Introduzione alla teoria della misura secondo Lebesgue

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

19-6-2018

Indice

Sintesi

PREMESSA

L'importanza della teoria della misura e dell'integrazione è tale da non poter essere descritta completamente in queste dispense: per approfondire l'argomento, lo studente è invitato a consultare i testi esistenti (vedasi per esempio l'elenco a pag. L33).

RELAZIONE TRA MISURA E INTEGRAZIONE

Osserviamo, innanzitutto, che misura (di insiemi) e integrazione (di funzioni) sono strettamente legate. Infatti, se E è un qualunque sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, si ha:

1. Se $f\colon E \to [0, +\infty)$ è una funzione misurabile e non negativa, allora

$$\int_E f = \Bigl|\{\,(x, y) \mid x \in E,\ y \in [0, f(x)]\,\}\Bigr|. \qquad (1)$$

Questa è la celeberrima *interpretazione geometrica dell'integrale*: si vedano, ad esempio, [7, (91.20), pag. 496], [8, teorema 2.4, pag. 201], e [12, (3.7), pag. 407].

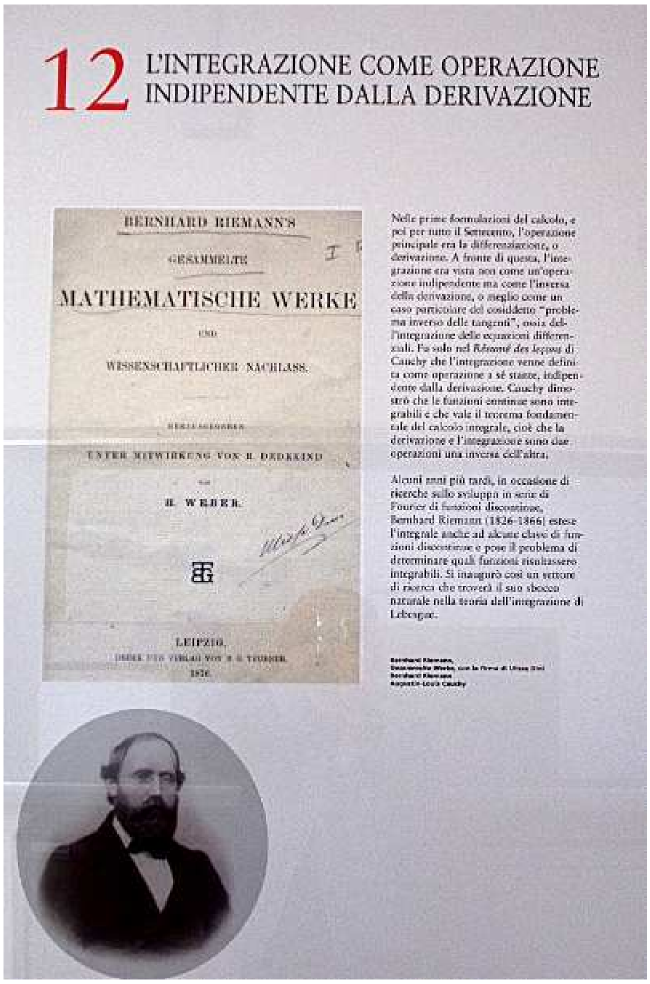
2. La misura $|E|$ dell'insieme E coincide con l'integrale su E della costante 1:

$$|E| = \int_E 1. \qquad (2)$$

Si vedano [7, (90.3), pag. 475], [12, osservazione 2.3, pag. 383 e esempio 3.1, pag. 406], e [14, pag. 37].

L'INTEGRAZIONE NON COINCIDE CON LA RICERCA DELLE PRIMITIVE

Una seconda osservazione che conviene premettere al resto del discorso è che nell'Ottocento, in particolare per opera di Cauchy e Riemann, si definisce l'integrale come limite di somme e non come operazione inversa della derivazione (v. [9, vol. 2, pag. 1116 e segg.] e [2, pannello n. 12]). Questa impostazione è quella usata ancora oggi.



Le motivazioni di Riemann

Riemann formulò la definizione dell'integrale nella sua dissertazione per l'abilitazione a docente universitario, intitolata:

"Sulla rappresentabilità di una funzione tramite una serie trigonometrica" (1854).

In sintesi, la definizione dell'integrale serviva per determinare rigorosamente i coefficienti di Fourier di una data funzione f.

Infatti i coefficienti di Fourier sono dati da $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$ e $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx$.

Nella sua opera "Théorie analytique de la chaleur" (1821), Fourier aveva concepito intuitivamente a_k e b_k facendo riferimento all'area delle regioni piane delimitate dall'asse delle x e dal grafico delle funzioni $f(x)\cos kx$ e $f(x)\,\mathrm{sen}\,kx$.

Le origini del problema della misura

Il problema della misura affonda le sue radici nell'antichità, in relazione alla necessità di misurare l'estensione di figure piane (appezzamenti di terreno, piante di edifici) e solide (recipienti, volumetrie di edifici).

Il metodo più semplice

La maniera più semplice di confrontare fra loro due figure, per esempio due figure piane, consiste nella loro scomposizione in un numero finito di parti sovrapponibili.

Per esempio, un rettangolo si può sempre scomporre in due triangoli rettangoli congruenti, dunque l'area di ciascun triangolo è la metà di quella del rettangolo dato. Similmente, un poligono regolare con n lati si può scomporre in n triangoli isosceli, eccetera.

La necessità di usare i limiti

Ben presto si incontrano figure importanti che tuttavia non si possono scomporre in un numero finito di triangoli, e una di queste è il cerchio.

Per calcolare l'area del cerchio, Archimede di Siracusa, nel III sec. a.C., si serve di una successione di poligoni regolari inscritti e di una successione di poligoni regolari circoscritti ad esso.

Usando la notazione moderna, se indichiamo con P un generico poligono e con $|P|$ la sua area, Archimede si rende conto che l'area $|C|$ del cerchio C si può esprimere come segue:

$$|C| = \sup_{P \subset C} |P| = \inf_{P \supset C} |P|.$$

In altri termini, indicata con a_n l'area del poligono regolare con $n \geq 3$ lati inscritto, e con A_n l'area del poligono regolare con $n \geq 3$ lati circoscritto al cerchio dato, risulta

$$|C| = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} A_n.$$

La misura di Peano-Jordan

Il metodo di Archimede aveva funzionato non solo per il cerchio, ma anche per altre figure piane come per esempio la parte di piano delimitata da un arco di parabola e dalla corda sottesa ad esso. Tuttavia i poligoni da usare per l'esecuzione dei calcoli vanno appositamente scelti a seconda della figura.

Più recentemente Giuseppe Peano (1858–1932) e Camille Jordan (1838–1922) generalizzano l'idea di Archimede.

Per misurare l'estensione di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ si considerano tutti i ricoprimenti di E con un numero finito di rettangoli, la cui area si esprime elementarmente, dopodiché si considera l'estremo inferiore delle aree di tali ricoprimenti: esso è, per definizione, la misura esterna di E secondo Peano-Jordan.

Similmente, l'estremo superiore delle aree dei sottoinsiemi di E costituiti da un numero finito di rettangoli è la misura interna di E secondo Peano-Jordan. Si intende che gli insiemi limitati il cui interno è vuoto hanno misura interna nulla.

La definizione si estende facilmente ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 1$.

Gli insiemi non misurabili

Sorprendentemente, può accadere che la misura interna sia diversa dalla misura esterna!

