COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE
19-APRILE-2005

Si consideri il sistema meccanico costituito:

a) dal disco circolare omogeneo, di centro C, massa m e raggio r, mobile nel piano verticale xy attorno all'asse orizzontale z passante per il punto O del suo bordo;

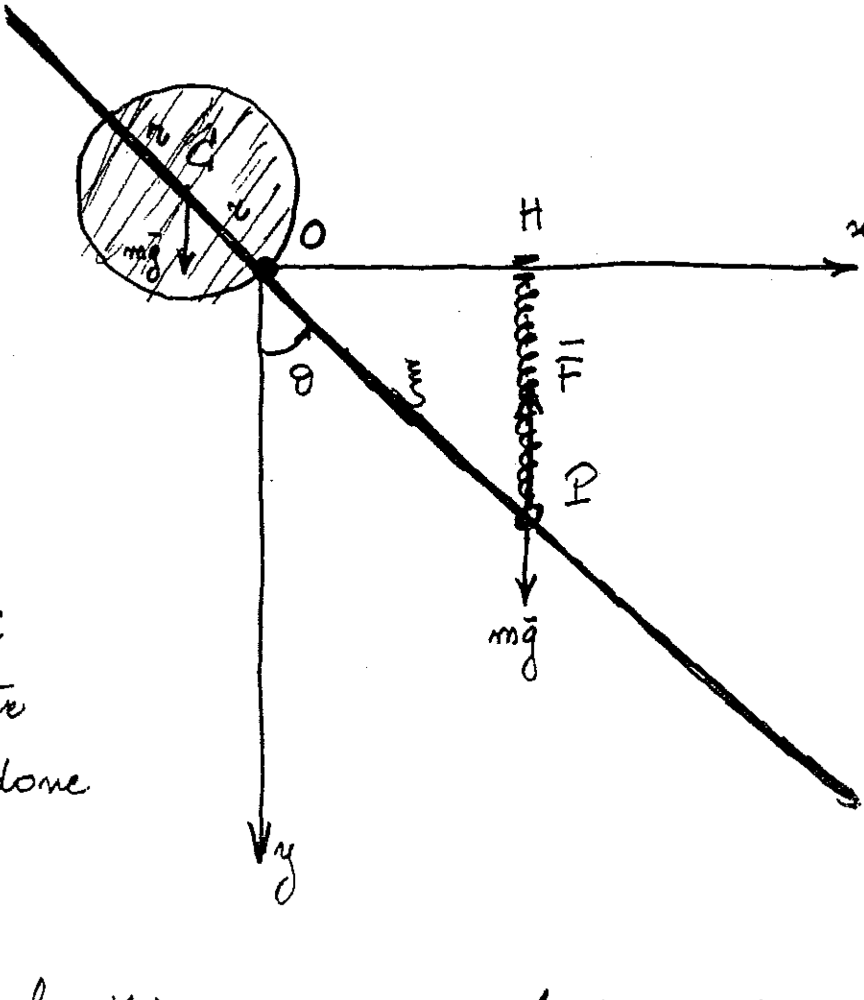
b) dal punto P, pure di massa m, vincolato a scorrere sulla retta OC solidale col disco, supposta di massa trascurabile.

Sul punto P agisce, oltre al proprio peso, la forza verticale $\bar{F} = -\frac{mg}{2r}(P-H)$ che lo attrae verso la sua proiezione H sull'asse x orizzontale.

1) Trovare le posizioni di equilibrio e dimostrare che una di esse è stabile.

2) Scrivere le equazioni differenziali del moto nella forma di Eulero-Lagrange.

3) Verificare la possibilità di movimenti con OC costantemente verticale, illustrandone i caratteri.



4) Studiare i piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio stabile.

COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

19-APRILE-2005

Si consideri il sistema meccanico costituito:

a) dal disco circolare omogeneo, di centro C, massa m e raggio r, mobile nel piano verticale xy attorno all'asse orizzontale z passante per il punto O del suo bordo;

b) dal punto P, pure di massa m, vincolato a scorrere sulla retta OC solidale col disco, supposta di massa trascurabile.

