Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Soluzioni classiche

Esercizi

1) Trovare tutte le soluzioni classiche dell'equazione differenziale $y'(x) = 0$ aventi per dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

2) Trovare almeno una soluzione classica delle seguenti equazioni differenziali: (a) $y'(x) = y(x)$; (b) $y''(x) = -y(x)$; (c) $y''(x) = y'(x)$ (in quest'ultimo caso, si suggerisce di considerare la funzione $z(x) = y'(x)$).

(continua a fianco)

3) (a) Indicata con g una costante positiva, trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(x) = -g$.
(b) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = -g, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(c) Dare un'interpretazione fisica della soluzione $y(x)$, spiegando cosa possono rappresentare le variabili x e y.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Problema di Cauchy

Esercizi

1) Trovare, se esiste, una soluzione dei seguenti problemi:

$$\text{(a)} \begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2) Stabilire se esistono anche altre soluzioni oltre a quella eventualmente trovata.

(continua a fianco)

3) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $y' = 2xy/(x^2 - 1)$ ([BPS], pag. 16, n. 5).

[BPS] M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa,
Analisi Matematica 2, Zanichelli.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Eq. lineari del I ordine

Esercizi

1) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare, omogenea, del primo ordine, in forma normale: $y' = 3y$ ([MS], pag. 204/139, n. 4.7).

2) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare, non omogenea, del primo ordine, in forma normale: $y' = -y + e^{-x}$ ([MS], pag. 205/140, n. 4.9).

(continua a fianco)

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy ([MS], pag. 207/141, n. 4.11):

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^3 \\ y(1) = 1/5 \end{cases}$$

[MS] P. Marcellini, C. Sbordone,
Esercitazioni di matematica, vol. 2, parte I, Liguori/
Esercitazioni di analisi matematica due, prima parte,
Zanichelli.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Cambiam. di variabile

Esercizi

1) Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione $F_\alpha \colon C^2(\mathbb{R}) \to C^2(\mathbb{R})$ che alla generica funzione $y \in C^2(\mathbb{R})$ associa la funzione $z \in C^2(\mathbb{R})$ data da

$$z(x) = e^{\alpha x}\, y(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Stabilire come deve essere preso α affinché F_α risulti lineare e biunivoca, ed in tal caso verificare che l'applicazione inversa F_α^{-1} soddisfa l'uguaglianza $F_\alpha^{-1}(z) = F_{-\alpha}(z)$ per ogni $z \in C^2(\mathbb{R})$.

(continua a fianco)

2) Siano a, b, c tre numeri reali, con $a \neq 0$. Verificare che una funzione $y \in C^2(\mathbb{R})$ è una soluzione classica dell'equazione differenziale

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se e solo se la funzione $z(x) = e^{bx/2a}\, y(x)$ soddisfa l'equazione

$$z'' = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\, z.$$

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Indipendenza lineare

Esercizi

1) (a) Stabilire se le funzioni $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = x^2$ sono elementi linearmente indipendenti dello spazio vettoriale $C^2(\mathbb{R})$. (b) Risolvere l'equazione $W(x) = 0$ nel campo dei numeri reali, essendo $W(x)$ il determinante dato da

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \tag{1}$$

(continua a fianco)

2) (a) Fissati tre numeri reali a, b, c, con $a \neq 0$, e indicate con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ in } \mathbb{R},$$

verificare che il determinante $W(x)$ dato dalla (1) soddisfa l'equazione $a\,W'(x) + b\,W(x) = 0$ in $\mathbb{R}$. (b) Risolvere l'equazione $W(x) = 0$ nel campo dei numeri reali.

3) Trovare, se possibile, dei numeri interi e positivi $n_1 < \ldots < n_k$ tali che le k funzioni $y_i(x) = x^{n_i}$, per $i = 1, \ldots, k$, siano elementi linearmente *dipendenti* dello spazio vettoriale $C^2(\mathbb{R})$. Il valore di k può essere scelto a piacere.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Metodo di somiglianza

Esercizi

Si consideri la funzione

$$y(x) = A\,\cos \omega x + B\,\operatorname{sen} \omega x, \tag{1}$$

con A, B e ω costanti.

