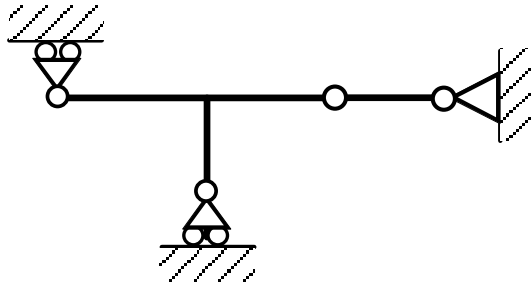


ESERCIZI SVOLTI O CON TRACCIA DI SOLUZIONE SU

LABILITA' DI STRUTTURE



$2n-1 = 1$

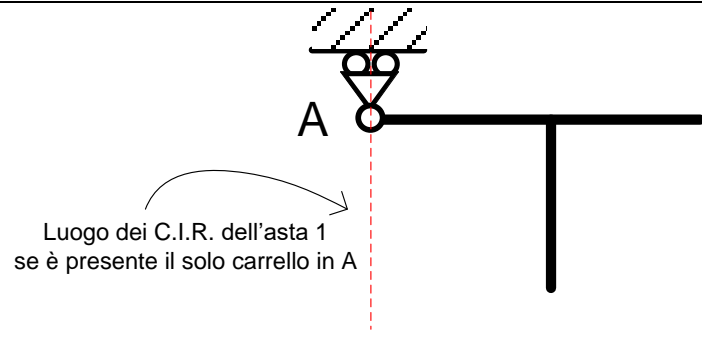
$2n = 2$

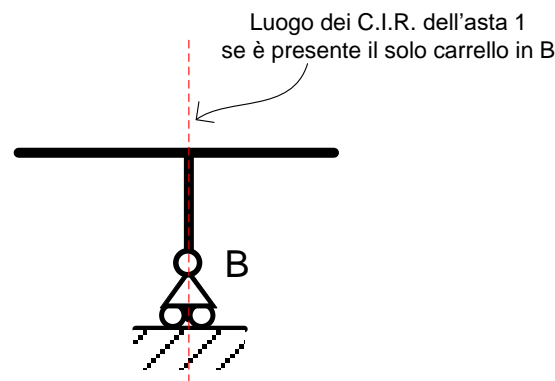
$2(n-1) = 2$
 $2n-1 = 1$

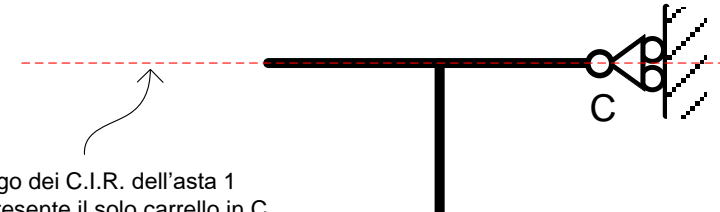
Numero totale di aste $N = 2$
 GdL (gradi di libertà aste libere) $= N \cdot 3 = 6$
 GdV (gradi di vincolo imposti) $= 1+1+2+2 = 6$
STRUTTURA ISOSTATICA

<p>Dal punto di vista delle possibilità di moto dell'asta 1, la parte di struttura CD può essere sostituita con un carrello avente direzione di traslazione ortogonale alla direzione CD.</p>	
---	--

I possibili centri di istantanea rotazione (C.I.R.) dell'asta 1 schematizzata nella figura precedente, se si eliminano volta per volta tutti i vincoli a terra tranne uno, sono i seguenti:

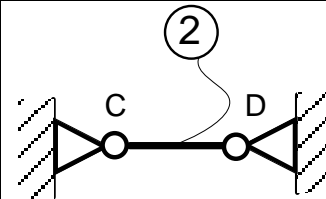
<p>- Mantenendo il solo vincolo in A.</p>	 <p>Luogo dei C.I.R. dell'asta 1 se è presente il solo carrello in A</p>
---	--

<p>- Mantenendo il solo vincolo in B.</p>	 <p>Luogo dei C.I.R. dell'asta 1 se è presente il solo carrello in B</p>
---	--

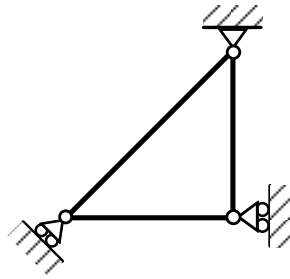
<p>- Mantenendo il solo vincolo in C.</p>	 <p>Luogo dei C.I.R. dell'asta 1 Se è presente il solo carrello in C</p>
---	--

Se si considera l'azione contemporanea di tutti i tre vincoli, poiché non esiste un punto in comune alle tre rette, si giunge alla conclusione che l'asta 1 è NON labile e tutti i suoi punti, compresa la cerniera C, si possono considerare fissi.

Anche l'asta 2 e' quindi NON labile, poiché si può considerare vincolata nella maniera seguente:



Poiché tutte le aste del sistema (aste 1 e 2) sono non labili, la struttura è NON LABILE.



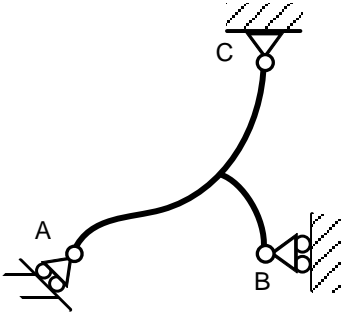
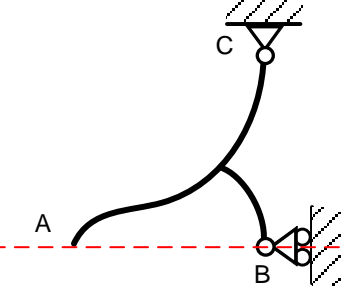
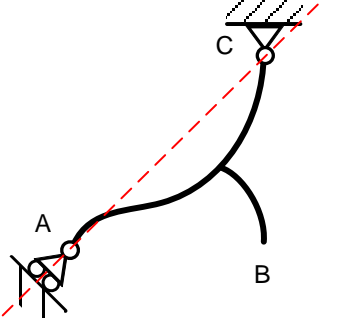
$2n = 4$
 (n = numero di aste che convergono nella cerniera)

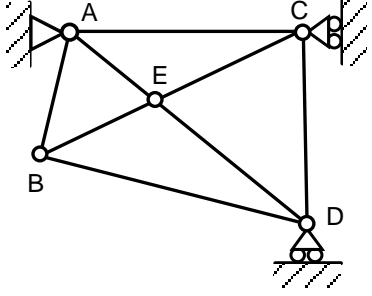
$2n-1 = 3$

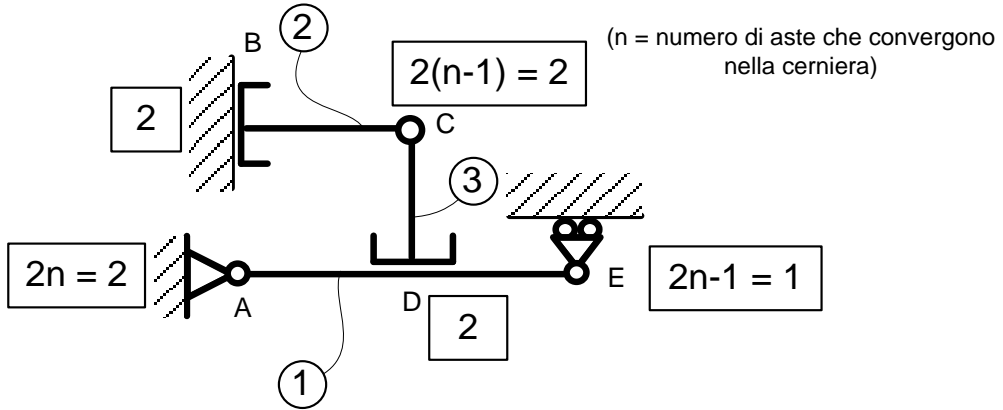
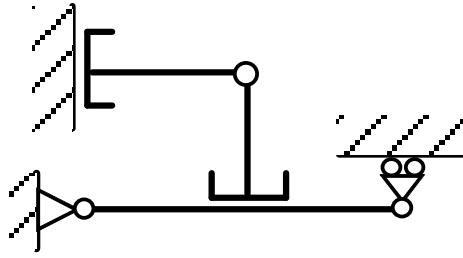
$2n-1 = 3$

Numero totale di aste $N = 3$
 GdL (gradi di libertà aste libere) = $N \cdot 3 = 9$
 GdV (gradi di vincolo imposti) = $3+3+4 = 10$
STRUTTURA 1 VOLTA IPERSTATICA

