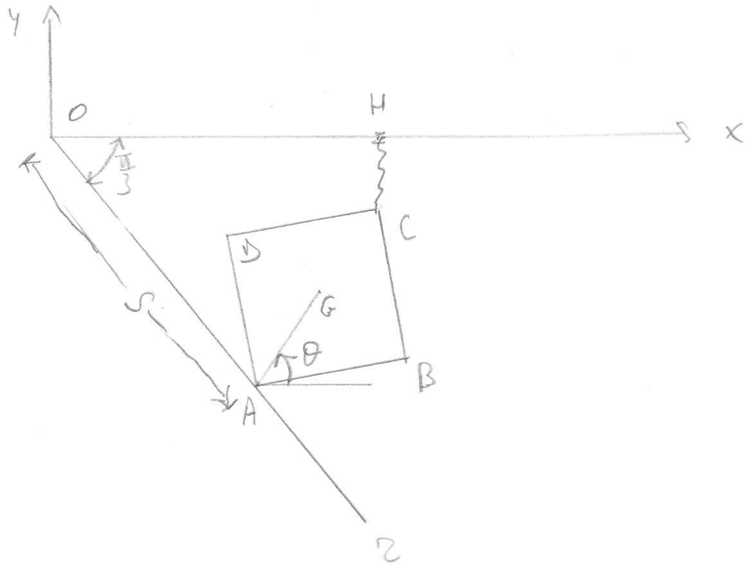
Compito di Meccanica Razionale

In un piano verticale è posta una lamina quadrata $ABCD$ di massa m e lato l, col vertice A vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea r passante per l'origine e inclinata di un angolo $\frac{\pi}{3}$ rispetto all'asse delle x. Una molla di costante elastica $k = \sqrt{2}\,\frac{mg}{l}$ collega il vertice C della lamina col pattino H, scorrevole lungo l'asse delle x in modo da mantenere la molla verticale.

Scegliendo le coordinate libere θ e s come in figura, si chiede di determinare:

1) Le equazioni del moto del sistema.
2) Le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità.
3) La frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.
4) La reazione vincolare in A all'equilibrio.



1) $\overline{OG} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\theta + \frac{s}{2}\right)\overline{e_1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l \operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} s\right)\overline{e_2}$

$\overline{v_G} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} l \operatorname{sen}\theta\,\dot\theta + \frac{\dot s}{2}\right)\overline{e_1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\theta\,\dot\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot s\right)\overline{e_2}$

$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} m\left[\dot s^2 + \frac{l^2}{2}\dot\theta^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} l (\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\dot s\dot\theta\right] + \frac{ml^2}{12}\dot\theta^2$

$= \frac{1}{2} m\dot s^2 + \frac{1}{3} m l^2\dot\theta^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} m l (\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\dot s\dot\theta$

$\overline{HC} = \left(\sqrt{2}\, l \operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} s\right)\overline{e_2}$

$V = mg\,y_G + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{l}|HC|^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} mg\, l \operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} mg\, s + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{mg}{l}\left(\frac{3}{4}s^2 + 2l^2\operatorname{sen}^2\theta - \sqrt{6}\, l s \operatorname{sen}\theta\right)$

$= mg\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{s^2}{l} - \frac{\sqrt{3}}{2} s - \sqrt{3}\, s \operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} l \operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\, l \operatorname{sen}^2\theta\right)$

2) $V_s = mg\left[\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{s}{l} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 2\operatorname{sen}\theta)\right] = 0$ $\qquad s = \frac{\sqrt{6}}{3} l (1 + 2\operatorname{sen}\theta)$

$V_\theta = mg\left[2\sqrt{2}\, l \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\theta - \sqrt{3}\, s\cos\theta\right] = 0$

$\cancel{2\sqrt{2} l \operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\theta - \sqrt{2}\, l\cos\theta - \cancel{2\sqrt{2} l \operatorname{sen}\theta\cos\theta} = 0 \rightarrow \cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \quad s = \sqrt{6}\, l \qquad \theta = -\frac{\pi}{2} \quad s = -\frac{\sqrt{6}}{3} l$

$V_{ss} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{mg}{l} > 0 \qquad V_{\theta\theta} = mg\left[2\sqrt{2}\, l (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - \frac{\sqrt{2}}{2} l \operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\, s \operatorname{sen}\theta\right] \qquad V_{s\theta} = -\sqrt{3}\, mg\cos\theta$

$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} mgl & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} mgl \end{pmatrix} > 0$ stabile $\qquad H\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} mgl & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} mgl \end{pmatrix} < 0$ instabile

3) $A = \begin{pmatrix} m & -\frac{\sqrt{2}}{4} ml \\ \frac{\sqrt{2}}{4} ml & \frac{2}{3} ml^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{mg}{l} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} mgl \end{pmatrix}$

$\det(C - \omega^2 A) = 0 \qquad \omega^2 = \frac{3\sqrt{2}(4 \pm \sqrt{3})}{13}\frac{g}{l}$

4) $\overline{\phi} + m\overline{g} + \sqrt{2}\frac{mg}{l}\overline{CH} = 0 \qquad \overline{\phi} = -mg + \sqrt{2}\frac{mg}{l}\left(\sqrt{2}\, l - \frac{2\sqrt{2}}{2} l\right) = -mg$