Per la misura di Peano-Jordan ciò accade, per esempio, quando l'insieme E è un qualunque quadrato privato dei punti di ascissa razionale.

In tal caso, si dice che l'insieme E *non è misurabile* secondo Peano-Jordan. Quando, invece, la misura esterna è uguale alla misura interna, si dice che l'insieme E è misurabile, e la sua misura è, per definizione, il comune valore della misura interna e di quella esterna e si indica con $|E|$.

Legame tra la misura di Peano-Jordan e l'integrale di Riemann

La misura di Peano-Jordan è legata all'integrale di Riemann perché un qualunque sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se la sua funzione caratteristica è integrabile secondo Riemann [12, osservazione 2.3, pag. 383]. In tal caso, vale la (2).

Se, inoltre, una funzione $f\colon E \to [0, +\infty)$ è integrabile secondo Riemann, allora vale anche la (1) [7, (80.32), pag. 427].

Il limite di una successione di insiemi

Oltre all'esistenza di insiemi non misurabili, un altro difetto della misura di Peano-Jordan è che il limite di una successione di figure misurabili può non essere misurabile.

Per fare un esempio, indichiamo con $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$, e con R il quadrato aperto $R = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$R_k = R \setminus \bigcup_{j=0}^{k} \Big(\{ q(j) \} \times (0, 1) \Big) \tag{3}$$

è unione di un numero finito di rettangoli e quindi è misurabile secondo Peano-Jordan, ma non lo è l'insieme limite di R_k per $k \to +\infty$, e cioè il seguente:

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} R_k &= \bigcap_{k=0}^{+\infty} R_k \\ &= \Big((0, 1) \setminus \mathbb{Q} \Big) \times (0, 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Si confronti questa osservazione con la proprietà (24) della misura di Lebesgue (continuità della misura).

Un altro esempio di insieme misurabile secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan si trova a pag. L31.

IL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Il fatto che esistano successioni di insiemi misurabili il cui limite è un insieme non misurabile si ripercuote immediatamente sul cosiddetto passaggio al limite sotto il segno di integrale: cioè esistono successioni di funzioni integrabili secondo Riemann la cui funzione limite non lo è.

Ad esempio, la funzione caratteristica χ_{R_k} dell'insieme R_k dato dalla (3) è integrabile secondo Riemann per ogni k, e converge alla funzione caratteristica dell'insieme indicato nella (4), la quale non è integrabile secondo Riemann.

Si badi che il passaggio al limite sotto il segno di integrale è di fondamentale importanza nella matematica moderna perché per risolvere i problemi associati alle equazioni differenziali, oppure i problemi del calcolo delle variazioni, si ricorre spesso alla rappresentazione della soluzione come limite di funzioni opportunamente scelte.

VANTAGGI DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE DI LEBESGUE

In sintesi, i vantaggi sono due:

1. Sebbene esistano insiemi che non sono misurabili nemmeno secondo Lebesgue (vedere [7, pagine 467-468] e [14, pag. 18]), tutti gli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan risultano misurabili anche secondo Lebesgue, ed il valore numerico della misura è lo stesso.

Inoltre, alcuni insiemi non misurabili secondo Peano-Jordan risultano misurabili secondo Lebesgue: ad esempio l'insieme indicato nella (4) è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura 1.

2. L'insieme limite di una successione di insiemi misurabili secondo Lebesgue è un insieme misurabile.

Per quanto riguarda le funzioni, il limite (ammesso che esista) di una successione (f_n) di funzioni integrabili secondo Lebesgue è una funzione f per la quale restano individuati (finiti o infiniti) gli integrali $\int f^+$ e $\int f^-$ della parte positiva e della parte negativa di f.

I celebri teoremi sul passaggio al limite sotto il segno di integrale danno delle condizioni sufficienti affinché $\int f_n \to \int f$.

SPAZI L^p E SPAZI DI SOBOLEV

Sulle proprietà della misura e dell'integrale di Lebesgue si fondano, a loro volta, le proprietà degli *spazi* $L^p(\Omega)$ e degli *spazi di Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$.

Gli spazi $L^p(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty)$, sono costituiti da tutte le funzioni $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tali che

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty,$$

e dove due funzioni f, g si identificano se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega$ (cioè se l'insieme $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ ha misura nulla). Qui Ω denota un *dominio* (cioè un sottoinsieme non vuoto, aperto e connesso) di $\mathbb{R}^n$.

Gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, con $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty)$, sono costituiti da tutte le funzioni di $L^p(\Omega)$ le cui derivate parziali fino all'ordine k-esimo, definite in un senso particolare detto *debole*, appartengono ancora ad $L^p(\Omega)$.

All'interno di tali spazi, grazie a proprietà di *completezza* e di *compattezza*, si dimostra l'esistenza delle soluzioni di problemi di minimo del calcolo delle variazioni e di problemi associati ad equazioni alle derivate parziali.

Ciò non riesce altrettanto bene con i più familiari spazi $C^k(\Omega)$ costituiti dalle funzioni $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ le cui derivate parziali fino all'ordine k-esimo esistono in senso classico e sono continue.

Definizione della misura

MISURA ESTERNA

Chiamiamo intervallo in $\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}^n$ del tipo

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

dove $a_i < b_i$ per $i = 1, \ldots, n$, e poniamo

$$m(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Seguendo l'idea in [10, pagg. 237 e 244], la misura esterna n-dimensionale $m_e(E)$ di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ si può definire come

$$m_e(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} m(I_k) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\}.$$

Questa definizione è adottata, ad esempio, in [15]. Altri testi, come [7], utilizzano la definizione equivalente

$$m_e(E) = \inf_{E \subset A} \underline{m}(A),$$

dove con la lettera A si denotano gli aperti di $\mathbb{R}^n$ contenenti l'insieme E, e $\underline{m}(A)$ è la misura interna di A secondo Peano-Jordan (vedere a pag. L6).

EQUIVALENZA DELLE DUE DEFINIZIONI

L'equivalenza delle due definizioni della misura esterna discende dalle seguenti due osservazioni:

1. Ogni sottoinsieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si può rappresentare come unione di un'opportuna successione di intervalli (chiusi):

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k. \tag{5}$$

2. L'unione di una qualunque successione di intervalli (chiusi) si può approssimare per eccesso, bene quanto si vuole, con un aperto opportuno.

Quest'ultima affermazione si verifica sfruttando il fatto che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Infatti, a partire dagli intervalli I_k, per ciascun k si prende un intervallo J_k un po' più grande di I_k e tale che

$$|J_k| < |I_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Così facendo, posto

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathring{J}_k,$$

si trova

$$|A| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \right) + \varepsilon,$$

come volevasi dimostrare.

Per verificare la (5), indichiamo con $Q_k(z)$ l'ipercubo di $\mathbb{R}^n$ dato da

$$Q_k(z) = \left[\frac{z_1}{2^k}, \frac{z_1+1}{2^k}\right] \times \dots \times \left[\frac{z_n}{2^k}, \frac{z_n+1}{2^k}\right], \qquad (6)$$

con $k \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{Z}^n$. La successione degli I_k si può allora definire prendendo innanzitutto tutti gli ipercubi del tipo $Q_0(z)$ che risultano inclusi nell'aperto dato A.

Successivamente si prendono gli ipercubi $Q_1(z) \subset A$ non inclusi in quelli già presi al passo precedente, e così via.