1) Applicando le consuete regole di derivazione, trovare le derivate $y'(x)$ e $y''(x)$.

(continua a fianco)

2) Fissata $\omega \neq 1$, determinare A e B in modo tale che la funzione $y(x)$ data dalla (1) soddisfi l'equazione differenziale

$$y'' = -y + \cos \omega x. \tag{2}$$

Suggerimento: sostituire $y(x)$ e $y''(x)$ nella (2).

3) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale (2) nell'ipotesi che $\omega \neq 1$.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Unicità della soluzione

Esercizi

1) Trovare una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \text{ per } x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

sapendo che la funzione $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ soddisfa l'uguaglianza $f(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(continua a fianco)

2) Supponiamo, inoltre, che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esista la derivata parziale $f_y(x, y)$, e che esista $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_y(x, y)| \le L.$$

Indicata con $y(x)$ una qualunque soluzione limitata del problema (1) in un intervallo $(-\delta, \delta)$, con $\delta > 0$, e posto

$$M = \sup_{x\in(-\delta,\delta)} |y(x)|,$$

verificare che $|y(x)| \le M\, L^k\, |x|^k/k!$ per ogni $x \in (-\delta, \delta)$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$. Suggerimento: applicare il teorema di Lagrange ad f e procedere per induzione.

3) Passare al limite per $k \to +\infty$ e dedurre l'unicità della soluzione.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Convergenza uniforme

Esercizi

Si consideri la successione di funzioni $y_k(x) = x^k$ per $x \in (0, 1)$.

(a) Per ogni $x \in (0, 1)$, calcolare il limite $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k(x)$.

(b) Indicata con $y(x)$ la funzione limite, stabilire se $y_k \to y$ uniformemente in $(0, 1)$.

(continua a fianco)

(c) Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 y_k(x)\, dx = \int_0^1 y(x)\, dx.$$

(d) Stabilire come deve essere preso il secondo estremo $b < 1$ affinché $y_k \to y$ uniformemente nell'intervallo $(0, b)$.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Densità di Cauchy

Esercizi

Si consideri la successione delle funzioni $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da

$$f_k(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{k}{x^2 + k^2}.$$

(a) Stabilire per quali valori di $k = 1, 2, \ldots$ la funzione f_k è integrabile nel senso improprio (detto anche generalizzato) di Riemann sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

(continua a fianco)

(b) Indicato con $f(x)$ il limite puntuale di $f_k(x)$ per $k \to +\infty$, stabilire se f_k tende uniformemente ad f sull'insieme $\mathbb{R}$.

(c) Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Derivazione

Esercizi

1) Stabilire per quali valori di $k = 1, 2, \ldots$ appartiene alla classe $C^1(\mathbb{R})$ la funzione $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}\,.$$

2) Determinare il limite puntuale di f_k per $k \to +\infty$.

(continua a fianco)

3) Indicata con f la funzione limite, stabilire se f_k tende ad f uniformemente(*) sull'insieme $\mathbb{R}$.

4) Determinare la successione numerica delle derivate $f_k'(x_0)$ nel punto $x_0 = 0$.

5) Stabilire se la funzione limite f è derivabile nel punto $x_0 = 0$, ed in caso affermativo stabilire se sussiste l'uguaglianza

$$f'(0) = \lim_{k\to+\infty} f_k'(0).$$

(*)Esempio 3, pag. 22, in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Serie di potenze

Esercizi

Scrivere le serie di Maclaurin delle seguenti funzioni:

$$e^x, \qquad \log(1-x), \qquad \frac{1}{1-x}, \qquad \operatorname{sen} x, \qquad \cos x$$

e determinarne il raggio di convergenza.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Teorema di Abel(*)

Esercizi

1) Indicati con x ed y due numeri reali soddisfacenti la disuguaglianza $|x|, |y| < \varepsilon$ con un certo $\varepsilon > 0$, stabilire per quali valori di $\lambda \in [0, 1]$ risulta $(1 - \lambda)\, x + \lambda y \geq \varepsilon$.