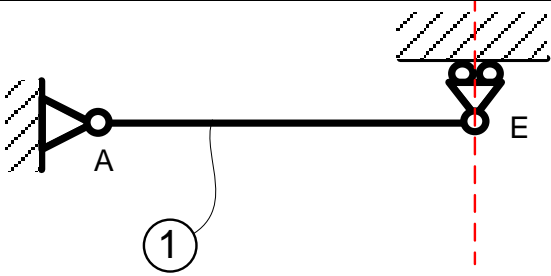
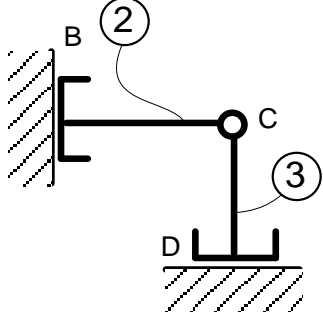
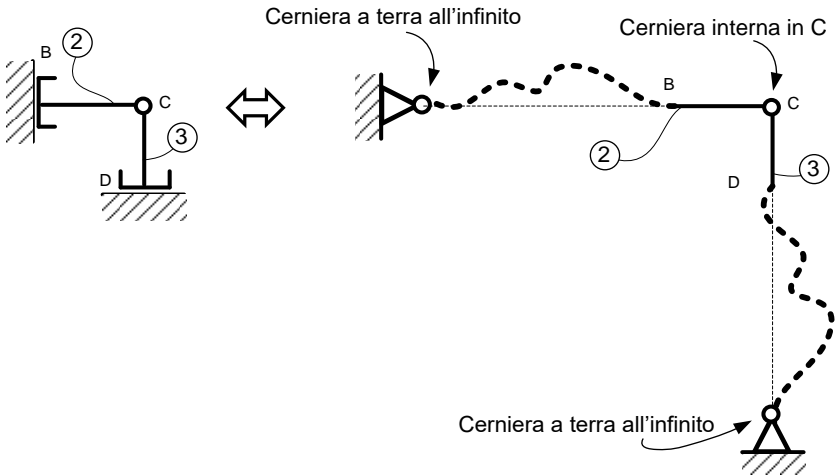
Il sistema ABC è un arco a tre cerniere chiuso con le cerniere non allineate. Si può dunque considerare un unico corpo rigido

<p>Dal punto di vista cinematico la struttura è quindi equivalente ad un unico corpo rigido vincolato a terra dai carrelli a terra in A e B e dalla cerniera a terra in C.</p>	
<p>Si vede che i movimenti del corpo rigido sono completamente bloccati dalla sola presenza della cerniera a terra in C e del carrello a terra in B. (sistema cerniera + carrello ben posto; la retta tratteggiata non passa per la cerniera C).</p> <p>La struttura è quindi NON LABILE.</p>	
<p>Si noti che se si considera il corpo rigido vincolato solamente dalla cerniera a terra in C e dal carrello a terra in A, il sistema è LABILE (il luogo dei C.I.R. del corpo rigido vincolato dal solo carrello in A e' una retta che passa per la cerniera C; il corpo rigido ammette quindi il punto C come centro di istantanea rotazione).</p> <p>Ovviamente, la presenza anche del carrello a terra in B rende la struttura reale NON LABILE.</p>	

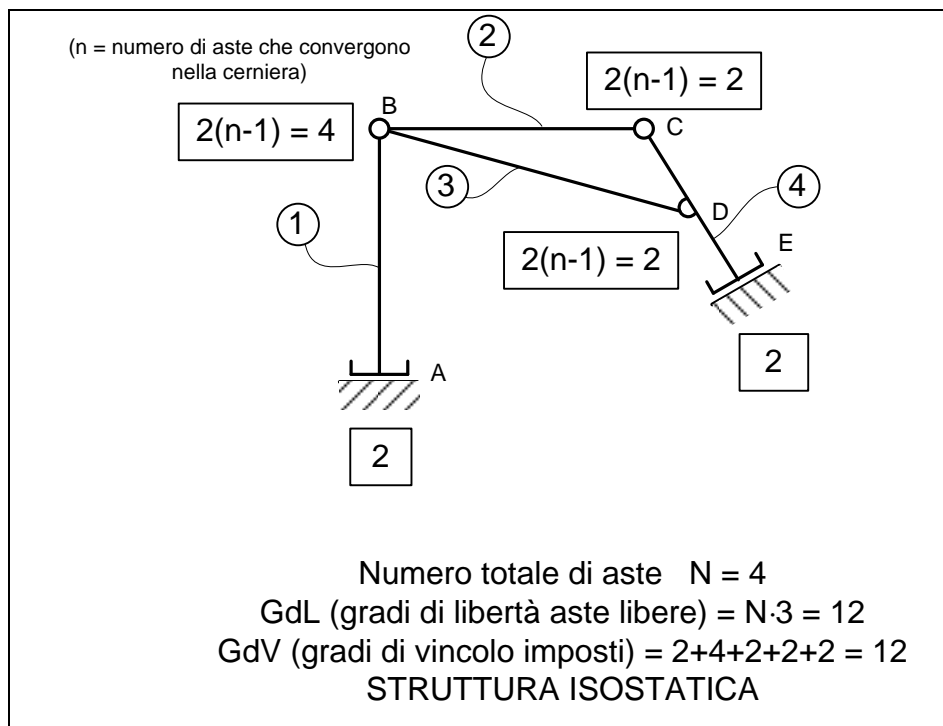
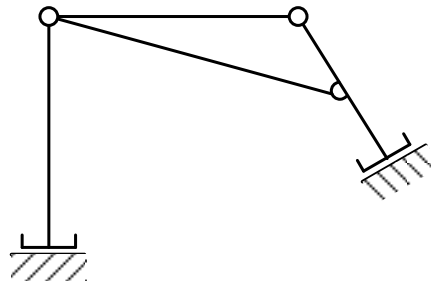
<p>La struttura riportata a fianco si esamina con una procedura sostanzialmente analoga a quella sopra illustrata.</p> <p>Il sistema ABCD è composto dall'assemblaggio di più archi a tre cerniere chiusi ed aventi le cerniere non allineate (ad esempio AEB; EBD; EDC; AEC). Si tratta quindi di un unico corpo rigido vincolato con una cerniera a terra in A, un carrello a terra in C ed un carrello a terra in D.</p> <p>La cerniera a terra in A ed il carrello a terra in D vincolano in maniera completa il corpo rigido.</p> <p>La struttura è NON LABILE.</p>	 <p style="text-align: center;">Prova intermedia 15 Novembre 2012</p>
--	---

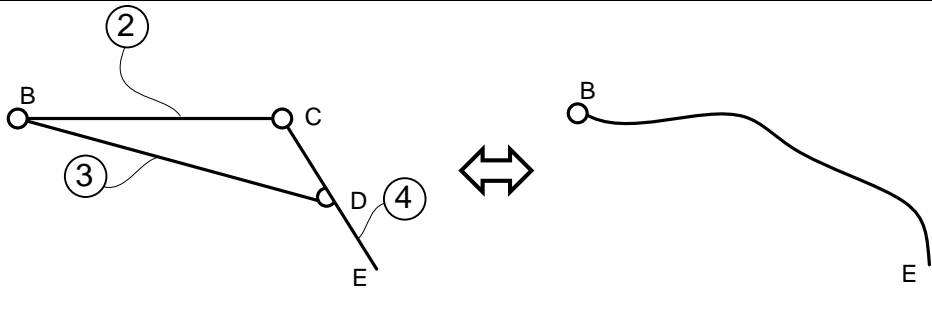
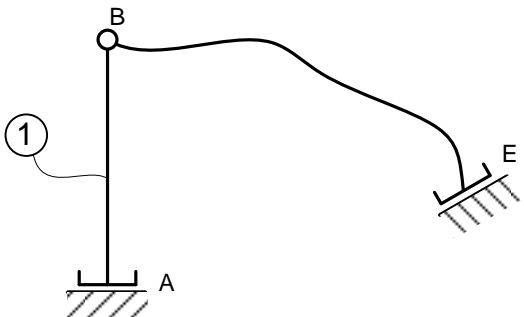
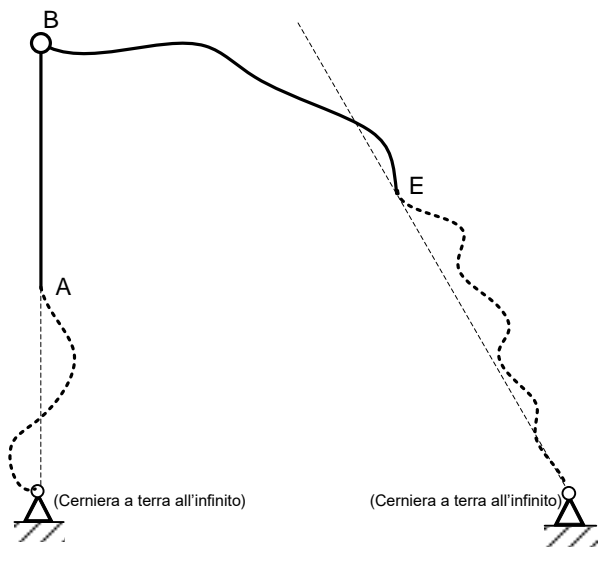