In tal modo si ottiene una successione di ipercubi $I_k \subset A$, quindi

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \subset A. \qquad (7)$$

Per dimostrare che vale l'uguaglianza, facciamo vedere che ogni punto $x_0 \in A$ appartiene ad un I_k.

Essendo A aperto, esiste un raggio r tale che $B_r(x_0) \subset A$. Poiché la diagonale d_k degli ipercubi $Q_k(z)$ è data da $d_k = \sqrt{n}/2^k$, tutti quelli di lato sufficientemente piccolo e che contengono x_0 sono inclusi in $B_r(x_0)$ e di conseguenza sono inclusi in A.

Per costruzione, l'ipercubo $Q_k(z) \subset A$ contenente x_0 e di lato più grande possibile è uno degli intervalli indicati con I_k nella (7), e la (5) segue.

Osservazione

Nella costruzione testé illustrata, gli intervalli I_k sono a due a due privi di punti interni in comune.

Ci si può allora chiedere se è possibile esprimere un dato aperto A come unione di intervalli (chiusi) a due a due disgiunti. La risposta è negativa. Per motivarla, premettiamo il seguente lemma.

Lemma. Consideriamo una successione di intervalli aperti $J_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}$, decrescente nel senso che $-\infty < \alpha_n \leq \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} \leq \beta_n < +\infty$ per ogni n. Se le successioni (α_n) e (β_n) non sono definitivamente costanti, allora

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Indichiamo con α e β i limiti (finiti)

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha \leq \beta = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$

Verifichiamo che $\alpha, \beta \in J_n$ per ogni n. Scelto ad arbitrio un indice n_0, per ipotesi esiste un $n > n_0$ tale che

$$\alpha_{n_0} < \alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_n < \beta_{n_0},$$

e perciò $\alpha, \beta \in J_{n_0}$. Per l'arbitrarietà di n_0, il lemma segue.

TEOREMA. Consideriamo una successione di intervalli chiusi $I_k = [a_k, b_k] \subset (0,1)$ a due a due disgiunti. La differenza insiemistica

$$E = (0,1) \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$$

non è vuota.

Dimostrazione. La differenza insiemistica $(0,1) \setminus I_1$ è costituita dai due aperti $(0, a_1)$ e $(b_1, 1)$. Scegliamo il primo dei due, e poniamo $J_1 = (\alpha_1, \beta_1) = (0, a_1)$.

Se nessuno degli I_k interseca J_1, allora $J_1 \subset E$ e il teorema è dimostrato.

Se, invece, risulta $I_k \subset J_1$ per qualche k, denotiamo con k_1 il più piccolo valore di k tale che $I_k \subset J_1$.

La differenza insiemistica $J_1 \setminus I_{k_1}$ è costituita dai due aperti (α_1, a_{k_1}) e (b_{k_1}, β_1). Scegliamo questa volta il secondo dei due, e poniamo $J_2 = (\alpha_2, \beta_2) = (b_{k_1}, \beta_1)$.

Procedendo in questo modo possono verificarsi due casi: nel primo caso, si giunge ad un intervallo aperto $J_{n_0} \neq \emptyset$ che non interseca I_k per nessun k, quindi $J_{n_0} \subset E$ e il teorema è dimostrato.

Altrimenti, si genera una successione decrescente di intervalli aperti $J_n = (\alpha_n, \beta_n)$ ognuno dei quali contiene I_{k_n}, e l'intervallo successivo J_{n+1} è dato da

$$J_{n+1} = \begin{cases} (\alpha_n, a_{k_n}) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ (b_{k_n}, \beta_n) & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Per il lemma alla pagina precedente, esiste almeno un elemento x_0 nell'intersezione

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n \subset (0,1).$$

Resta da verificare che $x_0 \in E$, ovvero che $x_0 \notin I_k$ qualunque sia k. A tal fine, scegliamo arbitrariamente un intervallo $I_{\bar{k}}$, e determiniamo di conseguenza un $\bar{n}$ tale che $k_{\bar{n}} > \bar{k}$.

Per la definizione di $J_{\bar{n}}$, tale intervallo non interseca $I_{\bar{k}}$. Ma siccome $x_0 \in J_{\bar{n}}$, ne segue che $x_0 \notin I_{\bar{k}}$. Per l'arbitrarietà di $\bar{k}$, la tesi segue.

MISURA INTERNA

Seguendo l'idea in [10], la misura interna n-dimensionale di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ si può definire introducendo un intervallo I tale che $E \subset I$ e ponendo

$$m_{\rm i}(E) = |I| - m_{\rm e}(I \setminus E). \qquad (8)$$

Altri testi, come [7], utilizzano la definizione equivalente

$$m_{\rm i}(E) = \sup_{K \subset E} \overline{m}(K),$$

dove con la lettera K si indicano i sottoinsiemi compatti di E, e $\overline{m}(K)$ è la misura esterna di K secondo Peano-Jordan (vedere a pag. L6).

EQUIVALENZA DELLE DUE DEFINIZIONI

L'equivalenza delle due suddette definizioni della misura interna si può verificare come segue.

Fissato un intervallo I ed un insieme limitato $E \subset I$, vogliamo verificare che

$$|I| = \inf_{I \setminus E \subset A} \underline{m}(A) + \sup_{K \subset E} \overline{m}(K), \qquad (9)$$

dove si intende che A è aperto e K compatto.

Utilizzeremo l'additività della misura nei casi particolari (22) e (23) considerati in dettaglio più avanti.

Scegliamo (in teoria) una successione di aperti limitati A_k tali che $I \setminus E \subset A_k$ per ogni k, e

$$\lim_{k \to +\infty} \underline{m}(A_k) = \inf_{I \setminus E \subset A} \underline{m}(A).$$

L'insieme $K_k = I \setminus A_k$ è un compatto incluso in E e disgiunto da A_k.

Ponendo $A = A_k$ e $K = K_k$ nella (22) otteniamo

$$|A_k \cup K_k| = |A_k| + |K_k|.$$

Ma siccome $I \subset A_k \cup I = A_k \cup K_k$, ne segue che

$$|I| \leq |A_k| + \sup_{K \subset E} \overline{m}(K),$$

e passando al limite per $k \to +\infty$ si ottiene la (9) con il segno di $\leq$ al posto dell'uguaglianza.

Per completare la dimostrazione, consideriamo una successione di compatti $K_k \subset E$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{m}(K_k) = \sup_{K \subset E} \overline{m}(K),$$

ed una successione di intervalli I_k tali che $I \subset \mathring{I}_k$ e

$$\lim_{k \to +\infty} |I_k| = |I|.$$

L'aperto $A_k = \mathring{I}_k \setminus K_k$ soddisfa l'inclusione $I \setminus E \subset A_k$ e l'uguaglianza $\mathring{I}_k \setminus A_k = K_k$. Perciò, ponendo $A = A_k$ e $B = \mathring{I}_k$ nella (23), otteniamo

$$\begin{aligned} |\mathring{I}_k| &= |A_k| + |K_k| \\ &\geq \inf_{I \setminus E \subset A} \underline{m}(A) + |K_k|. \end{aligned}$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ si ottiene la (9) con il segno di $\geq$ al posto dell'uguaglianza, e la dimostrazione è conclusa.

RELAZIONE TRA MISURA INTERNA E MISURA ESTERNA

Come suggeriscono i loro nomi, le misure interna ed esterna secondo Lebesgue di un qualunque insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ soddisfano la disuguaglianza

$$m_{\mathrm{i}}(E) \leq m_{\mathrm{e}}(E). \tag{10}$$

Per verificarla, seguiamo il ragionamento indicato in [10, pag. 238].

