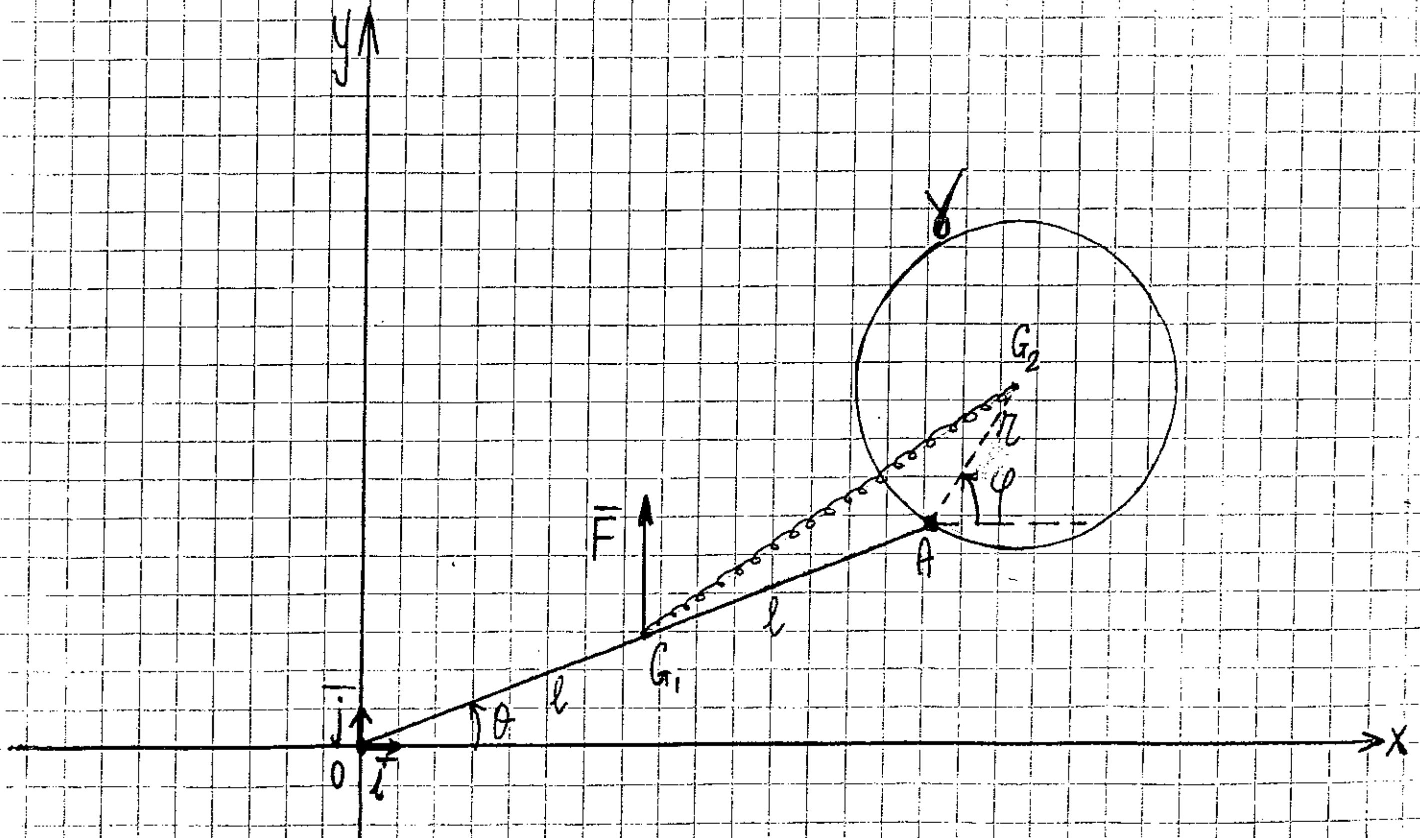
(1)

1 Nel piano orizzontale $Oxy$, un'asta omogenea $OA$, di massa $m$ e lunghezza $2l$, è incernierata in $O$ e reca, incernierato in $A$, come mostra la figura, un disco omogeneo $\gamma$, di massa $m$ e raggio $r < l$.