Numero totale di aste $N = 3$
 GdL (gradi di libertà aste libere) $= N \cdot 3 = 9$
 GdV (gradi di vincolo imposti) $= 2+2+2+2+1 = 9$
STRUTTURA ISOSTATICA

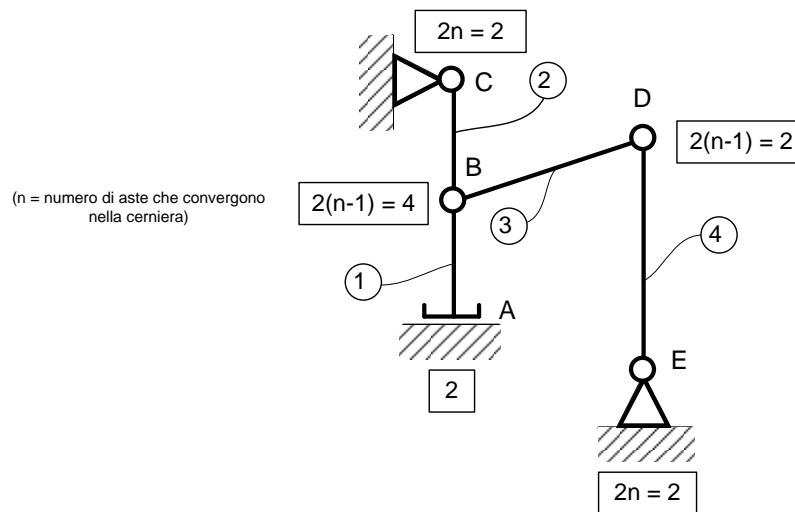
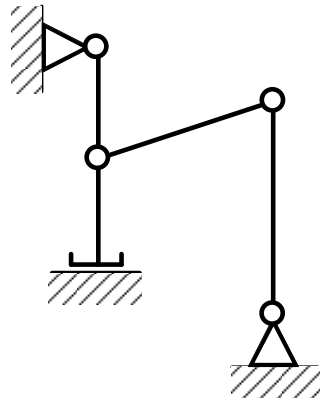
<p>La parte di struttura composta dalla sola asta 1, vincolata in A con una cerniera a terra ed in E con un carrello a terra. È NON labile (sistema cerniera + carrello ben posto). Tutti i suoi punti, incluso il punto D in cui è presente il pattino interno dell'asta 3, sono quindi fissi.</p>	
<p>La parte di struttura composta dalle aste 2 e 3 può quindi essere così schematizzata dal punto di vista delle possibilità di moto.</p>	
<p>I pattini a terra possono essere considerati equivalenti a due cerniere a terra poste all'infinito (nelle direzioni ortogonali alle direzioni di scorrimento dei pattini). Il sistema composto dalle aste 2 e 3 è pertanto equivalente ad un arco a tre cerniere, con due cerniere a terra (poste all'infinito) ed una cerniera interna (cerniera C). Poiché <u>le tre cerniere non sono allineate</u>, anche le aste 2 e 3 sono fisse. La struttura completa (composta dalle aste 1, 2 e 3) è pertanto NON LABILE.</p>	

Prova intermedia del 15 Novembre 2012

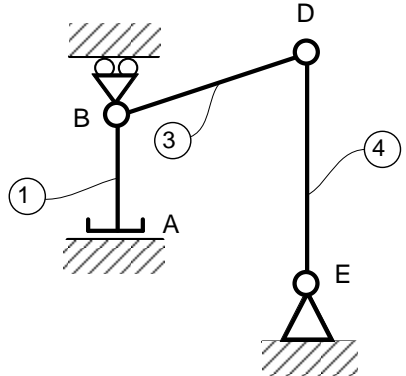
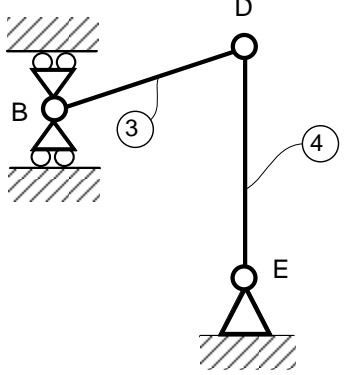
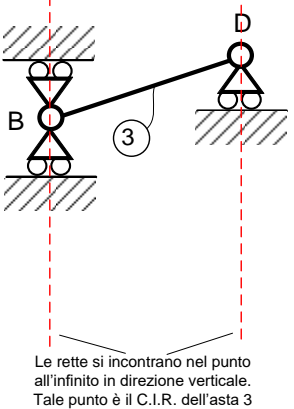


<p>La parte di struttura BCDE composta dalle aste 2,3 e 4 costituisce un arco a tre cerniere chiuso con le tre cerniere non allineate. L'insieme delle tre aste 2,3 e 4 può essere quindi considerato come un unico corpo rigido.</p>	
<p>Dal punto di vista delle possibilità di moto, la struttura può allora essere schematizzata nella maniera riportata a fianco, vincolata a terra con due pattini.</p>	
<p>Ricordando che un pattino è cinematicamente equivalente ad una cerniera all'infinito (nella direzione ortogonale al piano di scorrimento del pattino), il sistema è equivalente ad un arco a tre cerniere con due cerniere a terra (all'infinito) ed una cerniera interna (in B). Poiché le cerniere non sono allineate, il sistema, così come tutta la struttura, è NON LABILE.</p>	

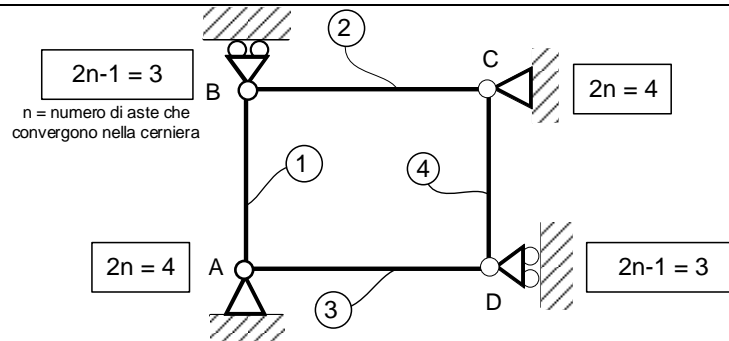
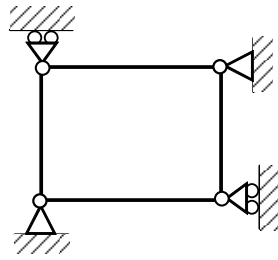
Prova intermedia del 15 Novembre 2012



Numero totale di aste $N = 4$
 GdL (gradi di libertà aste libere) $= N \cdot 3 = 12$
 GdV (gradi di vincolo imposti) $= 2+4+2+2+2 = 12$
STRUTTURA ISOSTATICA

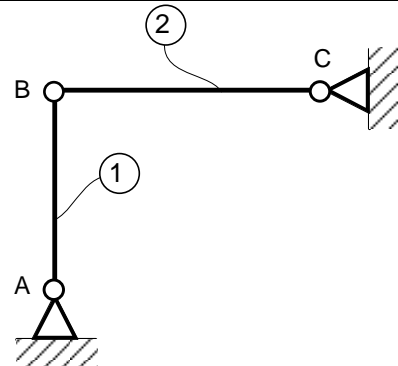
<p>Il vincolo esercitato dall'asta CB sull'asta 3 può essere sostituito da un carrello scorrevole su un piano orizzontale.</p>	
<p>Il vincolo esercitato dall'asta AB sull'asta 3 può essere sostituito da un carrello scorrevole su un piano orizzontale (ricordando che il pattino è equivalente ad una cerniera all'infinito nella direzione ortogonale al piano di scorrimento del pattino)</p>	
<p>Il vincolo esercitato dall'asta ED sull'asta 3 può essere sostituito da un carrello scorrevole su un piano orizzontale. Si vede quindi che l'asta 3 può traslare in direzione orizzontale. La struttura è LABILE</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 3 è il punto all'infinito in direzione verticale (e' l'intersezione delle rette tratteggiate di figura)</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 1 è il punto all'infinito in direzione verticale (l'asta infatti può traslare in direzione orizzontale).</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 2 è la cerniera C.</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 4 è la cerniera E.</p>	 <p>Le rette si incontrano nel punto all'infinito in direzione verticale. Tale punto è il C.I.R. dell'asta 3</p>

Prova intermedia del 23 Novembre 2011

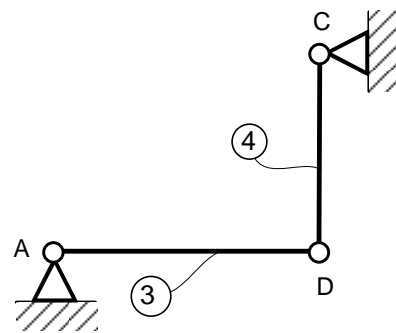


Numero totale di aste $N = 4$
 GdL (gradi di libertà aste libere) = $N \cdot 3 = 12$
 GdV (gradi di vincolo imposti) = $3+4+3+4 = 14$
STRUTTURA 2 VOLTE IPERSTATICA

Il sistema costituito dalle aste 1 e 2, considerando le sole cerniere a terra in A e C, è un arco a tre cerniere non allineate (2 cerniere fisse in A e C; una cerniera interna in B) e quindi non labile. Tutti i punti delle aste 1 e 2 sono quindi fissi, inclusa la cerniera B.