2) Fissato un polinomio $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k$, definiamo $b_h = a_{h+1}$ per $h = 1, \ldots, n-1$, e $b_0 = a_0 + a_1$. Posto $Q(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-1} b_h\, \lambda^h$, stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)\, a_0 + \lambda\, Q(\lambda). \qquad (1)$$

(continua a fianco)

3) Trovare, se possibile, un numero reale $\varepsilon > 0$ ed un polinomio $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k$ tali che

$$\max_{\lambda \in [0,1]} |P(\lambda)| \geq \varepsilon$$

e

$$\left| \sum_{i=0}^{k} a_i \right| < \varepsilon \text{ per ogni } k = 0, \ldots, n.$$

Suggerimento: esaminare innanzitutto i casi $n = 0$ e $n = 1$, poi procedere per induzione usando la (1).

(*) Cfr. pagg. 71-72 in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Serie di Fourier

Esercizi

1) (a) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$. (b) Sapendo che la suddetta serie converge puntualmente alla funzione generatrice nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, posto $x = \pi/2$ verificare l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

la cui scoperta è attribuita a Leibniz: cfr. [K], pagg. 511-512.

(continua a fianco)

2) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$.

3) (a) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = |x|$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$. (b) Sapendo che la suddetta serie converge alla funzione generatrice uniformemente nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, dunque anche nel punto $x = 0$, verificare l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

trovata da Eulero (cfr. [K], pag. 523).

[K] M. Kline, Storia del pensiero matematico (vol. I), Einaudi.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Serie armonica gener.

Esercizi

1) Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$.

2) Sapendo che la suddetta serie converge alla funzione generatrice uniformemente nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, dunque anche nei punti $x = 0$ e $x = \pi$, verificare le uguaglianze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La seconda è attribuita a Eulero da M. Kline in *Storia del pensiero matematico*, Einaudi (vol. I, pag. 524).

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Punti fissi

Esercizi

1) Digitando un numero a piacere in una comune calcolatrice elettronica, e premendo ripetutamente il tasto di radice quadrata ($\sqrt{\ }$) si genera una successione di valori numerici: stabilire se essa ammette limite, ed in caso affermativo calcolarlo. Suggerimento: fare materialmente delle prove.

2) Posto $f(x) = x + e^x$, stabilire se l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione reale, ed in caso affermativo stabilire quante sono. Suggerimento: calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e sfruttare la continuità e la monotonia di $f(x)$.

(continua a fianco)

3) Determinare le prime tre cifre decimali della soluzione reale dell'equazione $x = -e^x$. Suggerimento:(*) digitare un numero a piacere x_0 in una calcolatrice scientifica e calcolare $x_{k+1} = -e^{x_k}$ per $k = 0, 1, 2, \ldots$

(*) Lo studente è autorizzato ad utilizzare tutte le proprie conoscenze, ivi comprese, se lo preferisce, quelle acquisite in occasione di altri corsi universitari.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
La norma-p in $\mathbb{R}^2$

Esercizi

Siano a e b due numeri reali soddisfacenti le disuguaglianze $0 \le a \le b$. Stabilire se esiste il limite

$$\lim_{p \to +\infty} \sqrt[p]{a^p + b^p}$$

ed in caso affermativo calcolarlo.(*)

(*) Cfr. pag. 97 in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Teorema di Cauchy

Esercizi

Fissata una funzione continua $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ed un numero $y_0\in\mathbb{R}$, si consideri l'applicazione $F\colon C^0([0,1])\to C^0([0,1])$ che alla funzione $y\in C^0([0,1])$ associa la funzione $z\in C^0([0,1])$ data da

$$z(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))\, dt. \tag{1}$$

(continua a fianco)

Supponiamo che esista una costante L tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

per ogni $x\in[0,1]$ ed ogni $y_1, y_2\in\mathbb{R}$ (condizione di Lipschitz).

1) Stabilire se l'applicazione F è una contrazione.(*)

2) Stabilire se esiste $b\in(0,1)$ tale che l'applicazione $F\colon C^0([0,b])\to C^0([0,b])$ data dalla (1) sia una contrazione.

(*)Cfr. pag. 106 in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Integrale di Riemann

Esercizi

1) Stabilire se la funzione f data da

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x\ge 0,\\ 0, & \text{se } x<0 \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[-2,1]$, ed in caso affermativo calcolarne l'integrale.