Consideriamo un ricoprimento dell'insieme E fatto con un numero finito o una successione di intervalli I_k, a due a due privi di punti interni in comune.

Consideriamo, inoltre, un intervallo I tale che $E \subset I$, ed un ricoprimento dell'insieme $I \setminus E$ fatto con un numero finito o una successione di intervalli J_k, a due a due privi di punti interni in comune. Essendo

$$I \subset \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k \right)$$

si ha

$$|I| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} I_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} J_k \right).$$

Per l'arbitrarietà dei suddetti ricoprimenti, si deduce che

$$|I| \leq m_{\mathrm{e}}(E) + m_{\mathrm{e}}(I \setminus E).$$

A questo punto, per la definizione (8) della misura interna, la (10) segue.

INSIEMI MISURABILI

Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Lebesgue se

$$m_{\mathrm{i}}(E) = m_{\mathrm{e}}(E).$$

In tal caso, la misura di Lebesgue n-dimensionale dell'insieme E è data dal comune valore di $m_{\mathrm{i}}(E)$ e $m_{\mathrm{e}}(E)$, e si denota con $m(E)$ o con $|E|$.

Questa impostazione si ritrova, ad esempio, in [10] ed in [7].

Un insieme illimitato E si dice misurabile secondo Lebesgue se l'intersezione $E_k = E \cap B_k(0)$, che è limitata, è misurabile qualunque sia il raggio k. In tal caso si definisce

$$m(E) = |E| = \lim_{k \to +\infty} m(E_k) \leq +\infty.$$

Equivalentemente, l'insieme E, limitato o meno, si dice misurabile secondo Lebesgue se, qualunque sia l'insieme $X \subset \mathbb{R}^n$ (anche non misurabile) i due pezzi $X \cap E$ e $X \setminus E$ soddisfano l'uguaglianza

$$m_{\mathrm{e}}(X \cap E) + m_{\mathrm{e}}(X \setminus E) = m_{\mathrm{e}}(X).$$

In tal caso, la misura di Lebesgue n-dimensionale dell'insieme E è data da $m_{\mathrm{e}}(E)$.

Quest'ultima è l'impostazione di [15], attribuita al matematico greco Constantin Carathéodory.

L'IMPORTANZA DELLA DIMENSIONE

Si noti che l'intervallo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ ha misura di Lebesgue unidimensionale uguale ad 1, mentre il segmento S dato da

$$S = \{\, (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1) \,\}$$

ha misura di Lebesgue bidimensionale nulla.

L'IMPORTANZA DELLA MISURABILITÀ

L'importanza degli insiemi misurabili sta nel fatto che per tali insiemi valgono le consuete proprietà dell'area e del volume, come ad esempio la (19).

Per contro, usando gli insiemi non misurabili si possono ottenere risultati apparentemente paradossali.

Ad esempio, si può suddividere una sfera data in un numero finito di parti con le quali, riaccostandole opportunamente fra loro, si possono ricostruire due sfere uguali a quella iniziale [13].

SIGMA-ALGEBRE

I sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ costituiscono una sigma-algebra in quanto:

1. L'insieme vuoto è misurabile;

2. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è misurabile;

3. Il complementare di qualunque insieme misurabile è ancora un insieme misurabile;

4. L'unione di una qualunque successione di insiemi misurabili è ancora un insieme misurabile.

Un'altra importante sigma-algebra è costituita dai sottoinsiemi di Borel di $\mathbb{R}^n$, detti anche boreliani.

ALTRE MISURE

In generale, una misura in un insieme Ω è una funzione $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ avente per dominio una sigma-algebra $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω e tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. Per ogni successione di insiemi $E_k \in \mathcal{M}$, a due a due disgiunti, posto

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k,$$

risulta

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k).$$

Oltre alla misura di Lebesgue, sono importanti le cosiddette misure di probabilità, cioè quelle per le quali $\mu(\Omega) = 1$.

SPAZI MENSURALI

Uno spazio mensurale, detto anche spazio di misura, è una tripla $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ costituita da un insieme Ω, una sigma-algebra $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω, ed una misura μ.

Un'introduzione alla teoria astratta della misura si può trovare, ad esempio, in [17].

Proprietà della misura

Teorema di Tonelli per le serie (cfr. [18])

Uno degli enunciati alla base dalla teoria della misura di Lebesgue è il seguente, mediante il quale si può dimostrare, ad esempio, che la misura degli aperti è numerabilmente additiva.

Indichiamo con $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ un'applicazione biunivoca, e con $a\colon \mathbb{N}^2 \to [0, +\infty)$ una funzione arbitraria a valori reali non negativi. Scriveremo $a_{i,j}$ al posto di $a(i, j)$, e $a_{f(k)}$ al posto di $a(f(k))$.

In sintesi, l'ordine con il quale vengono sommati i termini $a_{i,j}$ non conta. Più precisamente, si ha:

Per ogni applicazione biunivoca $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, ed ogni funzione non negativa $a\colon \mathbb{N}^2 \to [0, +\infty)$ risulta

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}. \tag{11}$$

Per meglio comprendere l'idea della dimostrazione è consigliabile rappresentare i termini $a_{i,j}$ in una matrice infinita. Indicata con $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{f(k)}$ la somma ridotta della prima serie, per ogni n risulta

$$S_n \le \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\ell} a_{i,j}$$

pur di prendere $m, \ell \in \mathbb{N}$ sufficientemente grandi. Basta prendere, ad esempio, $m \ge \max_{k \le n} \pi_1(f(k))$ e $\ell \ge \max_{k \le n} \pi_2(f(k))$, dove π_1 e π_2 sono le proiezioni canoniche date da $\pi_1(i, j) = i$ e $\pi_2(i, j) = j$.

Poiché $\sum_{j=0}^{\ell} a_{i,j} \le \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$, possiamo scrivere $S_n \le \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ per m grande, e a maggior ragione

$$S_n \le \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo la (11) con il segno di $\le$ al posto dell'uguale.

Per completare la dimostrazione, posto $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{f(k)}$, osserviamo che per ogni m ed ℓ fissati, risulta $\{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, \ell\} \subset f(\{0, \ldots, n\})$ pur di prendere n sufficientemente grande, e quindi

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\ell} a_{i,j} \le \sum_{k=0}^{n} a_{f(k)} \le S.$$

Posto $T_{i,\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} a_{i,j}$, possiamo scrivere $\sum_{i=0}^{m} T_{i,\ell} \le S$, e passando al limite per $\ell \to +\infty$ ricaviamo $\lim_{\ell \to +\infty} \sum_{i=0}^{m} T_{i,\ell} \le S$.

D'altro canto, per il teorema sul limite di una somma, risulta $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \lim_{\ell \to +\infty} \sum_{i=0}^{m} T_{i,\ell}$ e quindi $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \le S$.

Facendo tendere m all'infinito otteniamo la (11) con il segno di $\ge$ al posto dell'uguale, e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Frantumazione e smistamento

Per dimostrare alcune proprietà della misura di Lebesgue si usa la procedura appresso descritta, qui definita "frantumazione e smistamento".