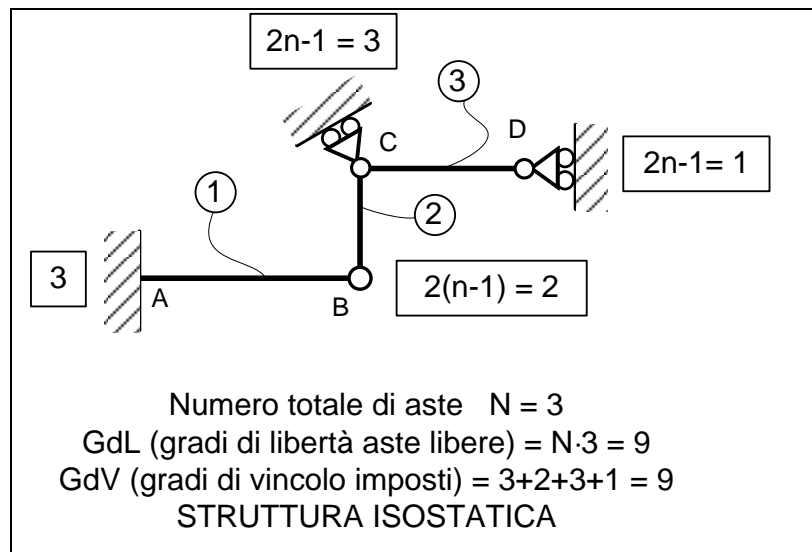
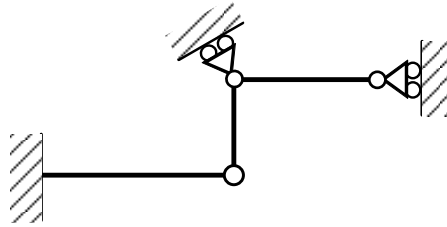


Il sistema costituito dalle aste 3 e 4, considerando le sole cerniere a terra in A e C, è un arco a tre cerniere non allineate (2 cerniere fisse in A e C; una cerniera interna in D) e quindi non labile.



Tutti i punti delle aste 1,2,3 e 4 sono fissi e pertanto la struttura è **NON LABILE**.

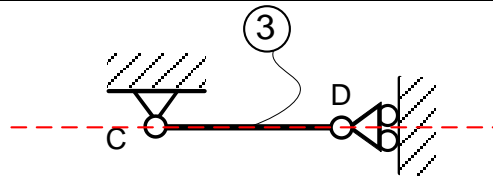
Prova intermedia del 23 Novembre 2011



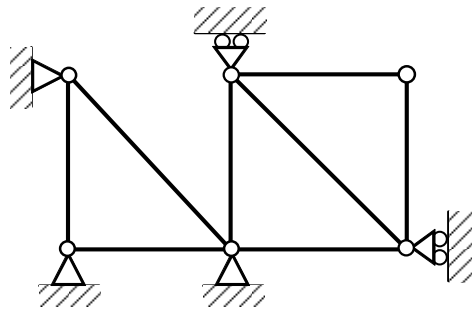
<p>L'asta 1 è incastrata in A; tutti i suoi punti (inclusa la cerniera B) sono quindi fissi.</p>	
<p>Dal punto di vista cinematico, la cerniera B può quindi essere considerata come una cerniera a terra. Anche l'asta 2 è dunque non labile essendo vincolata in B da una cerniera fissa ed in A da un carrello ben posto (la retta che rappresenta i possibili C.I.R. dell'asta 2 nel caso fosse vincolata dal solo carrello in C non passa per la cerniera B. Essendo l'asta 2 non labile anche il carrello C può essere considerato fisso (e quindi schematizzato come una cerniera fissa).</p>	

Le possibilità di moto dell'asta 3 sono allora quelle schematizzate nella figura riportata a fianco, e cioè quelle di un'asta vincolata mediante cerniera a terra in C e carrello in D. Il carrello in D ha tuttavia un piano di scorrimento tale che il luogo dei C.I.R. dell'asta 3, se questa fosse vincolata dal solo carrello in D, è una retta che passa per la cerniera C. L'asta 3 ammette come C.I.R. il punto C, cioè può ruotare, sia pure con rotazione infinitesima, attorno alla cerniera C.

La struttura è quindi **LABILE**, poiché, seppure le aste 1 e 2 non ammettano alcun C.I.R. (e quindi siano non labili), l'asta 3 può invece ruotare attorno alla cerniera del carrello in C (C.I.R. dell'asta 3).



Prova intermedia del 23 Novembre 2011



$2n-1 = 5$ $n =$ numero di aste che convergono nella cerniera

$2n = 4$

$2n = 4$

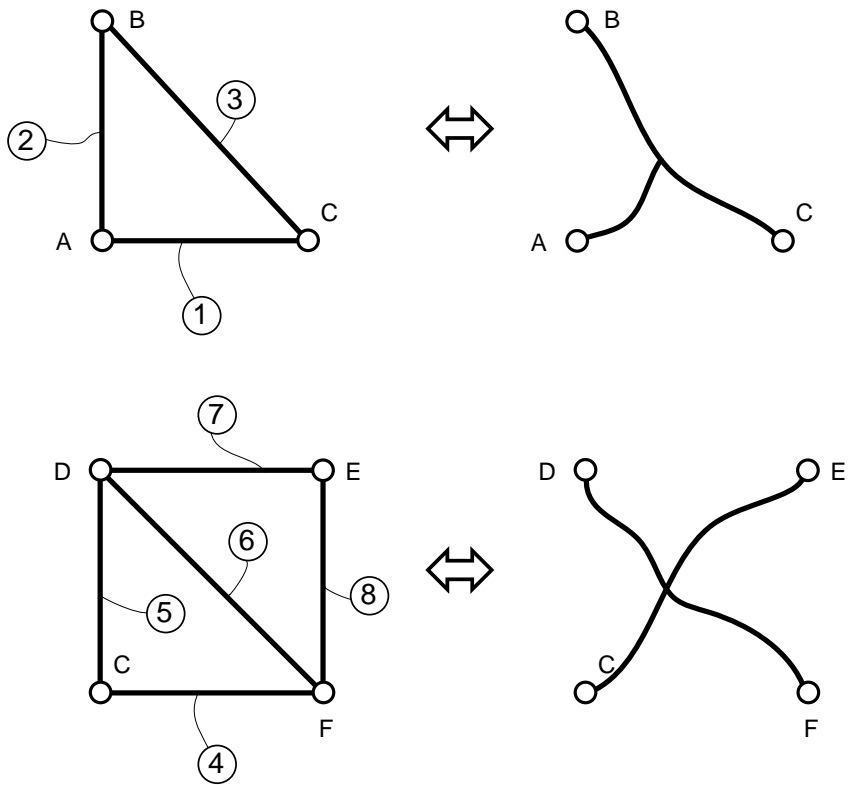
$2n = 8$

$2n-1 = 5$

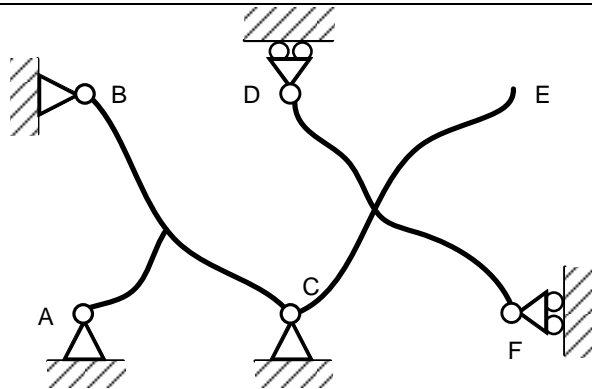
$2(n-1) = 2$

Numero totale di aste $N = 8$
 GdL (gradi di libertà aste libere) $= N \cdot 3 = 24$
 GdV (gradi di vincolo imposti) $= 4+4+8+5+2+5 = 28$
STRUTTURA 4 VOLTE IPERSTATICA

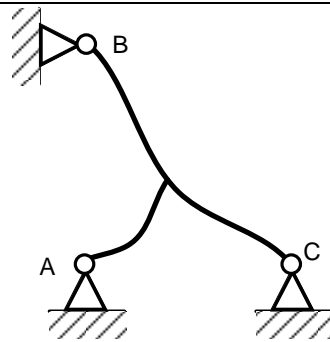
I sistemi costituiti dalle aste 1,2 e 3 e dalle aste 4,5,6,7, e 8 sono archi a tre cerniere chiusi o assemblaggi di archi a tre cerniere chiusi. Entrambi possono essere quindi considerati corpi rigidi (come nella schematizzazione riportata a lato).



