Integrali ellittici

Si definiscono integrali ellittici gli integrali del tipo

$$\int \frac{dy}{\sqrt{P_4(y)}}$$

dove $P_4(x)$ è un polinomio di quarto grado. In particolare,

$$u(x) = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

è detto integrale ellittico di prima specie.

Gli integrali ellittici possono essere calcolati definendo delle funzioni che generalizzano le funzioni trigonometriche e sono dette funzioni ellittiche. Così come gli integrali delle radici quadrate dei polinomi di secondo grado ci danno le funzioni inverse di quelle trigonometriche, gli integrali ellittici saranno proporzionali alle funzioni inverse di quelle ellittiche.

Per esempio, sappiamo che

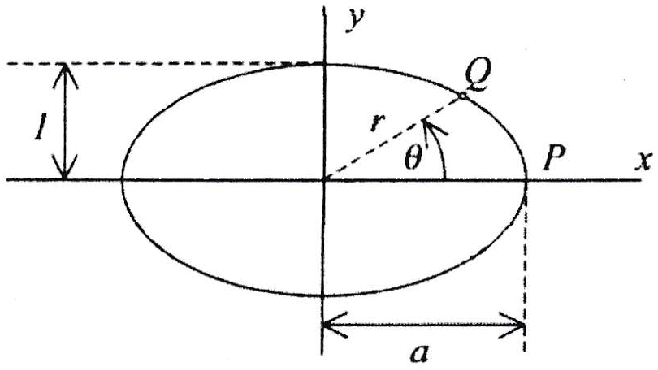
$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

e quindi

$$u = \int_0^{\sin u} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

dove $u = \arcsin x$.

Funzioni ellittiche di Jacobi



Le funzioni ellittiche possono essere definite geometricamente generalizzando la trigonometria al caso dell'ellisse: cosideriamo un'ellisse di semiassi a e 1 (vedi figura). L'equazione cartesiana sarà

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

Inoltre definiamo

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{2}$$

Identifichiamo il modulo k delle funzioni ellittiche[1] con l'eccentricità ϵ dell'ellisse, che è definita come

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}$$

[1] Talvolta si usa la notazione $m = k^2$.

Si ha $0 \leq k \leq 1$. Se $k = 0$ l'ellisse si riduce a una circonferenza, e si ottiene la trigonometria ordinaria. Si definisce anche il modulo complementare come $k' = \sqrt{1-k^2}$ (o $m' = 1 - m$).

Si definisce poi l'argomento u delle funzioni ellittiche come

$$u = \int_P^Q r\, d\theta$$

Il parametro u non ha un significato geometrico (non è un angolo né una lunghezza), ma si riduce a θ per $k \to 0$.

Possiamo finalmente definire le funzioni ellittiche di Jacobi come

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u,k) &= y \\ \operatorname{cn}(u,k) &= x/a \\ \operatorname{dn}(u,k) &= r/a \end{aligned} \tag{3}$$

Per $k \to 0$, sn si riduce al seno, cn al coseno, mentre dn è uguale a 1. In generale il modulo k viene sottinteso.

Da (1) e (2) segue che

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1, \qquad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$$

È facile vedere che

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \end{aligned}$$

da cui, tramite (3), si possono ricavare le equazioni differenziali a cui obbediscono le funzioni ellittiche. Per esempio se $y(u) = \operatorname{sn} u$,

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

da cui segue

$$u = \int^{\operatorname{sn} u} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

che è l'integrale ellittico di prima specie, che può quindi essere scritto in termini delle funzioni ellittiche (o meglio delle loro inverse).

Analogamente, per $y(u) = \operatorname{cn} u$, abbiamo

$$u = \int^{\operatorname{cn} u} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(k^2y^2 + k'^2)}}$$

e per $y(u) = \operatorname{dn} u$, abbiamo

$$u = \int^{\operatorname{dn} u} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2 - k'^2)}}$$

Una proprietà importante delle funzioni ellittiche è che sono doppiamente periodiche nel piano complesso, in quanto possiedono un periodo reale e uno immaginario: $\operatorname{sn}(u + 4nK) = \operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u + 4nK) = \operatorname{cn}(u)$, $\operatorname{dn}(u + 2nK) = \operatorname{dn}(u)$, dove

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

e $\operatorname{sn}(u + 2inK') = \operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u + 4inK') = \operatorname{cn}(u)$, $\operatorname{sn}(u + 4inK') = \operatorname{sn}(u)$, dove

$$K' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}$$

Soluzione del corpo rigido

Le funzioni ellittiche permettono di scrivere la soluzione del problema del moto del corpo rigido libero in maniera elegante. Ricordiamo le equazioni di Eulero per un corpo rigido libero:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

Definendo le costanti $I_0 = \frac{L^2}{2T}$ e $\Omega_0 = \frac{2T}{L}$, dove T e L sono l'energia cinetica e il modulo del momento angolare, si dimostra che

$$\omega_1(\tau) = -\Omega_1 \operatorname{cn}\Omega t, \qquad \omega_2 = \Omega_2 \operatorname{sn}\Omega t, \qquad \omega_3 = \Omega_3 \operatorname{dn}\Omega t$$

dove $\Omega = \frac{(I_1-I_3)\Omega_1\Omega_3}{I_2\Omega_2}$, Ω_i sono costanti proporzionali a Ω_0 e ai momenti di inerzia, e il modulo delle funzioni ellittiche è dato da

$$k^2 = \frac{(I_0 - I_3)(I_1 - I_2)}{(I_2 - I_3)(I_1 - I_0)}$$

Bibliografia

W.A. Schwalm, `www.und.edu/instruct/schwalm/MAA_Presentation_10-02/handout.pdf`

A.J. Brizard, Eur. J. Phys. 30, 729 (2009).