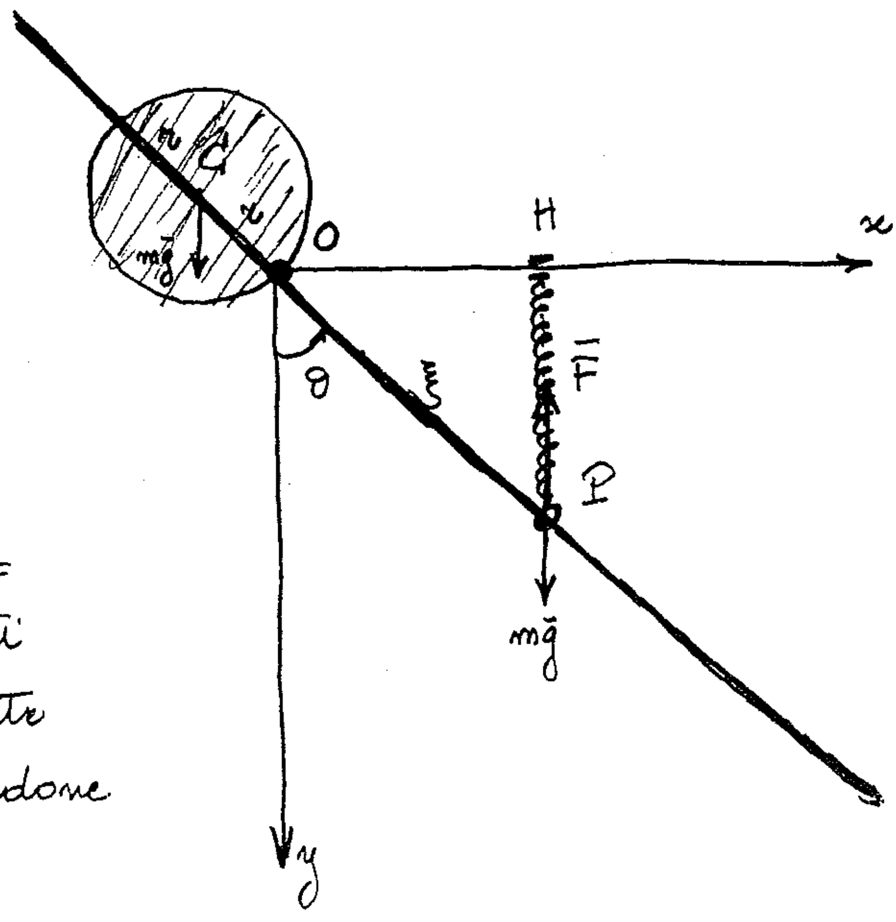
Sul punto P agisce, oltre al proprio peso, la forza verticale $\overline{F} = -\frac{mg}{2r}(P-H)$ che lo attrae verso la sua proiezione H sull'asse x orizzontale.

1) Trovare le posizioni di equilibrio e dimostrare che una di esse è stabile.

2) Scrivere le equazioni differenziali del moto nella forma di Eulero-Lagrange.

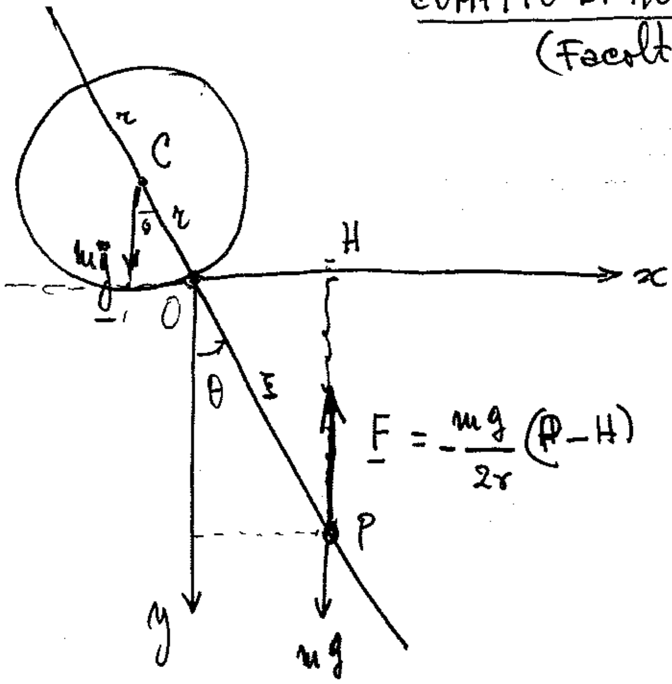
3) Verificare la possibilità di movimenti con OC costantemente verticale, illustrandone i caratteri.