Nel baricentro $G_1$ dell'asta è applicata la forza costante $\bar{F} = h\bar{j}$ $(h > 0)$, inoltre ai punti $G_1$ e $G_2$ (baricentro del disco) sono applicati gli estremi di una molla di costante elastica $K^2$.

Trascurando gli attriti

1) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità
2) scrivere le equazioni del moto del sistema
3) studiare i piccoli moti attorno alla configurazione di equilibrio stabile.




9-7-04

$$U = h\,l\,\text{sen}\theta - \frac{k^2}{2}\left[r^2+l^2-2rl\cos(\pi+\theta-\varphi)\right]$$

$$\boxed{U = h\,l\,\text{sen}\theta - k^2 r l\cos(\theta-\varphi)}$$

$$\begin{cases} U_\theta = l\left[h\cos\theta + k^2 r\,\text{sen}(\theta-\varphi)\right]=0 \\ U_\varphi = -k^2 r l\,\text{sen}(\theta-\varphi)=0 \quad ; \quad \theta-\varphi = 0,\ \pi \end{cases}$$

$$\theta=\varphi \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \text{I)}\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases} ;\ \text{II)}\begin{cases}\theta=-\frac{\pi}{2}\\ \varphi=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\theta=\varphi+\pi \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \text{III)}\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\frac{3}{2}\pi\end{cases} ;\ \text{IV)}\begin{cases}\theta=-\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$U_{\theta\theta} = l\left[-h\,\text{sen}\theta + k^2 r\cos(\theta-\varphi)\right] ;\ U_{\varphi\varphi} = k^2 r l\cos(\theta-\varphi)$$

$$U_{\theta\varphi} = U_{\varphi\theta} = -k^2 r l\cos(\theta-\varphi)$$

$U_{\varphi\varphi} < 0$ se $\theta=\varphi+\pi$

III) $H\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = k^2 l^2 r h > 0$ eq. stabile

IV) $H\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -k^2 l^2 r h < 0$ eq instabile

$$\begin{cases} x_{G_2} = 2l\cos\theta + r\cos\varphi \\ y_{G_2} = 2l\,\text{sen}\theta + r\,\text{sen}\varphi \end{cases} ;\ \begin{cases} \dot{x}_{G_2} = -2l\dot\theta\,\text{sen}\theta - r\dot\varphi\,\text{sen}\varphi \\ \dot{y}_{G_2} = 2l\dot\theta\cos\theta + r\dot\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$$v_{G_2}^2 = 4l^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2 + 4rl\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)$$

$$I_0 = \frac{4ml^2}{3} \quad ; \quad I_{G_2} = \frac{mr^2}{2}$$

$$T = \frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\left[4l^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2 + 4rl\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)\right] + \frac{mr^2}{4}\dot\varphi^2$$

$$\boxed{T = \frac{8}{3}ml^2\dot\theta^2 + \frac{3}{4}mr^2\dot\varphi^2 + 2mrl\dot\theta\dot\varphi\cos(\theta-\varphi)}$$

$$\mathcal{L} = T + U$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{16}{3} m l^2 \dot\theta + 2 m l r \dot\varphi \cos(\theta - \varphi) \qquad ②$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -2 m r l \dot\theta \dot\varphi \sin(\theta - \varphi) + h l \cos\theta + k^2 r l \sin(\theta - \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{2} m r^2 \dot\varphi + 2 m r l \dot\theta \cos(\theta - \varphi); \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 2 m r l \dot\theta \dot\varphi \sin(\theta - \varphi) - k^2 r l \sin(\theta - \varphi)$$

$$\begin{cases} 16 m l \ddot\theta + 6 m r \ddot\varphi \cos(\theta - \varphi) - 6 m r \dot\varphi^2 \sin(\theta - \varphi) - 3 h \cos\theta - 3 k^2 r \sin(\theta - \varphi) = 0 \\ 3 m r \ddot\varphi + 4 m l \ddot\theta \cos(\theta - \varphi) - 4 m l \dot\theta^2 \sin(\theta - \varphi) + 2 k^2 l \sin(\theta - \varphi) = 0 \end{cases}$$