La cinematica della struttura può essere quindi rappresentata dalla seguente struttura, costituita da due soli corpi rigidi (ABC e CDEF).

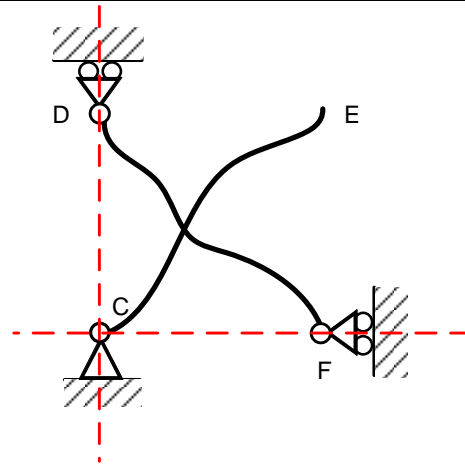


Il corpo rigido ABC è chiaramente non labile essendo vincolato da tre cerniere a terra.



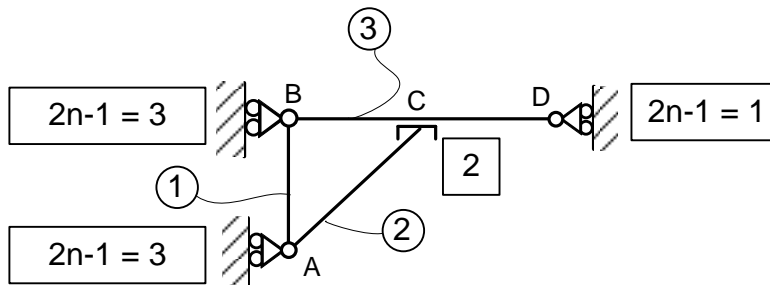
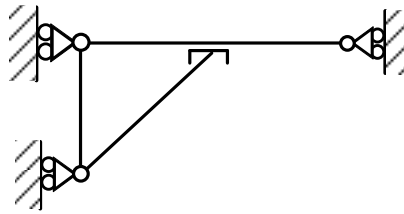
Il corpo rigido CDEF è vincolato a terra con una cerniera a terra in C e con due carrelli, rispettivamente in D ed F. Le rette dei possibili C.I.R. del corpo rigido CDEF, se esso fosse vincolato con il solo carrello in D (retta verticale tratteggiata) o con il solo carrello in F (retta orizzontale tratteggiata) passano per la cerniera C.

Il corpo rigido CDEF ammette quindi il punto C come C.I.R. quando si considera la presenza simultanea di tutti i i vincoli. Ciò vuol dire che il corpo rigido CDEF può ruotare (con rotazioni infinitesime) intorno alla cerniera a terra C.



In conclusione, la struttura è LABILE. Le aste 1, 2 e 3 non ammettono alcun C.I.R. (e quindi sono fisse). Le aste 4,5,6,7,8 ammettono un C.I.R. in C (e quindi possono ruotare attorno alla cerniera a terra in C).

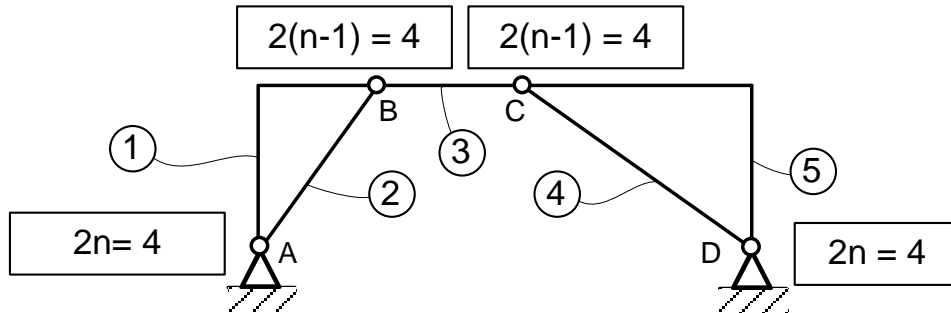
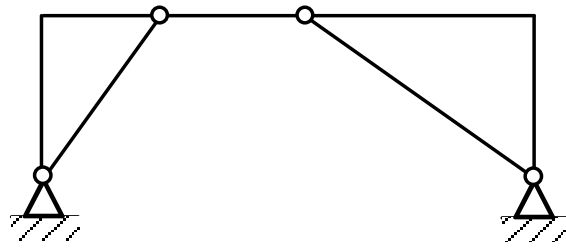
Prova intermedia del 24 Novembre 2010



Numero totale di aste $N = 3$
 GdL (gradi di libertà aste libere) = $N \cdot 3 = 9$
 GdV (gradi di vincolo imposti) = $3+3+1+1 = 9$
STRUTTURA ISOSTATICA

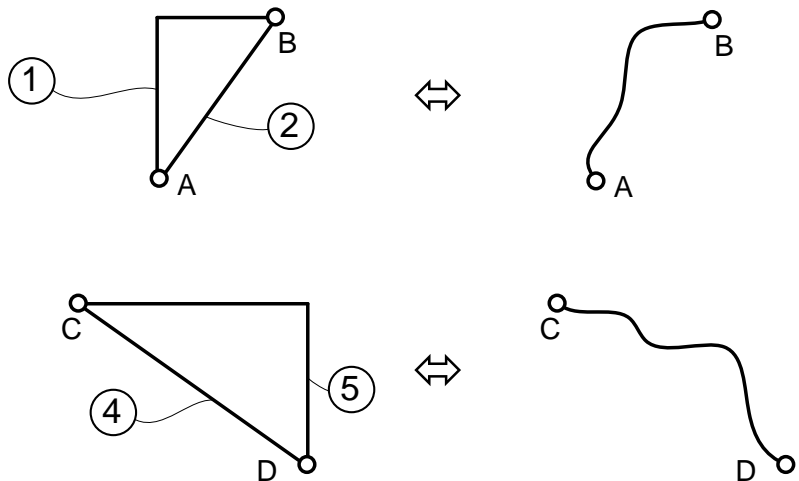
<p>Il sistema costituito dalle aste 1,2 e 3 è un arco a 3 cerniere chiuso, e pertanto si può considerare come un unico corpo rigido.</p>	<p>The diagram shows the structural system with labels and equations for degrees of freedom. Member 1 is labeled with a circled 1 and has a box next to it containing the equation $2n-1 = 3$. Member 2 is labeled with a circled 2 and has a box next to it containing the equation $2n-1 = 3$. Member 3 is labeled with a circled 3 and has a box next to it containing the equation $2n-1 = 1$. The supports are labeled A, B, C, and D.</p>
<p>Si nota immediatamente che la struttura è vincolata a terra esclusivamente da carrelli aventi piano di scorrimento verticale. La struttura può evidentemente traslare in direzione verticale. Il C.I.R. di tutte la aste è dunque il punto all'infinito in direzione orizzontale.</p> <p>LA STRUTTURA E' LABILE.</p>	<p>The diagram shows the structural system with labels and equations for degrees of freedom. Member 1 is labeled with a circled 1 and has a box next to it containing the equation $2n-1 = 3$. Member 2 is labeled with a circled 2 and has a box next to it containing the equation $2n-1 = 3$. Member 3 is labeled with a circled 3 and has a box next to it containing the equation $2n-1 = 1$. The supports are labeled A, B, C, and D. Two horizontal dashed red lines are drawn through the supports, and a text box points to their intersection at infinity, stating: "Le rette si incontrano nel punto all'infinito in direzione orizzontale".</p>

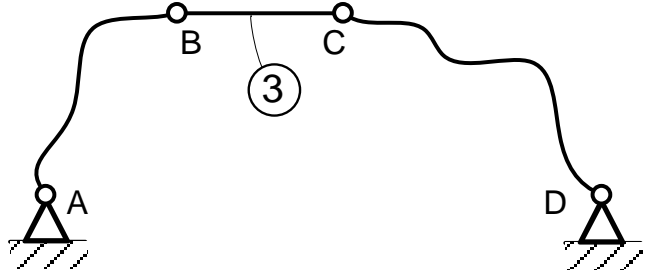
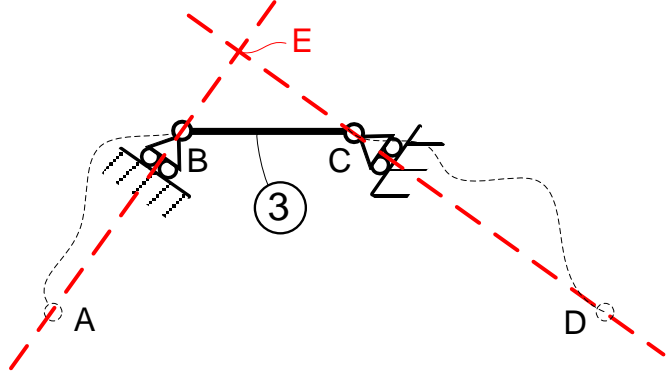
Prova intermedia del 24 Novembre 2010