4) Studiare i piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio stabile.



COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE

(Facoltà di Scienze M.F.N.)



$y_C = -r\cos\theta$

$y_P = \xi\cos\theta$

$|P-H|^2 = \xi^2\cos^2\theta$

1) EQUILIBRIO E STABILITÀ

$$\mathcal{U}(\xi,\theta) = mg\,y_C + mg\,y_P - \frac{1}{2}\frac{mg}{2r}|P-H|^2 = -mgr\cos\theta + mg\xi\cos\theta - \frac{mg}{4r}\xi^2\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\xi} = mg\cos\theta - \frac{mg}{2r}\xi\cos^2\theta \,, \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta} = +mgr\sin\theta - mg\xi\sin\theta + \frac{mg}{2r}\xi^2\cos\ldots$$

$$(1)\begin{cases} \frac{mg}{2r}\cos\theta\,(2r - \xi\cos\theta) = 0 \\ mg\sin\theta\left(r - \xi + \frac{\xi^2}{2r}\cos\theta\right) = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = 0 \implies \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}\,, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}}$

$2r = \xi\cos\theta$

$\sin\theta = 0\,, \quad \theta = 0\,, \quad \theta = \pi$

$r - \xi + \frac{\xi^2}{2r}\cos\theta = 0$

per $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ la 2ª equaz. dà : $\boxed{\xi = r}$

per $\theta = 0$ la 1ª equaz. dà : $\xi = 2r$

per $\theta = \pi$ la 1ª equaz. dà : $\xi = -2r$

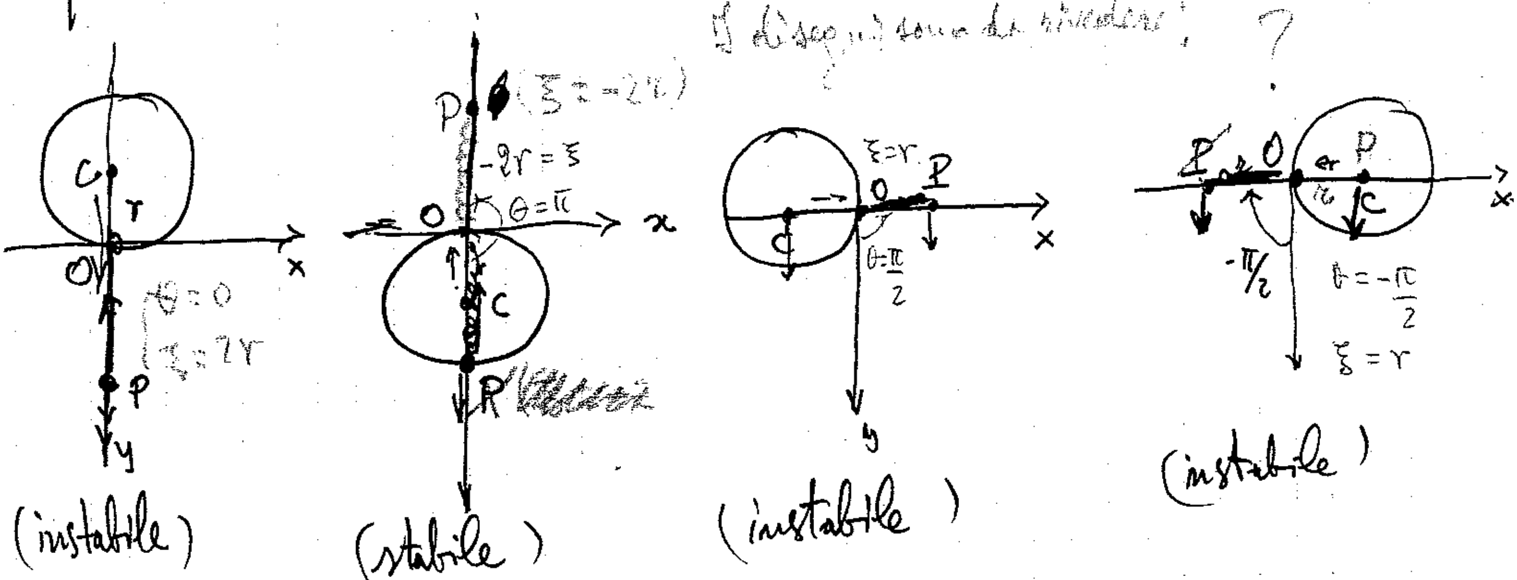
Il sistema (1) è equivalente ai 4 sistemi:

