) é la velocitá angolare del corpo rigido, calcolata rispetto al riferimento fisso $O\,xyz$, ed espressa mediante i versori della terna $\Omega\,\xi\eta\zeta$ solidale al corpo rigido.*
Tale velocitá angolare non deve essere confusa con la velocitá angolare del corpo rigido calcolata rispetto al riferimento $\Omega\,\xi\eta\zeta$. Quest'ultima é banalmente nulla, essendo la terna greca solidale al corpo rigido.

In taluni casi, puó essere utile calcolare le componenti cartesiane della velocitá angolare rispetto alla terna fissa $O\,xyz$. Si lascia per esercizio verificare che

$$(5.31) \qquad \vec{\omega} = \Big(\dot{\vartheta}\,\cos\psi + \dot{\varphi}\,\sin\psi\,\sin\vartheta\Big)\,\vec{e}_1 + \Big(\dot{\vartheta}\,\sin\psi - \dot{\varphi}\,\cos\psi\,\sin\vartheta\Big)\,\vec{e}_2 + \Big(\dot{\varphi}\,\cos\vartheta + \dot{\psi}\Big)\,\vec{e}_3$$

5.6 Esercizi

1) — Rispetto ad un riferimento $\mathcal{R}$ individuato da una terna cartesiana $O\,xyz$, due punti A e B si muovono di moto rettilineo e uniforme, sull'asse x e sull'asse y rispettivamente, con velocitá $\vec{v}_A = a\,\vec{e}_1\,,\ \ \vec{v}_B = b\,\vec{e}_2$.
Un riferimento $\mathcal{R}'$ si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme rispetto ad $\mathcal{R}$, con velocitá di traslazione $\vec{\tau}$ parallela al piano $O\,xy$.
Determinare $\vec{\tau}$ in modo tale che rispetto ad $\mathcal{R}'$ le traiettorie dei due elementi A e B siano due rette parallele.

Risposta • *Deve essere* $\vec{\tau} = (1/2)\,a\,\vec{e}_1 + (1/2)\,b\,\vec{e}_2$.

2) — Una retta r si muove nel piano $O\,xy$ di una terna cartesiana $O\,xyz$. Il moto della retta é rotatorio attorno all'asse z, con velocitá angolare $\dot{\vartheta}\,\vec{e}_3$. Introdotto sulla retta un sistema di ascisse, sia s l'ascissa di un punto P che si muove sulla retta.
Determinare la velocitá e l'accelerazione di P rispetto al riferimento $O\,xyz$.

Risposta • *Introdotto un riferimento mobile $O\,\xi\eta\zeta$ solidale alla retta, con l'asse ξ orientato come la retta, e l'asse ζ orientato come l'asse z, risulta :* $\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{\imath} + s\dot{\vartheta}\,\vec{\jmath},\ \ \vec{a}_P = (\ddot{s} - s\dot{\vartheta}^2)\,\vec{\imath} + (s\ddot{\vartheta} + 2\dot{s}\dot{\vartheta})\,\vec{\jmath}$.

3) — Un aereo A si muove do moto traslatorio rettilineo e uniforme, con velocitá in grandezza pari a $300\ m/s$. Un missile, schematizzabile come un elemento P, si muove di moto rettilineo e uniforme, con velocitá in grandezza pari a $300\sqrt{3}\ m/s$. Nell'istante in cui il missile colpisce l'aereo l'angolo tra le due velocitá é di 30^o.
Determinare la grandezza della velocitá del missile rispetto ad un passeggero dell'aereo.

Risposta • *Risulta* $\|\vec{v}_P\| = 300\ m/s$.

4) — Un anello circolare di raggio R si muove in un riferimento $O\,xyz$. Il centro dell'anello é sovrapposto all'origine degli assi, e il moto dell'anello é rotatorio attorno all'asse z, con velocitá angolare $\dot{\varphi}\,\vec{e}_3$.

Un elemento P si muove sull'anello : sia ϑ l'angolo orientato che il vettore $\overrightarrow{OP}$ forma col semiasse delle z negative.
Determinare il quadrato della grandezza della velocitá di P.

Risposta • *Risulta* $\|\vec{v}_P\|^2 = R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$.