2) Indichiamo con $T = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ y\in[0,\,1-x]\,\}$ il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

(continua a fianco)

Fissato un numero naturale k, indichiamo con

$$P_k \quad = \bigcup_{Q_k(i,j)\subset T} Q_k(i,j)$$

l'unione di tutti i quadrati di lato 2^{-k} aventi la forma(*)

$$Q_k(i,j) = \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\times\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \text{ con } i,j\in\mathbb{Z}$$

e inclusi nel triangolo T. (a) Trovare l'area $|P_k|$ del plurirettangolo P_k. Suggerimento: è più facile trovare l'area dell'insieme $T\setminus P_k$. (b) Calcolare il $\lim\limits_{k\to+\infty}|P_k|$ e stabilire se tale limite coincide con l'area di T.

(*)Cfr. formula (91.3), pag. 494 in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Distanza da un chiuso

Esercizi

La distanza $\mathrm{dist}(P, F)$ di un punto $P \in \mathbb{R}^n$ da un sottoinsieme chiuso e non vuoto $F \subset \mathbb{R}^n$ è, per definizione, la distanza di P dal (o dai) punto/i di F più vicino/i a P.

1) Trovare la distanza di $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ dall'asse x.

2) Trovare la distanza del punto $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ dal grafico della funzione $y = \cos x$.

3) Fissato un sottoinsieme chiuso e non vuoto $F \subset \mathbb{R}^n$, stabilire come devono essere presi i punti P, $Q \in \mathbb{R}^n$

(continua a fianco)

affinché risulti

$$\mathrm{dist}(P, F) \le \|P - Q\| + \mathrm{dist}(Q, F). \qquad (1)$$

Suggerimento: prendere un punto $H \in F$ che sia il più vicino possibile a Q, e usare la disuguaglianza triangolare.

4) Fissato un sottoinsieme chiuso e non vuoto $F \subset \mathbb{R}^n$, stabilire se esiste una costante L tale che per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^n$ risulti

$$|\,\mathrm{dist}(P, F) - \mathrm{dist}(Q, F)| \le L\,\|P - Q\|.$$

Suggerimento: scambiare P con Q nella (1). Cfr. Proposizione 4, pag. 85, in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Unione e intersezione

Esercizi

1) Siano $B_2(-1, 0)$ e $B_2(1, 0)$ i dischi aperti di raggio 2 centrati nei punti di coordinate $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. (a) Indicato con Q il quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, stabilire se $Q \subset B_2(-1, 0) \cup B_2(1, 0)$. (b) Stabilire se esiste un valore $x_0 \in (-1, 1)$ tale che valgano entrambe le seguenti inclusioni:

$$\{\, (x, y) \in Q \mid x \le x_0 \,\} \subset B_2(-1, 0),$$

$$\{\, (x, y) \in Q \mid x \ge x_0 \,\} \subset B_2(1, 0).$$

(continua a fianco)

2) Stabilire per quali valori di $k = 0, 1, 2, \ldots$ l'intervallo $I_k = [k, +\infty)$ è un sottoinsieme chiuso dell'insieme dei numeri reali.

3) Determinare la misura di Lebesgue dell'intervallo I_k per ciascun valore di k.

4) Determinare la misura di Lebesgue dell'insieme X dato da

$$X = \bigcap_{k=0}^{+\infty} I_k.$$

Suggerimento: cercare innanzitutto di individuare (se esiste) almeno un punto dell'insieme X. Cfr. esempio 3, pag. 465, in: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Funzioni misurabili

Esercizi

Diciamo che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è misurabile se la controimmagine $f^{-1}((t, +\infty))$ dell'intervallo aperto $(t, +\infty)$ è un insieme misurabile, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$.