---

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad \eta = \theta - \frac{\pi}{2}, \ \psi = \varphi + \frac{\pi}{2}; \quad \theta = \eta + \frac{\pi}{2}, \ \varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} 16 m l \ddot\eta - 6 m r \ddot\psi \cos(\eta - \psi) + 6 m r \dot\psi^2 \sin(\eta - \psi) + 3 h \sin\eta + 3 k^2 r \sin(\eta - \psi) = 0 \\ 3 m r \ddot\psi - 4 m l \ddot\eta \cos(\eta - \psi) + 4 m l \dot\eta^2 \sin(\eta - \psi) - 2 k^2 l \sin(\eta - \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 m l \ddot\eta - 6 m r \ddot\psi + 3(h + k^2 r)\eta - 3 k^2 r \psi = 0 \\ 4 m l \ddot\eta - 3 m r \ddot\psi + 2 k^2 l \eta - 2 k^2 l \psi = 0 \end{cases}$$

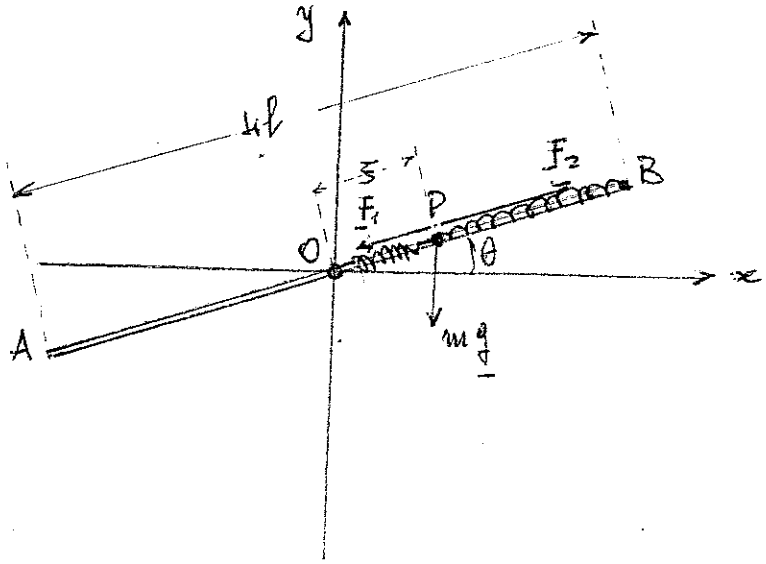
$$\begin{cases} \eta = A \cos(\omega t + \alpha) \\ \psi = B \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3h + 3k^2 r - 16 m l \omega^2) A + (6 m r \omega^2 - 3 k^2 r) B = 0 \\ (2 k^2 l - 4 m l \omega^2) A + (3 m r \omega^2 - 2 k^2 l) B = 0 \end{cases}$$

COMPITO DI MECCANICA RAZIONALE (Per studenti di Fisica e di Matematica)
(10 Luglio 2003)

Un'asta rigida $AB$, di lunghezza $4l$ e massa trascurabile, puo' ruotare nel piano verticale $Oxy$ attorno all'asse orizzontale $z$ passante per il suo punto medio $O$. Un punto $P$, di massa $m$, e' vincolato a muoversi lungo l'asta ed e' attratto dai punti $O$ e $B$ mediante le forze elastiche di uguale costante $\bar{F}_1 = -\frac{mg}{4l}(P-O)$ e $\bar{F}_2 = -\frac{mg}{4l}(P-B)$.