5) — Un'asta rettilinea di estremi A e B si muove in un riferimento $O\,xyz$. L'estremo A dell'asta si muove sull'asse z, e l'estremo B si muove sul piano $O\,xy$. Sia ϑ l'angolo orientato che $\overrightarrow{OB}$ forma con l'asse x, e sia φ l'angolo orientato che $\overrightarrow{AB}$ forma col semiasse delle z negative (figura 5.6_1).
Determinare una delle infinite velocitá angolari dell'asta.

Risposta • *Una delle infinite velocitá angolari é* $\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_3 + \dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\vec{e}_1 - \dot{\varphi}\,\cos\vartheta\,\vec{e}_2$.

6) — Una lamina piana ha la forma di un triangolo rettangolo ed isoscele, di vertici O, A, B, con $|OA| = |OB| = \ell,\ |AB| = \sqrt{2}\,\ell$.
Il vertice O é sovrapposto all'origine di una terna cartesiana $O\,xyz$. Inoltre, durante il moto il lato OA della lamina rimane appoggiato al piano $O\,xy$ (figura 5.6_2).
Determinare la velocitá angolare della lamina in funzione degli angoli di Eulero. Rispondere alla stessa domanda utilizzando il teorema della cinematica relativa per il corpo rigido.

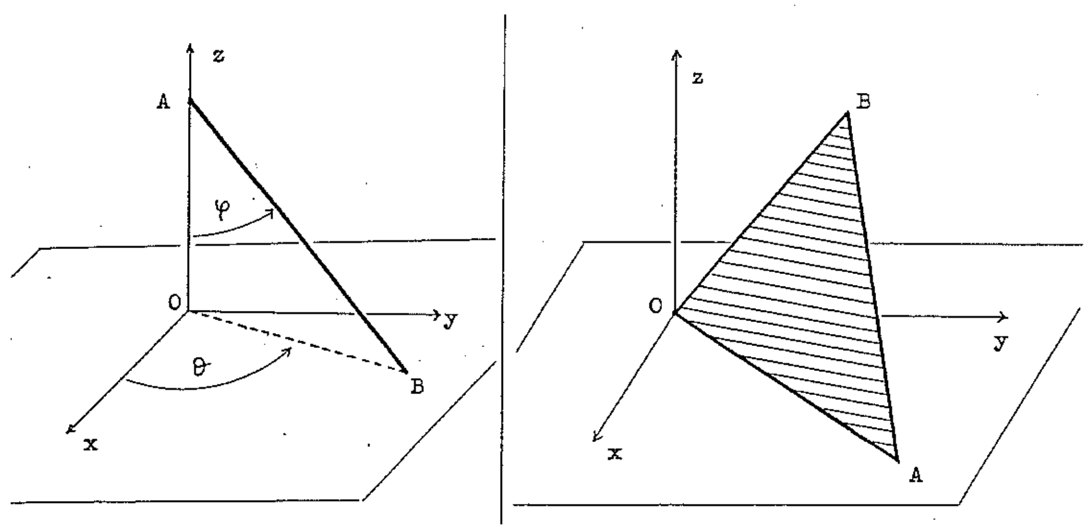


Figura 5.6

7) — Sia S il sistema costituito da un'asta rettilinea di estremi A e B e lunghezza $2\,\ell$, e da una lamina rettangolare i cui lati misurano ℓ e $2\,\ell$ rispettivamente.
L'asta si muove di moto di moto rotatorio attorno all'asse z di un riferimento $O\,xyz$. L'estremo A é fisso, e sovrapposto all'origine O, e durante il moto l'asta si mantiene ortogonale all'asse z. La lamina é libera di ruotare attorno all'asta alla quale é "incernierata" (figura 5.7_1).
Determinare la velocitá angolare della lamina in funzione degli angoli di Eulero. Rispondere alla stessa domanda utilizzando il teorema della cinematica relativa per il corpo rigido.

8) — Una lamina piana ha la forma di un triangolo isoscele, di vertici A, B, C, con $|AB| = |AC|$. La lamina si muove in unriferimento $Oxyz$. Il vertice A si muove sull'asse z, e durante il moto il lato BC rimane appoggiato sul piano Oxy (figura 5.7_2).

Determinare la velocitá angolare della lamina in funzione degli angoli di Eulero. Rispondere alla stessa domanda utilizzando il teorema della cinematica relativa per il corpo rigido.

Figura 5.7