1) Trovare, se possibile, una funzione misurabile $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed un intervallo chiuso $[t_0, +\infty)$ tali che la controimmagine $f_0^{-1}([t_0, +\infty))$ non risulti misurabile. Suggerimento: l'intervallo chiuso $[t_0, +\infty)$ è l'intersezione degli intervalli aperti $(t_0 - \frac{1}{k}, +\infty)$ per $k = 1, 2, \ldots$

(continua a fianco)

2) Si consideri una successione di funzioni misurabili $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monotona nel senso che $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$. (a) Trovare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ in corrispondenza dei quali esiste il limite

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x).$$

(b) Indicato con $f(x)$ il suddetto limite, e supponendo che risulti $f(x) < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che la controimmagine $E = f^{-1}((t, +\infty))$ sia un insieme misurabile. Suggerimento: l'insieme E è l'unione degli $E_k = f_k^{-1}((t, +\infty))$. (c) Trovare una particolare successione monotona di funzioni misurabili f_k tali che l'insieme $X = f^{-1}([0, +\infty))$ non sia l'unione degli $X_k = f_k^{-1}([0, +\infty))$.

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Somma e rapporto

Esercizi

1) Fissato $c \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione costante $f_c(x) = c$ per ogni $x \in (-\infty, +\infty)$. Stabilire come deve essere preso c affinché f_c risulti misurabile.

2) Stabilire se è misurabile la funzione caratteristica $\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'insieme dei numeri razionali:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(continua a fianco)

3) Fissate due funzioni misurabili $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ e di $q \in \mathbb{Q}$ sono misurabili entrambi gli insiemi A_q e $B_{t,q}$ dati da

$$A_q = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) > q \,\},$$

$$B_{q,t} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid q > t - g(x) \,\}.$$

4) Fissati due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, con $a + b > 0$, stabilire se esiste un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ che soddisfi entrambe le disuguaglianze $a > q$ e $b > -q$.

5) Data una funzione $g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, misurabile e positiva, stabilire per quali valori di $q \in \mathbb{Q}$ risulta misurabile l'insieme

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid 1/g(x) > q \,\}.$$

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Passaggio al limite

Esercizi

1) Data una funzione misurabile e non negativa $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, stabilire se

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Suggerimento: applicare il teorema della convergenza monotona alla successione $f_k(x) = f(x)\, \chi_{(-\infty,k)}(x)$, dove $\chi_{(-\infty,k)}$ denota la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty, k)$.

(continua a fianco)

2) Si considerino le funzioni non negative $f_k\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ date da

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 + (-1)^k, & \text{se } x \in (-\infty, 0); \\ 1 - (-1)^k, & \text{se } x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Stabilire, calcolando gli integrali, se sussiste la disuguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\liminf_{k \to +\infty} f_k(x) \Big)\, dx \le \liminf_{k \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, dx.$$

Analisi Matematica 3
prof. Antonio Greco
Derivazione

Esercizi

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ per $x > 0$.

1) Stabilire per quali $s \in (0, +\infty)$ il prodotto $e^{-sx}\, f(x)$ è sommabile in dx secondo Lebesgue (ha integrale finito) sull'intervallo $(0, +\infty)$. Suggerimento: sfruttare la disuguaglianza $f(x) < 1$ per $x > 0$.

(continua a fianco)

2) Determinare tutti i valori di $s \in (0, +\infty)$ in corrispondenza dei quali sussiste l'uguaglianza

$$\frac{d}{ds} \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\, f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \Big(\frac{d}{ds}\, e^{-sx} \Big)\, f(x)\, dx.$$

3) Calcolare il limite

$$\lim_{s \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\, f(x)\, dx.$$

Analisi Matematica 3 prof. Antonio Greco G. Fubini, L. Tonelli

Esercizi

Indicati con A e B gli intervalli $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$, e posto $E = (A \cup B) \times B$, si consideri la funzione $f \colon E \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \frac{|x|}{xy}.$$

1) Stabilire se f è misurabile, e calcolare gli integrali

$$\int_{A \times B} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \int_{B \times B} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \int_E |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

(continua a fianco)

2) Stabilire se è ben definito l'integrale di Lebesgue

$$\int_E f(x, y)\, dx\, dy.$$

3) Stabilire, calcolando i seguenti integrali, se sussiste l'uguaglianza

$$\int_{A \cup B} \left(\int_B f(x, y)\, dy \right) dx \ = \int_B \left(\int_{A \cup B} f(x, y)\, dx \right) dy.$$