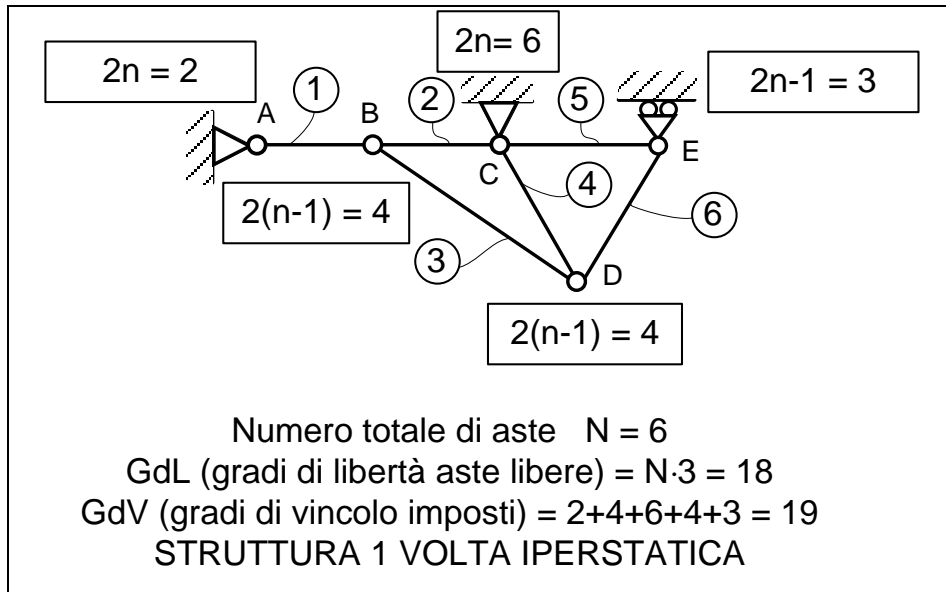
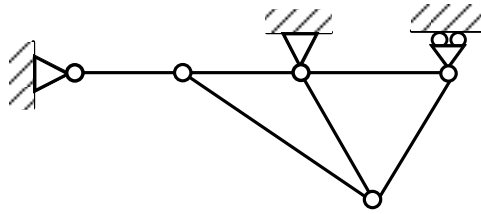
Numero totale di aste $N = 5$
 GdL (gradi di libertà aste libere) = $N \cdot 3 = 15$
 GdV (gradi di vincolo imposti) = $4+4+4+4 = 16$
 STRUTTURA 1 VOLTA IPERSTATICA

I sistemi di aste 1,2 e 4,5 sono ovviamente equivalenti a due corpi rigidi.

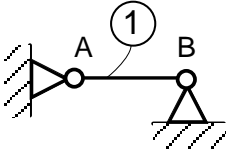


<p>Dal punto di visto cinematico, la struttura studiata è dunque equivalente alla seguente:</p>	
<p>La quale è a sua volta equivalente alla seguente struttura (le aste AB e DC possono essere sostituite da due carrelli a terra: uno in B, avente piano di scorrimento perpendicolare alla retta AB, l'altro in C, avente piano di scorrimento perpendicolare alla retta CD).</p>	
<p>L'asta 3 può dunque ruotare attorno al punto E intersezione delle rette tratteggiate di figura. La struttura è quindi LABILE. Il C.I.R. dell'asta 1 è la cerniera A; il C.I.R. dell'asta 2 è la cerniera D; il C.I.R. dell'asta 3 è il punto E.</p>	

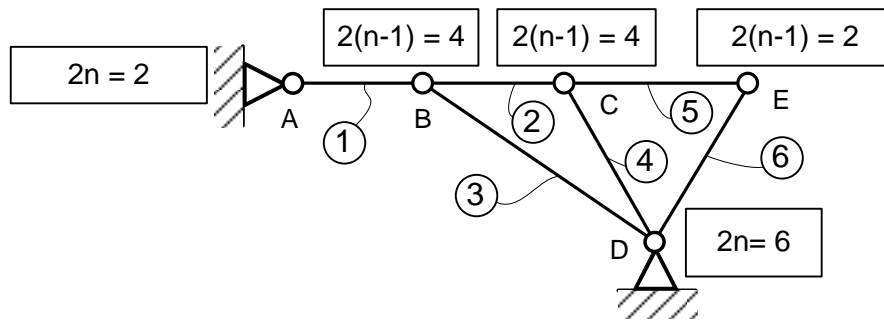
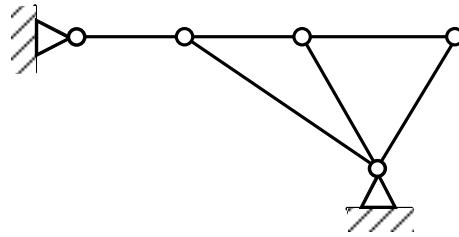
Prova intermedia del 24 Novembre 2010



<p>Il sistema di aste 2,3,4,5,6 è composto da un assemblaggio di due archi a tre cerniere chiusi (BDC + CED) e pertanto può essere visto come un unico corpo rigido.</p>	
<p>La struttura può dunque essere schematizzata come nello schema riportato a fianco.</p>	
<p>Le possibilità di moto del corpo rigido BCDE sono le stesse della struttura seguente, dove il vincolo imposto dall'asta AB al corpo rigido ABCD è stato sostituito da un carrello in B avente piano di scorrimento perpendicolare alla direzione congiungente i punti A e B.</p>	

<p>Il corpo rigido BCDE è vincolato a terra con una cerniera in C e due carrelli (in B ed in E). E' evidente come i tre vincoli non ammettano l'esistenza di un possibile C.I.R. del corpo rigido BCDE. Il sistema riportato a fianco è dunque non labile, e tutti i suoi punti sono fissi (incluso il punto B).</p>	
<p>Poiché la cerniera B è sicuramente fissa, essa può essere vista come una cerniera a terra. Anche l'asta 1 è dunque non labile.</p>	 <p>The diagram shows a horizontal member labeled '1' in a circle. At point A on the left, it is connected to a fixed support (represented by a triangle with hatching). At point B on the right, it is connected to a roller support (represented by a triangle on a horizontal line with hatching below it).</p>
<p>Poiché nessuna asta ammette alcun C.I.R. la struttura è NON LABILE.</p>	

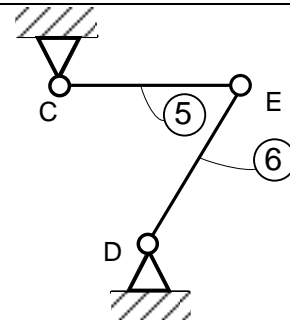
Prova intermedia del 14 Novembre 2009



Numero totale di aste $N = 6$
 GdL (gradi di libertà aste libere) $= N \cdot 3 = 18$
 GdV (gradi di vincolo imposti) $= 2+4+4+6+2 = 18$
STRUTTURA ISOSTATICA