$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ (impossibile) $\quad \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ r - \xi + \frac{\xi^2}{2r}\cos\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \xi = r \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = -\pi/2 \\ \xi = r \end{cases}$

$\begin{cases} 2r - \xi\cos\theta = 0 \\ \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \pi \\ \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} 2r - \xi\cos\theta = 0 \\ r - \xi + \frac{\xi^2}{\ldots}\cos\theta = 0 \end{cases}$ impossibile

Esistono perciò quattro posizioni di equilibrio:

$$
① \begin{cases} \theta = 0 \\ \xi = 2r \end{cases}, \quad ② \begin{cases} \theta = \pi \\ \xi = -2r \end{cases}, \quad ③ \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \xi = r \end{cases} \quad ④ \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \xi = r \end{cases}
$$



$$
\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -\frac{mg}{2r}\cos^2\theta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \xi} = -mg\sin\theta + \frac{mg}{r}\xi\cos\theta\sin\theta
$$

$$
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgr\cos\theta - mg\xi\cos\theta - \frac{mg}{2r}\xi^2\sin^2\theta + \frac{mg}{2r}\xi^2\cos^2\theta =
$$

$$
= mgr\cos\theta - mg\xi\cos\theta + \frac{mg}{2r}\xi^2\cos 2\theta
$$

$$
H(\xi,\theta) = \begin{vmatrix} -\frac{mg}{2r}\cos^2\theta & -mg\sin\theta + \frac{mg}{r}\xi\cos\theta\sin\theta \\ -mg\sin\theta + \frac{mg}{r}\xi\cos\theta\sin\theta & mgr\cos\theta - mg\xi\cos\theta + \frac{mg}{2r}\xi^2\cos 2\theta \end{vmatrix}
$$

$$
H(0,2r) = -\frac{mg}{2r}\left(mgr - mg2r + 2rmg\right) = -\frac{m^2g^2}{2} < 0,
$$
né max né min. per U (equilibrio instabile)

$$
H(\pi,-2r) = -\frac{mg}{2r}\left(-mgr - 2mgr + 2mgr\right) = +\frac{m^2g^2}{2} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_{(\pi,-2r)} = -\frac{mg}{2r} < 0
$$

... (equilibrio stabile)

$$H\left(\pm\frac{\pi}{2}, r\right) = -m^2 g^2 < 0$$ né max né min per U. (equilibrio instabile)

---

2) Equazioni del moto:

Determiniamo ora l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J_O = T_{punto} + T_{Disco}$$

$$\begin{cases} x_P = \xi \sin\theta & \dot{x}_P = \dot{\xi}\sin\theta + \xi\cos\theta\,\dot{\theta} \\ y_P = \xi\cos\theta & \dot{y}_P = \dot{\xi}\cos\theta - \xi\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$v_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\theta}^2, \quad \boxed{T_{punto} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\theta}^2\right)}$$

$$T_{Disco} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 J_O, \qquad J_O = J_G + m r^2 = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$$

$$\boxed{T_{Disco} = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\theta}^2\right)}$$

Equaz. lagrangiane del moto:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial T}{\partial \xi} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = \dfrac{\partial U}{\partial \theta} \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\ddot{\xi} \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = m\xi\dot{\theta}^2$$

$$m\ddot{\xi} - m\xi\dot{\theta}^2 + \frac{mg}{2r}\xi\cos^2\theta - mg\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\theta} + m\xi^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\theta} + 2m\xi\dot{\xi}\dot{\theta} + m\xi^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot\theta + 2 m \xi \dot\xi \dot\theta + m \xi^2 \ddot\theta + mg\xi \sin\theta - mgr\sin\theta - \frac{mg}{2r}\xi^2 \cos\theta\sin\theta = 0$$

Equazioni del moto (di Lagrange).

$$\boxed{\begin{cases} \ddot\xi - \xi\dot\theta^2 + \dfrac{g}{2r}\xi\cos^2\theta - g\cos\theta = 0 \\ \dfrac{3}{2}r^2\ddot\theta + 2\xi\dot\xi\dot\theta + \xi^2\ddot\theta + g\xi\sin\theta - gr\sin\theta - \dfrac{g}{4r}\xi^2\sin 2\theta = 0 \end{cases}}$$