Consideriamo una successione di aperti $A_k \subset \mathbb{R}^n$, anche sovrapposti l'uno all'altro ma ciascuno diverso da $\mathbb{R}^n$, e poniamo

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Fissato un sottoinsieme chiuso e limitato $K \subset A$, per il teorema di Heine-Borel esistono $A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} A_{k_j}. \tag{12}$$

Posto $F_j = \mathbb{R}^n \ A_{k_j}$, la funzione

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{dist}(x, F_j)$$

risulta continua perché somma di funzioni continue, dunque ammette minimo sul compatto K:

$$\min_{x \in K} f(x) = d_0. \tag{13}$$

Inoltre si ha $d_0 > 0$ perché $f(x)$ si annulla se e solo se $\operatorname{dist}(x, F_j) = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, N$, dunque se e solo se $x \in F_j$ per ogni j, il che non avviene in K per la (12).

Lemma. Fissato un $k_0 \in \mathbb{N}$ soddisfacente la condizione $2^{-k_0}\sqrt{n} < d_0/N$, per ogni $z \in \mathbb{Z}^n$ esiste j tale che

$$K \cap Q_{k_0}(z) \subset A_{k_j}.$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbe in $K \cap Q_{k_0}(z)$ un punto di F_j per ogni $j = 1, \ldots, N$, e perciò, scelto un $x_0 \in K \cap Q_{k_0}(z)$, si avrebbe $\operatorname{dist}(x_0, F_j) \leq 2^{-k_0}\sqrt{n}$ (diagonale di $Q_{k_0}(z)$) per ogni j.

Poiché sommando su j si ottiene $f(x_0) < d_0$, contro la (13), il lemma è dimostrato.

L'appellativo di "frantumazione e smistamento" è dovuto al fatto che il lemma consente di decomporre il compatto K in un numero finito di parti, aventi la forma

$$K \cap Q_{k_0}(z),$$

ciascuna delle quali è inclusa in uno degli aperti dati.

FORMULA DI SCOMPOSIZIONE

Una delle proprietà più semplici e naturali della misura di Lebesgue è la seguente: se A e B sono due insiemi misurabili, allora

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|. \qquad (14)$$

IL CASO DEGLI APERTI LIMITATI

Verifichiamo la (14) nel caso particolare in cui A e B sono aperti limitati. Per ogni insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$, ed ogni $k \in \mathbb{N}$, poniamo

$$P_k(E) = \bigcup_{Q_k(z) \subset E} Q_k(z) \qquad (15)$$

dove $Q_k(z)$, con $z \in \mathbb{Z}^n$, denota l'ipercubo (6). Dalla definizione di $|A| = \underline{m}(A)$ segue che

$$|A| = \lim_{k \to +\infty} |P_k(A)|,$$

mentre $|P_k(A)|$ è semplicemente la somma (finita) dei volumi degli ipercubi che costituiscono $P_k(A)$.

Poiché ogni ipercubo $Q_k(z)$ di $P_k(A)$ o è incluso in $A \cap B$ oppure no, possiamo scrivere $P_k(A \cap B) \cup P_k(A, B) = P_k(A)$, dove

$$P_k(A, B) = \bigcup_{\substack{Q_k(z) \subset A \\ Q_k(z) \not\subset A \cap B}} Q_k(z).$$

Poiché $|A \cap B| > |P_k(A \cap B)|$, otteniamo

$$|A \cap B| + |P_k(A, B)| > |P_k(A)|. \qquad (16)$$

Osserviamo che i $Q_k(z)$ che costituiscono $P_k(A, B)$, essendo inclusi in A ma non in $A \cap B$, non sono inclusi in B e quindi non entrano a far parte di $P_k(B)$.

Quindi l'insieme $P_k(A, B) \cup P_k(B)$ è unione di ipercubi $Q_k(z)$ distinti e inclusi in $A \cup B$.

Per questo, e per la definizione di misura di un aperto limitato, abbiamo $|A \cup B| > |P_k(A, B) \cup P_k(B)| = |P_k(A, B)| + |P_k(B)|$. Sommando la (16) a quest'ultima disuguaglianza, otteniamo

$$|A \cup B| + |A \cap B| > |P_k(A)| + |P_k(B)|.$$

Facendo tendere k a $+\infty$ si ottiene la (14) con il segno di $\geq$ al posto dell'uguale.

Per concludere la dimostrazione, verifichiamo che nella (14) vale il segno di $\leq$.

Per ogni k sufficientemente grande possiamo "smistare" gli ipercubi di $P_k(A \cup B)$ come a pag. L20 e quindi scrivere $P_k(A \cup B) = F_A \cup F'_A$, dove

$$F_A = \bigcup_{Q_k(z) \subset P_k(A)} Q_k(z),$$

$$F'_A = \bigcup_{\substack{Q_k(z) \subset P_k(A \cup B) \\ Q_k(z) \not\subset A}} Q_k(z).$$

Siccome $|F_A| < |A|$, otteniamo

$$|P_k(A \cup B)| < |A| + |F'_A|. \qquad (17)$$

Inoltre, i $Q_k(z)$ in F'_A risultano inclusi in $P_k(B)$ e non hanno punti interni in comune con $P_k(A \cap B)$, quindi $|P_k(A \cap B)| + |F'_A| = |P_k(A \cap B) \cup F'_A| < |B|$. Sommando la (17) a quest'ultima disuguaglianza, otteniamo

$$|P_k(A \cup B)| + |P_k(A \cap B)| < |A| + |B|.$$

Facendo tendere k a $+\infty$ si ottiene la (14) con il segno di $\leq$ al posto dell'uguale.

SUBADDITIVITÀ

Una delle principali proprietà della misura di Lebesgue è la subadditività: se due insiemi A e B (non necessariamente disgiunti) sono misurabili, allora

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|. \tag{18}$$

La (18) è una conseguenza immediata della (14).

IL CASO DEGLI APERTI LIMITATI

Verifichiamo direttamente la (18) nel caso in cui A e B sono aperti limitati.

Con l'intenzione di esprimere $|A \cup B|$, consideriamo il plurintervallo $P_k(A \cup B)$ definito come nella (15) con un $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande da poter effettuare lo "smistamento" descritto a pagina L20.

Dunque ogni ipercubo $Q_k(z)$ di $P_k(A \cup B)$ è incluso in A o in B, e possiamo scrivere $P_k(A \cup B) = F_A \cup F'_A$ dove

$$F_A = \bigcup_{Q_k(z) \subset A} Q_k(z),$$

$$F'_A = \bigcup_{\substack{Q_k(z) \subset A \cup B \\ Q_k(z) \not\subset A}} Q_k(z).$$

Poiché $F_A \subset A$ e $F'_A \subset B$, ne segue che $|P_k(A \cup B)| < |A| + |B|$, e facendo tendere k a $+\infty$ si ottiene la (18).

ADDITIVITÀ FINITA

Una delle principali proprietà della misura di Lebesgue è l'additività: se due insiemi A e B sono misurabili e disgiunti, allora

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{19}$$

Verifichiamo la (19) nel caso in cui A e B sono compatti disgiunti. Posto

$$P'_k(E) = \bigcup_{Q_k(z) \cap E \neq \emptyset} Q_k(z) \tag{20}$$

risulta $|A| = \lim_{k \to +\infty} |P'_k(A)|$, e similmente per B, e per il compatto $A \cup B$.

Poiché $A \cap B = \emptyset$ per ipotesi, e per la compattezza di A e B, risulta $P'_k(A) \cap P'_k(B) = \emptyset$ definitivamente, e precisamente per tutti i k tali che

$$2^{-k}\sqrt{n} < \operatorname{dist}(A, B).$$

Per tali k risulta $P'_k(A \cup B) = P'_k(A) \cup P'_k(B)$ e $|P'_k(A \cup B)| = |P'_k(A)| \cup |P'_k(B)|$. Facendo tendere k a $+\infty$ si ottiene la (19).