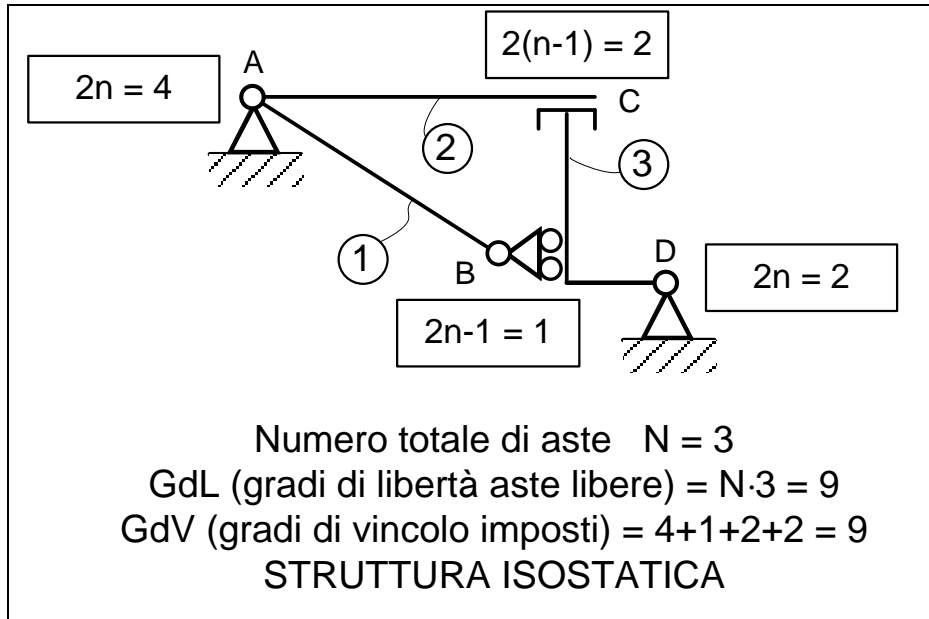
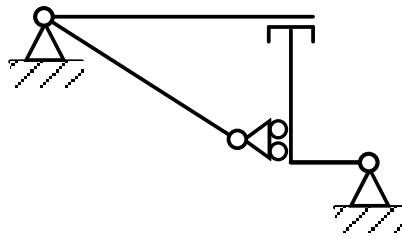
<p>La parte di struttura composta dalle aste 1 e 3 vincolata a terra in A e D è un arco a tre cerniere non labile, in quanto costituito da due aste vincolate da due cerniere a terra (in A ed in D) e da una cerniera interna (in B) non allineate. Tutti i suoi punti sono pertanto fissi (inclusa la cerniera interna B).</p>	
<p>Possiamo dunque considerare il sistema costituito dalla aste 2 e 4 un ulteriore arco a tre cerniere non labile, in quanto vincolato mediante due cerniere fisse (in B ed in D) ed una interna (in C) non allineate. Tutti i suoi punti sono pertanto fissi (inclusa la cerniera interna C).</p>	

Possiamo infine considerare anche il sistema costituito dalla aste 5 e 6 un ulteriore arco a tre cerniere non labile, in quanto vincolato mediante due cerniere fisse (in C ed in D) ed una interna (in E) non allineate. Tutti i suoi punti sono pertanto fissi.

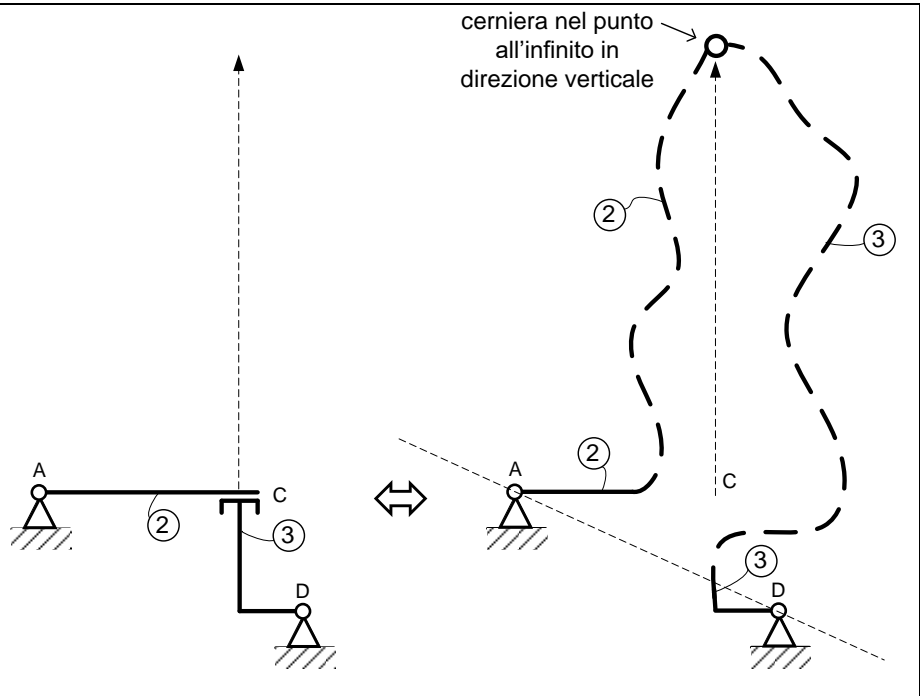


Poiché nessuna asta ammette alcun C.I.R. la struttura è NON LABILE.

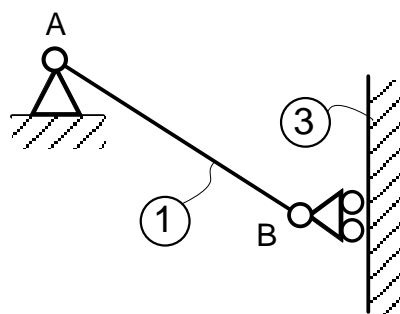
Prova intermedia del 14 Novembre 2009



La parte di struttura composta dalle aste 2 e 3 e vincolata a terra in A ed in D è un arco a tre cerniere non labile, in quanto costituito da due aste vincolate da due cerniere a terra (in A ed in D) e da una cerniera interna (pattino C, assimilabile ad una cerniera all'infinito nella direzione ortogonale al piano di scorrimento del carrello). Poiché le tre cerniere (A, D ed il punto all'infinito in direzione verticale) non sono allineate, l'arco a tre cerniere è non labile, e tutti i suoi punti sono fissi (inclusa l'asta 3 su cui scorre il carrello B),

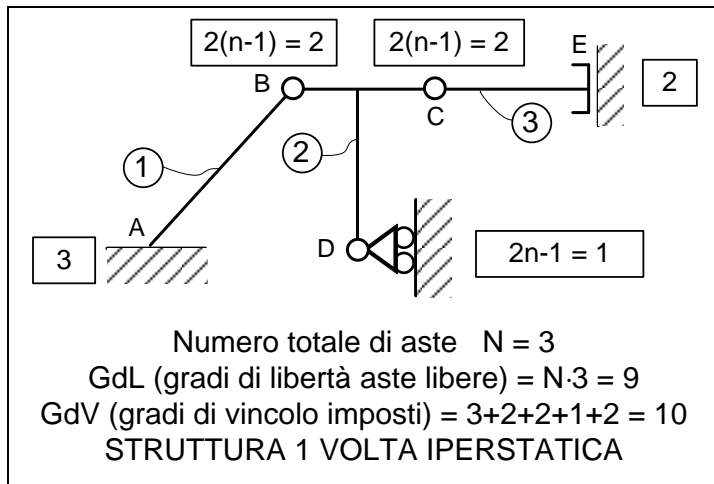
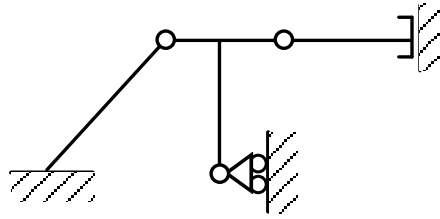


L'asta 1 può essere dunque considerata vincolata a terra non solo con la cerniera in A ma anche con il carrello in B (poiché è stato dimostrato precedentemente che l'asta 3 è sicuramente fissa).

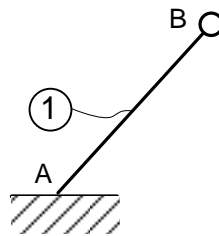


Poiché nessuna asta ammette alcun C.I.R. la struttura è NON LABILE.

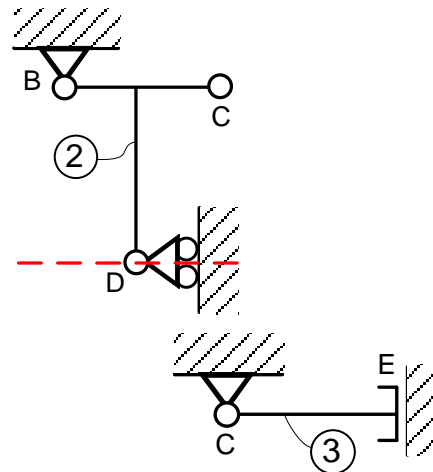
Prova intermedia del 14 Novembre 2009



L'asta 1 è vincolata a terra con un incastro ed è quindi non labile; tutti i suoi punti sono quindi fissi, inclusa l'estremità B.