1) Trovare le posizioni di equilibrio del sistema e dimostrare che una di esse e' stabile;
2) Scrivere le equazioni del moto nella forma di Lagrange;
3) Verificare che e' possibile un particolare movimento del punto lungo l'asta ferma in posizione verticale e determinarlo;
4) Studiare le piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

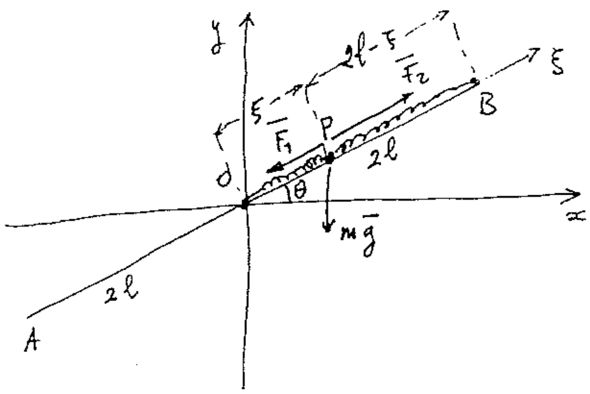



$-2l \leq \xi \leq 2l$

$0 \leq \theta < 2\pi$

oppure $[-\pi < \theta \leq \pi]$

## Compito di Meccanica Razionale




$$\overline{F_1} = -\frac{mg}{4\ell}(P-O) \quad , \quad \overline{F_2} = -\frac{mg}{4\ell}(P-B)$$

$$-2\ell \le \xi \le 2\ell \quad , \quad -\pi < \theta \le \pi \ \text{ oppure } \ 0 \le \theta < 2\pi$$

Il sistema ha 2 gradi di libertà perché per determinare una sua generica configurazione bastano le due coordinate $(\xi, \theta)$ (cfr. figura).

### 1) EQUILIBRIO E STABILITÀ

Il potenziale delle forze in gioco è:

$$\boxed{U(\xi,\theta) = -mg\,\xi\sin\theta - \frac{mg}{8\ell}\xi^2 - \frac{mg}{8\ell}(2\ell-\xi)^2} = -mg\xi\sin\theta - \frac{mg}{4\ell}\xi^2 + \frac{mg}{2}\xi =$$

$$= -mg\xi\sin\theta - \frac{mg}{4\ell}(\xi^2 - 2\ell\xi).$$

$$U_\xi = -mg\sin\theta - \frac{mg}{4\ell}\xi + \frac{mg}{4\ell}(2\ell-\xi)$$

$$U_\theta = -mg\,\xi\cos\theta$$

$$\begin{cases} U_\xi = 0 \\ U_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\left[-4\ell\sin\theta - \xi + 2\ell - \xi\right] = 0 \Rightarrow 2\xi = 2\ell - 4\ell\sin\theta \Rightarrow \xi = \ell(1-2\sin\theta) \\ -mg\,\xi\cos\theta = 0 \quad < \quad \xi = 0 \ ; \ \cos\theta = 0 < \theta = +\frac{\pi}{2},\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

~~per $\xi = 0$~~ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \xi = \ell(1-2\sin\theta) \\ \xi = 0 \end{cases} \ ; \ \begin{cases} \xi = \ell(1-2\sin\theta) \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \ ; \ \begin{cases} \xi = \ell(1-2\sin\theta) \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xi = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \text{ cioè } < \theta = \frac{\pi}{6},\ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \xi = -\ell \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = 3\ell \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ da scartare}$$

Le posizioni di equilibrio sono tre :

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases}\xi = 0\\ \theta = \dfrac{\pi}{6}\end{cases} ; \quad (\mathrm{II})\ \begin{cases}\xi = 0\\ \theta = \dfrac{5}{6}\pi\end{cases} ; \quad (\mathrm{III})\ \begin{cases}\xi = -l\\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Studiamo ora la stabilità di queste posizioni di equilibrio.