---

3) Per avere dei moti con l'asta costantemente verticale deve aversi:

$$\theta = \dot\theta = \ddot\theta = 0 \implies \begin{cases} \boxed{\ddot\xi + \dfrac{g}{2r}\xi - g = 0} \quad (\text{moti armonici spostati}) \\ \text{la } 2^a \text{ equaz. è identicamente soddisfatta} \end{cases}$$

ovvero:

$$\theta = \pi,\ \dot\theta = \ddot\theta = 0 \implies \ddot\xi + \frac{g}{2r}\xi + g = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{\ddot\xi + \frac{g}{2r}\xi = -g}$$

Poniamo $\boxed{\frac{g}{2r}\xi - g = \omega^2\eta} \implies \frac{g}{2r}\xi = \frac{\omega^2\eta + g}{\frac{g}{2r}} = \frac{2r}{g}(\omega^2\eta + g)$

derivando rispetto a t avremo:

$\frac{g}{2r}\dot\xi = \omega^2\dot\eta$ e ancora $\frac{g}{2r}\ddot\xi = \omega^2\ddot\eta \implies \ddot\xi = \frac{2r}{g}\omega^2\ddot\eta$

$$\frac{2r}{g}\omega^2\ddot\eta + \omega^2\eta = 0 \implies \boxed{\ddot\eta + \frac{g}{2r}\eta = 0}$$

$$\eta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2r}}\,t + \gamma\right)$$

$$\ddot\xi + \frac{g}{2r}(\xi - 2r) = 0 \implies \xi - 2r = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2r}}\,t + \gamma\right)$$

$$\boxed{\xi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2r}}\,t + \gamma\right) + 2r}$$

moti armonici attorno a $\xi = 2r$

$$\ddot\xi + \frac{g}{2r}(\xi + 2r) = 0 \implies \xi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2r}}\,t + \gamma\right) - 2r$$ moti armonici di P attorno

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{2r}\xi - g = 0$$

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{2r}\left(\xi - \frac{2rg}{g}\right) = 0$$

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{2r}\left(\xi - 2r\right) = 0, \quad \xi + 2r = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2r}}\,t + \gamma\right)$$

$$\boxed{\xi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2r}}\,t + \gamma\right) + 2r}$$

$$\boxed{\theta = \pi, \quad \xi = -2r}$$

$$\varphi = \theta - \pi, \quad \eta = \xi + 2r \implies \boxed{\varphi = 0, \ \eta = 0}$$

$$\theta = \varphi + \pi \qquad \xi = \eta - 2r$$

$$U(\varphi,\eta) = +mgr\cos\varphi \cancel{-mg\xi\cos\varphi} - mg(\eta - 2r)\cos\varphi - \frac{mg}{4r}(\eta-2r)^2\cos^2\varphi$$

$$U^*(\eta,\varphi) = mgr\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) - mg(\eta-2r)\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) - \frac{mg}{4r}\left(\eta^2 - 4r\eta + 4r^2\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)^2$$

$$\left(1 - \varphi^2 + \varphi^4\right)$$

$$-\frac{mgr}{2}\varphi^2 \cancel{-mg\eta} - \frac{mg2r\varphi^2}{8} - \frac{mg}{4r}\eta^2 + \frac{mg\,4r^2\varphi^2}{4r} \cancel{+mg\eta}$$

$$-\frac{1}{2} - \cancel{1} + \cancel{1}$$

$$\boxed{U^*(\eta,\varphi) = -\frac{mgr}{2}\varphi^2 - \frac{mg}{4r}\eta^2}$$

$$T^*(\eta,\varphi) = \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{\eta}^2 + \left(\eta^2 - 4r\eta + 4r^2\right)\dot{\varphi}^2\right] \qquad \frac{3}{4} + 2$$

$$T^*(\eta,\varphi) = \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}^2 + 4r^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + 2mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{T^*(\eta,\varphi) = \frac{11}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2}$$

$$\boxed{T^*(\eta,\varphi) = \frac{11}{4} m r^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m \dot\eta^2}$$

$$\boxed{U^*(\eta,\varphi) = -\frac{mgr}{2}\varphi^2 - \frac{mg}{4r}\eta^2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\eta} = m\ddot\eta, \quad \frac{\partial T^*}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial \eta} = -\frac{mg}{2r}\eta$$

$$\cancel{m}\ddot\eta + \frac{\cancel{m}g}{2r}\eta = 0 \qquad \boxed{\ddot\eta + \frac{g}{2r}\eta = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot\varphi} = \frac{11}{2} m r^2 \ddot\varphi, \quad \frac{\partial T^*}{\partial \varphi} = 0$$