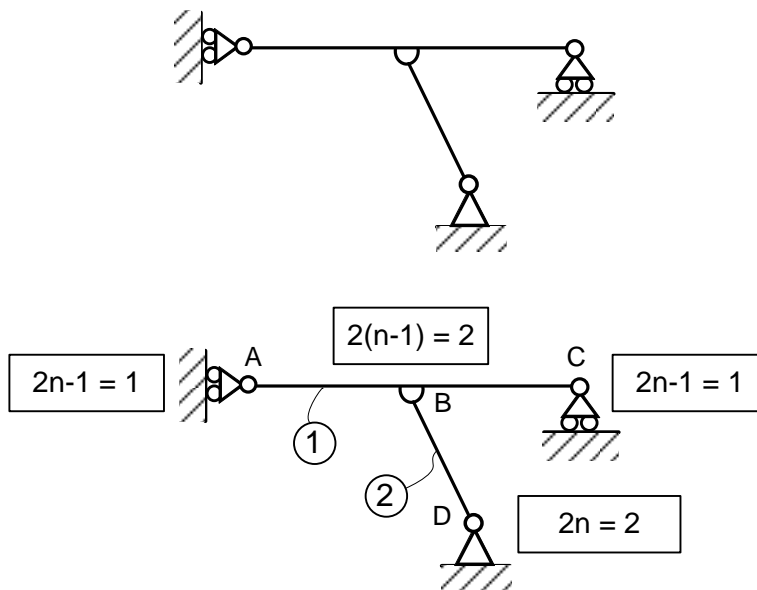
L'asta 2 può allora essere considerata come vincolata con una cerniera a terra in B e con un carrello a terra in D. Poiché il carrello è ben posto (la retta tratteggiata non passa per la cerniera fissa B), anche l'asta 2 è quindi non labile; tutti i suoi punti sono quindi fissi, inclusa l'estremità C.



L'asta 3 può infine essere considerata come vincolata con una cerniera fissa in C e con un pattino in E. Si tratta quindi sicuramente di un sistema non labile.

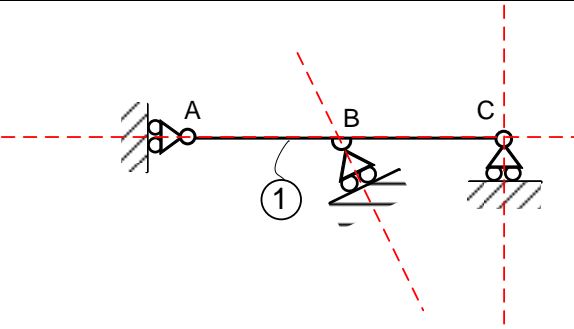
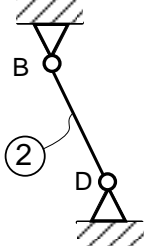
Poiché nessuna delle tre aste ammette uno (o più) C.I.R. la struttura è **NON LABILE**.

Prova intermedia del 12 Novembre 2008

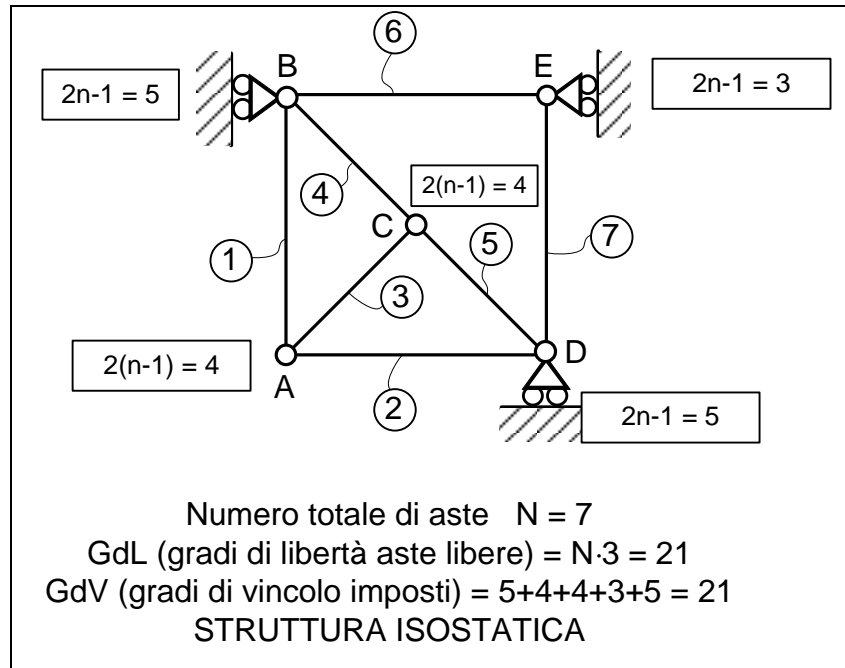
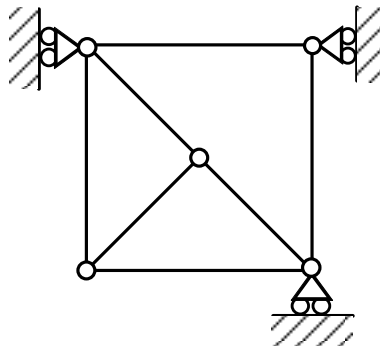


Numero totale di aste $N = 2$
 GdL (gradi di libertà aste libere) = $N \cdot 3 = 6$
 GdV (gradi di vincolo imposti) = $1+2+2+1 = 6$
STRUTTURA ISOSTATICA

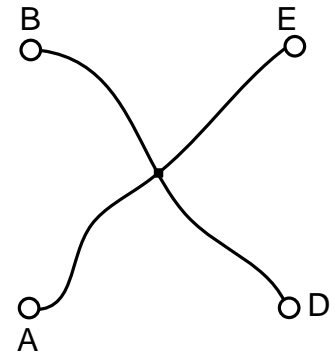
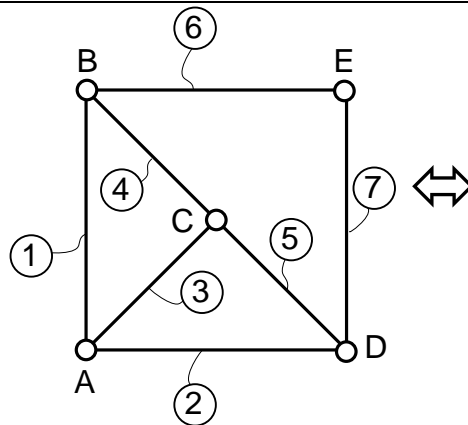
<p>Il vincolo imposto dall'asta 2 alle possibilità di moto dell'asta 1 è equivalente a quello imposto da un carrello a terra in B avente piano di scorrimento perpendicolare alla retta congiungente le cerniere B e D.</p>	<p>Diagram illustrating the equivalence of the constraint at B. The left side shows the original structure with member 1 fixed at A and hinged at B, and member 2 attached at B. The right side shows member 1 fixed at A and having a roller support at B. A dashed line through B and D is perpendicular to the roller's path. A double-headed arrow indicates the equivalence.</p> <p>retta avente la direzione B-D</p>
---	--

<p>L'asta 1 è dunque vincolata da tre carrelli a terra; i luoghi dei possibili C.I.R. dell'asta 1 se si considera vincolata da un solo carrello alla volta (rispettivamente in A, o in B, o in C) sono le tre rette tratteggiate di figura. Poiché le rette non hanno punti in comune, non esiste alcun C.I.R. per l'asta 1 vincolata contemporaneamente dai tre carrelli. L'asta 1 è quindi non labile e tutti i suoi punti sono fissi, incluso il punto B.</p>	
<p>Di conseguenza, anche l'asta 2 è non labile, in quanto vincolata da una cerniera a terra in D e da una cerniera fissa in B.</p>	
<p>Poiché nessuna delle tre aste ammette uno (o più) C.I.R. la struttura è NON LABILE.</p>	

Prova intermedia del 12 Novembre 2008

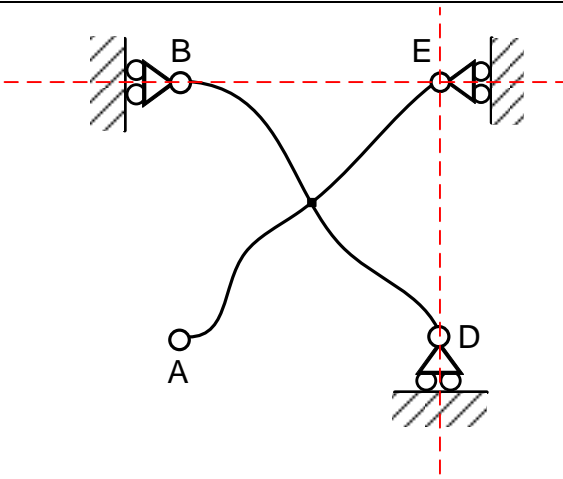


Il sistema composto dalle aste 1,2,3,4,5,6 (tutte le aste) può essere considerato un unico corpo rigido, in quanto costituito dalla sovrapposizione di più archi a tre cerniere chiusi (p.e. A-B-C + A-C-D + B-D-E).



Il sistema è quindi schematizzabile come un unico corpo rigido vincolato a terra da tre carrelli (in B, E e D).

Le rette tratteggiate di figura rappresentano i luoghi dei C.I.R. del corpo rigido nel caso sia applicato un vincolo alla volta (due rette, quelle relative ai carrelli B ed E sono coincidenti) hanno il punto E in comune; il corpo rigido può dunque ruotare attorno alla cerniera del carrello in E.



La struttura è LABILE; tutte le aste hanno il punto E come possibile C.I.R.