$$U_{\xi\xi} = -\frac{mg}{4l} - \frac{mg}{4l} = -\frac{mg}{2l} \; ; \quad U_{\xi\theta} = U_{\theta\xi} = -mg\cos\theta$$

$$U_{\theta\theta} = mg\xi\sin\theta$$

Calcoliamo l'Hessiano :

$$H(\xi,\theta) = \begin{vmatrix} U_{\xi\xi} & U_{\xi\theta} \\ U_{\theta\xi} & U_{\theta\theta} \end{vmatrix} = U_{\xi\xi}U_{\theta\theta} - U_{\xi\theta}^2 = -\frac{m^2g^2}{2l}\xi\sin\theta - m^2g^2\cos^2\theta$$

$$H\left(0,\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{4}m^2g^2$$

Essendo $U_{\xi\xi} < 0$, $H\left(0,\frac{\pi}{6}\right) < 0$ la posizione $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ non è di max per il potenziale $U$ perciò tale posizione è di equilibrio instabile per il 1° Teor. di Liapounov.

$$H\left(0,\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3}{4}m^2g^2$$ : in questo caso si ha ancora instabilità.

$$H\left(-l,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{m^2g^2}{2} > 0$$ in questo caso si ha stabilità.

Perciò l'unica posizione di equilibrio stabile è $\left(-l,\frac{\pi}{2}\right)$.

## 2) EQUAZIONI LAGRANGIANE DEL MOTO.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\begin{cases} x = \xi \cos\theta \\ y = \xi \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\xi}\cos\theta - \xi \sin\theta\, \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{\xi}\sin\theta + \xi\cos\theta\, \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 \cos^2\theta + \xi^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 - \cancel{2\xi\dot{\xi}\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}} +$$
$$+ \dot{\xi}^2 \sin^2\theta + \xi^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \cancel{2\xi\dot{\xi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \left( \dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\theta}^2 \right),$$

$$\mathcal{L} = T + \mathcal{U} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\theta}^2\right) - mg\xi\sin\theta - \frac{mg}{8\ell}\xi^2 - \frac{mg}{8\ell}(2\ell - \xi)^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = m\ddot{\xi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = m\xi\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta - \frac{mg}{4\ell}\xi + \frac{mg}{4\ell}(2\ell - \xi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(m\xi^2\dot{\theta}) = 2m\xi\dot{\xi}\dot{\theta} + m\xi^2\ddot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg\xi\cos\theta$$

Equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - \xi\dot{\theta}^2 + \frac{g}{4\ell}\xi - \frac{g}{4\ell}(2\ell - \xi) + g\sin\theta = 0 \iff \ddot{\xi} - \xi\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2\ell}\xi + g\sin\theta - \frac{g}{2} = 0 \\ 2\xi\dot{\xi}\dot{\theta} + \xi^2\ddot{\theta} + g\xi\cos\theta = 0 \end{cases}$$

per $\xi \neq 0$ $\quad 2\dot{\xi}\dot{\theta} + \xi\ddot{\theta} + g\cos\theta = 0$

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\xi} + \left(\frac{g}{2\ell} - \dot{\theta}^2\right)\xi + g\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \xi\left(2\dot{\xi}\dot{\theta} + \xi\ddot{\theta} + g\cos\theta\right) = 0 \end{cases}}$$

## 3) PARTICOLARE MOVIMENTO CON L'ASTA VERTICALE.

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ (asta verticale) la 2ª equazione di Lagrange è identicamente soddisfatta, mentre la 1ª ci dà:

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{2\ell}\xi + \frac{g}{2} = 0 \quad , \quad \text{perciò avremo:}$$

$\xi + \ell = z$, $\dot{\xi} = \dot{z}$, $\ddot{\xi} = \ddot{z}$

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{2\ell}(\xi + \ell) = 0 \quad , \text{ da cui: } \longrightarrow \ddot{z} + \frac{g}{2\ell} z = 0$$