LEMMA 1. Verifichiamo che se A e B sono aperti limitati, con $A \subset B$, e se $K = P_k(A)$ è il plurintervallo dato dalla (15) per un arbitrario $k \in \mathbb{N}$, allora

$$|B| = |K| + |B \setminus K|. \tag{21}$$

Questa uguaglianza corrisponde alla (19) se gli insiemi A e B della (19) sono sostituiti, rispettivamente, da K e $B \setminus K$.

Per provare la (21) cominciamo col prendere $j \geq k$ ed osserviamo che $K \cup P_j(B \setminus K) \subset P_j(B)$.

Siccome il compatto $P_j(B \setminus K)$ è disgiunto da K, possiamo applicare la formula (19) appena verificata per i compatti disgiunti.

Ne segue che $|P_j(B)| \geq |K| + |P_j(B \setminus K)|$, e facendo tendere j a $+\infty$ si ottiene $|B| \geq |K| + |B \setminus K|$.

Per completare la dimostrazione della (21) scriviamo $P_j(B) = K \cup F'_B$, dove

$$F'_B = \bigcup_{\substack{Q_j(z) \subset B \\ Q_j(z) \not\subset K}} Q_j(z)$$

e quindi $|P_j(B)| = |K| + |F'_B|$. Ma l'interno di F'_B è un sottoinsieme aperto di $B \setminus K$ ed ha la stessa misura di F'_B, dunque $|F'_B| \leq |B \setminus K|$ e di conseguenza $|P_j(B)| \leq |K| + |B \setminus K|$.

Passando al limite per $p \to +\infty$ si ottiene $|B| \leq |K| + |B \setminus K|$, e la (21) segue.

LEMMA 2. Se A è un aperto limitato, e se al posto di B poniamo $K \setminus A$, dove K è un compatto, la (19) diventa

$$|A \cup K| = |A| + |K \setminus A|. \tag{22}$$

Per verificarla, consideriamo il plurintervallo $P_k(A)$ dato dalla (15) per un arbitrario $k \in \mathbb{N}$.

L'insieme $P_k(A) \cup (K \setminus A)$ è un compatto, unione di due compatti disgiunti, contenuto in $A \cup K$: dunque $m_{\mathrm{i}}(A \cup K) \geq |P_k(A) \cup (K \setminus A)|$.

Ma l'additività della misura è già stata dimostrata a pagina L22 per l'unione di due compatti disgiunti, dunque $m_{\mathrm{i}}(A \cup K) \geq |P_k(A)| + |K \setminus A|$. Facendo tendere k a $+\infty$ si trova

$$m_{\mathrm{i}}(A \cup K) \geq |A| + |K \setminus A|.$$

Per completare la dimostrazione della (22), indichiamo con B un aperto limitato tale che $K \setminus A \subset B$. Da ciò discende che

$$A \cup K \subset A \cup B.$$

Questa inclusione, la definizione della misura esterna, e la (18) implicano $m_{\mathrm{e}}(A \cup K) \leq |A| + |B|$. Sostituendo $|B|$ con

$$\inf_{K \setminus A \subset B} |B| = |K \setminus A|$$

si ricava

$$m_{\mathrm{e}}(A \cup K) \leq |A| + |K \setminus A|,$$

dunque l'insieme $A \cup K$ è misurabile e la sua misura soddisfa la (22).

LEMMA 3. Verifichiamo che se A e B sono aperti limitati, con $A \subset B$, allora

$$|B| = |A| + |B \setminus A|. \tag{23}$$

Questa uguaglianza corrisponde alla (19) se l'insieme B della (19) è sostituito da $B \setminus A$.

Poiché l'insieme $B \setminus A$ non è, in generale, né aperto né chiuso, per provare la (23) studiamo separatamente la sua misura interna e la sua misura esterna.

Per un arbitrario $k \in \mathbb{N}$ consideriamo il compatto $P_k(B)$ dato dalla (15).

Per la (22), l'insieme $A \cup P_k(B)$ è misurabile e si ha $|A \cup P_k(B)| = |A| + |P_k(B) \setminus A|$. Poiché, banalmente, $P_k(B) \subset A \cup P_k(B)$, ne segue $|P_k(B)| \leq |A| + |P_k(B) \setminus A|$.

Ma l'insieme $P_k(B) \setminus A$ è un sottoinsieme compatto di $B \setminus A$, dunque per la definizione della misura interna si ha $|P_k(B)| \leq |A| + m_{\mathrm{i}}(B \setminus A)$, e facendo tendere k a $+\infty$ si ottiene $|B| \leq |A| + m_{\mathrm{i}}(B \setminus A)$.

Per concludere la dimostrazione della (23), consideriamo ora il compatto $P_k(A)$.

L'insieme $B \setminus P_k(A)$ è aperto e contiene $B \setminus A$, dunque $m_{\mathrm{e}}(B \setminus A) \leq |B \setminus P_k(A)|$. Per la (21) si ha $|B \setminus P_k(A)| = |B| - |P_k(A)|$, quindi $m_{\mathrm{e}}(B \setminus A) \leq |B| - |P_k(A)|$.

Facendo tendere k a $+\infty$ si ottiene $m_{\mathrm{e}}(B \setminus A) \leq |B| - |A|$ e la (23) segue.

DIMOSTRAZIONI ALTERNATIVE

Se A e B sono due aperti limitati qualunque, sostituendo $A \cup B$ al posto di B nella (23) si trova

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|.$$

Sostituendo, invece, $A \cap B$ al posto di A nella (23) si ottiene

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Confrontando fra loro le due uguaglianze precedenti si ricava, per altra via, la formula di scomposizione (14).

Esistono dunque diverse possibilità di procedere nello sviluppo della teoria della misura: l'insieme dei teoremi è lo stesso, ma la loro successione è una scelta stilistica, e cambia a seconda del testo seguito.

Una situazione simile si ritrova in molti altri settori della matematica.

Tanto per fare un esempio, con riferimento alla proprietà di completezza dell'insieme dei numeri reali, ricordiamo che i numeri reali si possono definire come sezioni del campo dei razionali, e poi si può dimostrare che ogni successione di Cauchy di numeri reali è convergente.

Viceversa, i numeri reali si possono definire come classi di equivalenza di successioni di Cauchy di razionali, dopodiché si può dimostrare che ogni sezione del campo dei numeri reali ha un elemento separatore.

CONTINUITÀ DELLA MISURA

La proprietà più importante della misura di Lebesgue è la continuità, di solito enunciata nella forma della numerabile additività (33).

In particolare, se (A_j) è una successione decrescente di insiemi di misura finita, allora

$$\lim_{j\to+\infty} |A_j| = \left|\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j\right|. \tag{24}$$

Verifichiamo la (24) in qualche caso particolare.

IL CASO DEI PLURINTERVALLI

Supponiamo che ciascun A_j sia costituito da un numero finito di ipercubi del tipo $Q_k(z)$ (6), con k e z che possono assumere diversi valori, e poniamo

$$R = \bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j.$$

Per la monotonia della misura, si ha $|R| \leq |A_j|$ per ogni j, dunque

$$|R| \leq \lim_{j\to+\infty} |A_j|. \tag{25}$$

Si noti che il limite al secondo membro esiste perché la successione delle misure degli A_j è monotona.