Piccoli moti

$$\frac{\partial U^*}{\partial \varphi} = -mgr\varphi$$

$$\frac{11}{2}\cancel{m}r^2\ddot\varphi + \cancel{m}g\cancel{r}\varphi = 0$$

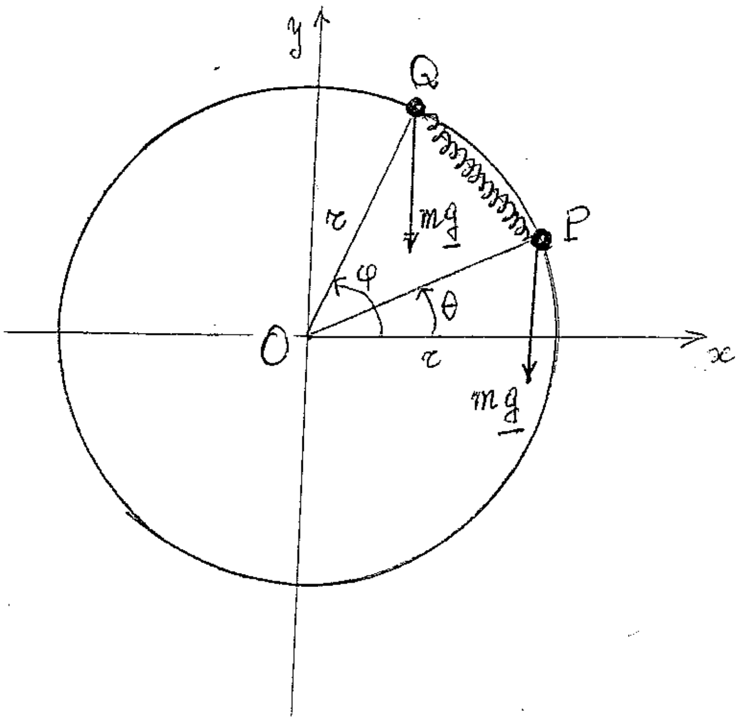
$$\boxed{\ddot\varphi + \frac{2g}{11r}\varphi = 0}$$

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE (Per Fisici)
19 Maggio 2005

Due punti P e Q, di ugual massa m, mobili lungo la circonferenza verticale liscia di centro O e di raggio r, sono collegati fra loro da una molla di costante elastica $k = \frac{mg}{r}$.

1) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilita';
2) Scrivere le equazioni differenziali del moto del sistema;
3) Verificare che sono possibili movimenti del sistema sia con i punti P e Q sempre uniti, sia con i punti P e Q sempre simmetrici rispetto al diametro verticale;
4) Studiare infine le piccole oscillazioni del sistema intorno alla posizione di equilibrio stabile.



$$U(\theta,\varphi) = -\frac{mgr}{2}\left[(\cos\varphi-\cos\theta)^2+(\sin\varphi-\sin\theta)^2\right]-mgr\,(\sin\theta+\sin\varphi)$$

$$U_\theta = -mgr\left\{\left[(\cos\varphi-\cancel{\cos\theta})\sin\theta-(\sin\varphi-\cancel{\sin\theta})\cos\theta\right]+\cos\theta\right\}$$

$$U_\varphi = -mgr\left\{\left[(\cancel{\sin\varphi}-\sin\theta)\cos\varphi-(\cancel{\cos\varphi}-\cos\theta)\sin\varphi\right]+\cos\varphi\right\}$$

$$\begin{cases} U_\theta = -mgr\left[\sin(\theta-\varphi)+\cos\theta\right] \\ U_\varphi = mgr\left[\sin(\theta-\varphi)-\cos\varphi\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\theta-\varphi)+\cos\theta = 0 \\ \sin(\theta-\varphi)-\cos\varphi = 0\end{cases}$$