$\frac{g}{2\ell} = \omega^2$

$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{2\ell}}$

$$\xi + \ell = C \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\, t + \gamma\right) \quad , \text{ cioè:}$$

$z$

$$\boxed{\xi = C \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\, t + \gamma\right) - \ell} \quad , \quad \underline{C, \gamma \text{ cost. arbitrarie}}$$

Le costanti arbitrarie $C, \gamma$ si determinano tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \xi_0 = C \cos\gamma - \ell \\ \dot{\xi}_0 = -C\sqrt{\frac{g}{2\ell}} \sin\gamma . \end{cases}$$

---

## 4) PICCOLE OSCILLAZIONI ATTORNO ALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE $\left(\xi = -\ell, \ \theta = \frac{\pi}{2}\right)$.

Facciamo il cambio di variabili:

$$\begin{cases} \eta = \xi + \ell \\ \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ in modo che la posizione di equilibrio diventi $(0,0)$.

L'energia cinetica diventa:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\eta}^2 + (\eta - \ell)^2 \dot{\varphi}^2\right]$$

$$\boxed{T^* = \frac{1}{2} m \left( \dot{\eta}^2 + \ell^2 \dot{\varphi}^2 \right)}$$

Nelle nuove coordinate il potenziale diventa:

$$\mathcal{U}(\eta,\varphi) = -mg(\eta-\ell)\cos\varphi - \frac{mg}{8\ell}(\eta-\ell)^2 - \frac{mg}{8\ell}(3\ell-\eta)^2 \qquad \cos\varphi \simeq 1-\frac{\varphi^2}{2}$$

Sviluppando in serie di Mac-Laurin intorno al punto $\eta=0$, $\varphi=0$, e trascurando i termini di ordine superiore a 2 in $\eta,\varphi$ si deve avere un'espressione del tipo:

$$\mathcal{U}^*(\eta,\varphi) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \eta^2}\right)_{(0,0)}\eta^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial\eta\partial\varphi}\right)_{(0,0)}\eta\varphi + \left(\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\varphi^2}\right)_0\varphi^2\right].$$

Calcoliamo le derivate seconde di $\mathcal{U}(\eta,\varphi)$:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = -mg\cos\varphi - \frac{mg}{4\ell}(\eta-\ell) + \frac{mg}{4\ell}(3\ell-\eta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = mg(\eta-\ell)\sin\varphi$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \eta^2}\right)_{(0,0)} = -\frac{mg}{2\ell}, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial\eta\partial\varphi}\right)_{(0,0)} = mg\sin\varphi, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial\varphi^2}\right)_{(0,0)} = mg(\eta-\ell)\cos\varphi$$

Perciò si ha:

$$\mathcal{U}^*(\eta,\varphi) = \frac{1}{2}\left[-\frac{mg}{2\ell}\eta^2 - mg\ell\varphi^2\right] = -\frac{mg}{2}\left(\frac{\eta^2}{2\ell} + \ell\varphi^2\right)$$

$$\boxed{\mathcal{U}^*(\eta,\varphi) = -\frac{mg}{2}\left(\frac{1}{2\ell}\eta^2 + \ell\varphi^2\right)}$$

Le equazioni delle piccole oscillazioni sono dunque:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial \dot{\eta}} - \dfrac{\partial T^*}{\partial \eta} = \dfrac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T^*}{\partial \dot{\varphi}} - \dfrac{\partial T^*}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{m}\,\ddot{\eta} = -\dfrac{\cancel{m}g}{2l}\eta \\ \cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} = -\cancel{m}g\cancel{l}\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{\eta} + \dfrac{g}{2l}\eta = 0 \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\varphi = 0 \end{cases}}$$

EQUAZIONI DELLE PICCOLE OSCILL.

Le Frequenze fondamentali sono:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

---

Osservazione. Le coordinate $\eta, \varphi$ sono coordinate normali e perciò, in queste variabili, ~~le equazioni di moto sono~~ le piccole oscillazioni sono ~~...~~ la composizione di due moti armonici semplici –