Resta da dimostrare che la disuguaglianza (25) vale anche con il $\geq$.

A tal fine, osserviamo che l'insieme R è compatto e la sua misura, per definizione, è data da

$$|R| = \inf_{\substack{R\subset A\\ A\,\text{aperto}\\ A\,\text{limitato}}} |A|. \tag{26}$$

Sia dunque A un aperto limitato contenente R. Il complementare $F = \mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso, come pure gli insiemi $A_j \setminus A = A_j \cap F$ per ogni j.

Se questi ultimi insiemi fossero non vuoti per ogni j, allora, per la completezza di $\mathbb{R}^n$, sarebbe non vuota anche la loro intersezione. Si avrebbe cioè

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty}(A_j \setminus A) = R \setminus A \neq \emptyset.$$

Ma ciò non è possibile perché $R \subset A$, dunque deve esistere almeno un j_0 tale che $A_{j_0} \setminus A = \emptyset$. Poiché $A_{j+1} \subset A_j$ per ogni j, ne segue $A_j \setminus A = \emptyset$ per ogni $j \geq j_0$.

Dunque ogni aperto limitato A contenente R contiene anche tutti gli A_j da un certo punto in poi, e perciò soddisfa $|A| > |A_j|$ per $j \geq j_0$.

Passando al limite per $j \to +\infty$ si trova

$$|A| > \lim_{j\to+\infty} |A_j|.$$

Quindi, ricordando la (26), si deduce

$$|R| \geq \lim_{j\to+\infty} |A_j|,$$

come volevasi dimostrare.

Il caso degli aperti

Verifichiamo la (24) nel caso in cui gli A_j sono aperti limitati e non vuoti (se uno di essi è vuoto la conclusione è immediata).

In questo caso non è detto che l'intersezione

$$A = \bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j$$

sia un insieme aperto: dovremo verificare che è un insieme misurabile studiando la sua misura interna e la sua misura esterna.

Poiché gli A_j sono aperti limitati, per la definizione della misura di un aperto esiste per ogni j un plurintervallo $P_j \subset A_j$, unione di un numero finito di ipercubi del tipo $Q_k(z)$ e tale che

$$|A_j \setminus P_j| = |A_j| - |P_j| < \frac{\varepsilon}{2^j}. \qquad (27)$$

L'uguaglianza nella (27) si ottiene ponendo $B = A_j$ e $K = P_j$ nella (21). Per proseguire con la presente dimostrazione, poniamo

$$F_j = \bigcap_{i=1}^{j} P_i.$$

Siccome per ipotesi $A_j \subset A_i$ per ogni $i \leq j$, risulta

$$A_j \setminus F_j \subset \bigcup_{i=0}^{j} (A_i \setminus P_i).$$

Ma poiché i P_j sono stati presi in modo da soddisfare la (27), e per la subadditività (18) della misura degli aperti limitati, si ha

$$|A_j| - |F_j| = |A_j \setminus F_j| < \sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon. \qquad (28)$$

Posto

$$F = \bigcap_{j=1}^{+\infty} F_j = \bigcap_{j=1}^{+\infty} P_j,$$

per la (25) risulta $\lim_{j\to+\infty} |F_j| = |F|$ e pertanto, passando al limite nella (28), troviamo $\lim_{j\to+\infty} |A_j| \leq |F| + \varepsilon$.

Poiché F è un compatto contenuto in A, ne segue che $\lim_{j\to+\infty} |A_j| \leq m_{\mathrm{i}}(A) + \varepsilon$. Infine, per l'arbitrarietà di ε si ottiene

$$\lim_{j\to+\infty} |A_j| \leq m_{\mathrm{i}}(A).$$

D'altro canto l'insieme A soddisfa banalmente l'inclusione $A \subset A_j$ per ogni j, e quindi

$$m_{\mathrm{e}}(A) \leq \lim_{j\to+\infty} |A_j|.$$

Dunque A è misurabile, e vale la (24).

subadditività numerabile

Verifichiamo che, data una successione di aperti $A_j \subset \mathbb{R}^n$, e posto

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j, \tag{29}$$

risulta

$$|A| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} |A_j|. \tag{30}$$

A tal fine osserviamo che ciascun plurintervallo $P_k(A)$, definito come nella (15), può essere "frantumato e smistato" come descritto a pag. L20.

In sintesi, gli ipercubi $Q_k(z)$ che costituiscono $P_k(A)$ vengono scritti come unione di ipercubi $Q_{k_0}(z)$, con $k_0 \geq k$, ciascuno dei quali risulta incluso in un A_j.

Per compattezza, solo un numero finito di aperti A_j interviene nello smistamento. Se ne deduce, a maggior ragione, che

$$P_k(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} |A_j|,$$

e facendo tendere k a $+\infty$ si ricava la (30).

Verifichiamo ora che, data una successione di insiemi limitati E_k, non necessariamente misurabili, se l'insieme

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$$

è limitato, allora risulta

$$m_e(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} m_e(E_j). \tag{31}$$

A tal fine, fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere per ciascun E_j un aperto $A_j \supset E_j$ tale che

$$A_j \leq m_e(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Definito l'aperto A come nella (29), risulta $E \subset A$, e, per la (30),

$$m_e(E) \leq |A| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} |A_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{+\infty} m_e(E_j) \right) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, la (31) segue.

Superadditività numerabile

Verifichiamo che, data una successione di insiemi E_k, non necessariamente misurabili ma a due a due disgiunti, se l'insieme

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j,$$

è limitato, allora si ha

$$m_{\mathrm{i}}(E) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} m_{\mathrm{i}}(E_j). \tag{32}$$

A tal fine, fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo per ciascun E_j un compatto $K_j \subset E_j$ tale che

$$m_{\mathrm{i}}(E_j) \leq |K_j| + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Per ogni $N = 1, 2, \dots$ il compatto R_N dato da

$$R_N = \bigcup_{j=1}^{N} K_j$$

è incluso in E. Inoltre, essendo i K_j a due a due disgiunti ed in numero finito, per la (19) si ha

$$m_{\mathrm{i}}(E) \geq |R_N| = \sum_{j=1}^{N} |K_j|.$$

Facendo tendere N a $+\infty$ si ricava

$$m_{\mathrm{i}}(E) \geq \left(\sum_{j=1}^{+\infty} m_{\mathrm{i}}(E_j) \right) - \varepsilon,$$

da cui la (32) segue per l'arbitrarietà di ε.

Numerabile additività

La proprietà più importante della misura di Lebesgue è la numerabile additività: data una successione di insiemi misurabili E_k, a due a due disgiunti, l'insieme

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$$

è misurabile, e si ha

$$|E| = \sum_{k=1}^{+\infty} |E_k|. \tag{33}$$

Tale proprietà si può equivalentemente esprimere sotto forma di continuità della misura: vedere ad esempio a pag. L25.

Verifichiamo la (33) nel caso particolare in cui l'insieme E è limitato. Per la (32) si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |E_k| \leq m_{\mathrm{i}}(E)$$

e per la (31)

$$m_{\mathrm{e}}(E) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |E_k|.$$

La tesi segue.

Insiemi notevoli

Un aperto la cui frontiera ha misura positiva

Per cominciare a farsi un'idea della portata e delle conseguenze della teoria della misura, è importante studiare alcuni esempi particolarmente significativi.

In questo paragrafo consideriamo un classico esempio di insieme aperto la cui frontiera ha misura positiva.