$$\cos\theta+\cos\varphi = 0$$

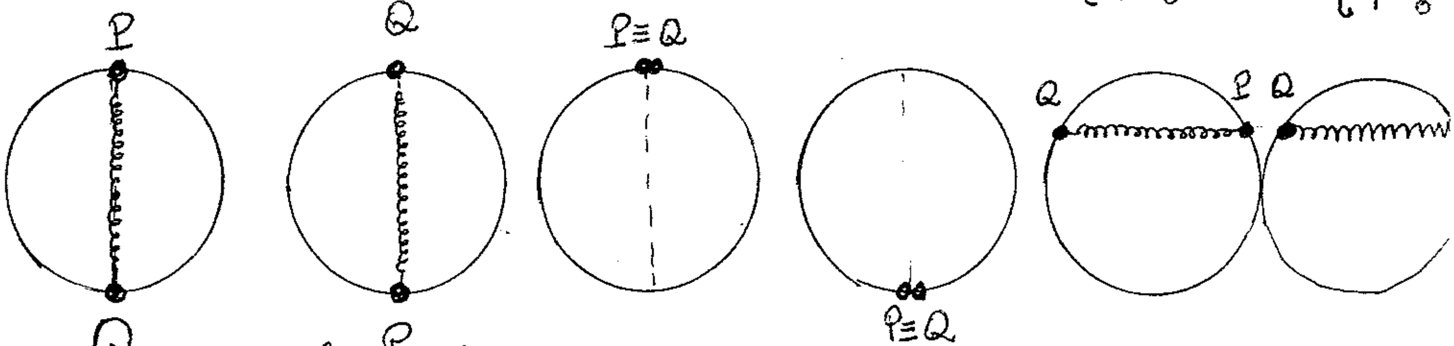
$$\varphi = \pi\pm\theta$$

$$\begin{cases} \varphi = \pi+\theta \\ \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \pi-\theta \\ \sin 2\theta-\cos\theta = 0\end{cases}$$

$$\cos\theta\,(2\sin\theta-1) = 0$$

1) $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\theta=-\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\theta=-\frac{\pi}{2}\\ \varphi=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{6}\\ \varphi=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\theta=\frac{5\pi}{6}\\ \varphi=\frac{\pi}{6}\end{cases}$



instabili stabile instabili

$$U_{\theta\theta} = -mgr\left[\cos(\theta-\varphi)-\sin\theta\right]$$

$$U_{\varphi\varphi} = mgr\left[\sin\varphi-\cos(\theta-\varphi)\right]$$

$$U_{\theta\varphi} = U_{\varphi\theta} = mgr\cos(\theta-\varphi)$$

$$H(\theta,\varphi) = m^2 g^2 r^2 \left[\cos^2(\theta-\varphi) - \cos(\theta-\varphi)(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi) + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \cos^2(\theta-\varphi)\right] =$$
$$= m^2 g^2 r^2 \left[\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \cos(\theta-\varphi)(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi)\right]$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = -m^2 g^2 r^2 < 0$$

$$H_4 = 3 m^2 g^2 r^2 > 0 \qquad H_{5,6} = \frac{3}{4} m^2 g^2 r^2 > 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m r^2 (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2) - \frac{mgr}{2}\left[(\cos\varphi - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta)^2 - 2(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi)\right]$$

$$\begin{cases} r\ddot\theta + g \operatorname{sen}(\theta-\varphi) + g\cos\theta = 0 \\ r\ddot\varphi - g\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + g\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\theta = \varphi \implies \begin{cases} r\ddot\theta + g\cos\theta = 0 \\ r\ddot\theta + g\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$-\theta = +\varphi \implies \begin{cases} r\ddot\theta - g\operatorname{sen}2\theta + g\cos\theta = 0 \\ -r\ddot\theta + g\operatorname{sen}2\theta - g\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Piccoli moti

$$\begin{cases} \alpha = \theta + \frac{\pi}{2} \\ \beta = \varphi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \beta - \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{sen}(\theta-\varphi) = \operatorname{sen}(\alpha-\beta) \quad \cos\theta = \operatorname{sen}\alpha \quad \cos\varphi = \operatorname{sen}\beta$$

$$\begin{cases} r\ddot\alpha + g\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + g\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ r\ddot\beta - g\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + g\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r\ddot\alpha + 2g\alpha - g\beta = 0 \\ r\ddot\beta - g\alpha + 2g\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = C_1 \cos(\sqrt{3}\lambda t + \gamma_1) + C_2 \cos(\lambda t + \gamma_2)$$
$$\beta = -C_1 \cos(\sqrt{3}\lambda t + \gamma_1) + C_2 \cos(\lambda t + \gamma_2)$$
$$\lambda = \frac{g}{r}$$