Ciò è notevole perché nei casi più comuni, come ad esempio se l'aperto è un cerchio, la frontiera ha misura nulla.

Per costruire un aperto la cui frontiera ha misura positiva consideriamo una corrispondenza biunivoca $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap (0,1)$ e, per ogni $\varepsilon \in (0,+\infty)$, indichiamo con A_ε l'aperto definito come segue:

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(q(n) - \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}},\, q(n) + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right).$$

Per la subadditività della misura di Lebesgue, la misura di A_ε soddisfa la disuguaglianza

$$|A_\varepsilon| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon. \tag{34}$$

D'altro canto, per la densità dell'insieme dei numeri razionali in quello dei reali, la chiusura $\overline{A}_\varepsilon = A_\varepsilon \cup \partial A_\varepsilon$ contiene l'intervallo $[0,1]$.

In altri termini, ogni punto di tale intervallo o è un punto di A_ε, o se no, essendo limite di un'opportuna successione di numeri razionali, è un punto di accumulazione di A_ε, dunque $[0,1] \subset \overline{A}_\varepsilon$.

Per la monotonia della misura, ne segue che $1 \leq |\overline{A}_\varepsilon|$. Inoltre, per l'additività della misura, risulta $|A_\varepsilon \cup \partial A_\varepsilon| = |A_\varepsilon| + |\partial A_\varepsilon|$, e quindi $1 \leq |A_\varepsilon| + |\partial A_\varepsilon|$. Infine, ricordando la (34), possiamo scrivere

$$|\partial A_\varepsilon| \geq 1 - 2\varepsilon.$$

È chiaro dunque che se ε è minore di $\frac{1}{2}$, l'aperto A_ε ha misura positiva. Inoltre, con $\varepsilon < \frac{1}{4}$ si è certi che la misura di A_ε è più piccola di quella della sua frontiera!

Un aperto non misurabile secondo Peano-Jordan

Verifichiamo che per $\varepsilon < \frac{1}{2}$ l'aperto A_ε non è misurabile secondo Peano-Jordan. Un altro esempio è dato dalla (4).

Per stimare la misura interna di A_ε (secondo Peano-Jordan), consideriamo un numero finito di intervalli chiusi contenuti in esso.

Per la definizione della misura di Lebesgue di un aperto, la misura dell'unione di tali intervalli non supera $|A_\varepsilon|$, e quindi non supera 2ε. Di conseguenza, anche la misura interna di A_ε secondo Peano-Jordan non supera 2ε.

Per stimare la misura esterna di A_ε secondo Peano-Jordan dobbiamo considerare invece un arbitrario ricoprimento di A_ε fatto con un numero finito di intervalli chiusi e limitati.

L'unione di tali intervalli è chiusa, dunque contiene la chiusura di A_ε la quale a sua volta contiene l'intervallo $[0, 1]$. Dunque la misura del ricoprimento considerato (e quindi la misura esterna di A_ε) dev'essere almeno 1.

Se, come annunciato, prendiamo $\varepsilon < \frac{1}{2}$, la misura interna di A_ε secondo Peano-Jordan differisce da quella esterna, e quindi A_ε non è misurabile secondo Peano-Jordan (mentre tutti gli aperti sono misurabili secondo Lebesgue).

Misura positiva, e interno vuoto

L'aperto A_ε viene solitamente utilizzato per verificare che l'insieme dei numeri razionali ha misura nulla: risulta infatti

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1) \subset A_\varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Da ciò segue che l'insieme

$$E = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$$

ha misura 1. Ciò è notevole giacché $\mathring{E} = \emptyset$.

Verifichiamo che, come vuole la definizione della misura interna, esistono sottoinsiemi compatti di E la cui misura è vicina ad 1 tanto quanto si vuole: basta prendere

$$\begin{aligned} K_{j,\varepsilon} &= \left[\tfrac{1}{j}, 1 - \tfrac{1}{j}\right] \setminus A_\varepsilon \\ &= \left[\tfrac{1}{j}, 1 - \tfrac{1}{j}\right] \cap (\mathbb{R} \setminus A_\varepsilon). \end{aligned}$$

L'insieme limitato $K_{j,\varepsilon}$ è chiuso perché intersezione di due chiusi. Risulta inoltre

$$\left[\tfrac{1}{j}, 1 - \tfrac{1}{j}\right] \subset K_{j,\varepsilon} \cup A_\varepsilon,$$

e quindi, per la monotonia e l'additività della misura,

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{2}{j} &\leq |K_{j,\varepsilon}| + |A_\varepsilon| \\ &\leq |K_{j,\varepsilon}| + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui segue che $|K_{j,\varepsilon}| \geq 1 - \frac{2}{j} - 2\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di $j = 1, 2, \ldots$ e di $\varepsilon > 0$, si conclude che esistono compatti $K_{j,\varepsilon} \subset E \subset (0, 1)$ di misura vicina ad 1 tanto quanto si vuole e con interno vuoto.

RIFERIMENTI AL LIBRO DI TESTO [7]

Misura di Peano-Jordan: formule (79.15), (79.16) e (79.18), pag. 416

Subadditività (18) della misura: formula (87.8), pag. 457

Additività finita (19): formula (87.12), pag. 457

Insieme non misurabile secondo Peano-Jordan: pagg. 417 e 463 (esempio 1)

Misura interna, misura esterna, e relazione fra di esse: pag. 456

Insiemi misurabili limitati: pag. 456

Insiemi illimitati: pag. 459

Numerabile additività: formula (88.10), pag. 461

Continuità (24) della misura: formula (88.27), pag. 464

Insieme non misurabile secondo Lebesgue: esempio 7, pagg. 467-468

Sviluppo di un aperto in serie di chiusi: pag. 494

Interpretazione geometrica dell'integrale: formula (91.20), pag. 496

Bibliografia

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Portale:Matematica

[2] Piccola storia del calcolo infinitesimale. Una mostra de *il Giardino di Archimede* allestita al Palazzo delle Scienze, in via Ospedale 72, Cagliari.

[3] L. Amerio. Analisi matematica, vol. 2 e vol. 3-parte prima. UTET (515 AME, Aa VII 29, Aa XIII 14 2).

[4] G. T. Bagni. Storia della matematica. Pitagora (500.9 BAG).

[5] C. B. Boyer. Storia della matematica. Mondadori (AMS 01 45,52,53).

[6] R. Courant, H. Robbins. Che cos'è la Matematica? Boringhieri (500.9 COU).

[7] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi Matematica due. Liguori.

[8] E. Giusti. Analisi matematica, vol. 2. Boringhieri.

[9] M. Kline. Storia del pensiero matematico. Einaudi (AMS 01 43,44).

[10] H. L. Lebesgue. *Intégrale, longueur, aire.* Annali di Mat. (3) **7** (1902), 231–359.

[11] A. Loi. Appunti di topologia generale. http://loi.sc.unica.it

[12] C. D. Pagani, S. Salsa. Analisi matematica. Masson/Zanichelli.

[13] E. Paolini. *Il paradosso di Banach-Tarski.* http://pagine.dm.unipi.it/paolini/diletto/banach-tarski/banach-tarski.pdf

[14] C. Pucci. Istituzioni di Analisi Superiore. Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.

[15] H. L. Royden. Real analysis, MacMillan.

[16] W. Rudin. Analisi reale e complessa. Boringhieri.

[17] C. Sbordone. Integrazione astratta. In appendice a: H. Brézis, Analisi funzionale, Liguori.

[18] T. Tao. An introduction to measure theory. http://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf