L'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN

Tutto ciò che ho sempre desiderato sapere...
e non ho mai osato chiedere

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

14-5-2018

Indice

PREFAZIONE

Questa dispensa, ancora nello stato di bozza da verificare e completare, scaturisce da diverse esigenze:

1) rispondere alla domanda "cosa c'è di male se divido l'intervallo di integrazione in parti uguali?"

2) semplificare la vita agli studenti che, nel breve tempo concesso al corso, vogliono studiare la definizione dell'integrale di Riemann,

3) capire il teorema di Lebesgue-Vitali, enunciato dal prof. Mandras quando ero studente...

Sia chiaro che la vera "semplificazione" consiste nel prendere per buona la definizione semplificata (con l'intervallo suddiviso in parti uguali) e non leggere le prossime pagine...

Integrali semplici

DUE IMPOSTAZIONI A CONFRONTO

Nel definire l'integrabilità di una funzione secondo Riemann si possono seguire equivalentemente le seguenti due impostazioni.

Le illustriamo, per semplicità, con riferimento ad una funzione limitata f di una variabile reale x.

Impostazione usuale: si divide l'intervallo di integrazione (a, b) in m intervalli tramite i punti

$$a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_m = b$$

non necessariamente equidistanti, e si fa tendere a zero la cosiddetta norma della decomposizione, cioè la quantità δ data da

$$\delta = \max_{h=1,\ldots,m} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}). \qquad (1)$$

Impostazione semplificata: si divide l'intervallo (a, b) in n intervalli aventi tutti la stessa lunghezza, e si fa tendere n all'infinito.

In questo caso i punti di divisione sono

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \ldots, n. \qquad (2)$$

VANTAGGI E SVANTAGGI DELL'IMPOSTAZIONE SEMPLIFICATA

L'impostazione semplificata presenta alcuni vantaggi:

1) non c'è bisogno di studiare cos'è la “norma della decomposizione”;

2) si fa un limite per $n \to +\infty$, che è più congeniale del limite per $\delta \to 0$, dato il particolare significato di δ;

3) non si corre il rischio di dire che “il numero dei punti di suddivisione deve tendere all'infinito” dimenticandosi di dire che $\delta \to 0$.

L'impostazione semplificata mostra i suoi limiti quando si voglia dimostrare l'additività dell'integrale.

Infatti, dividendo gli intervalli (a, b) e (b, c) in parti uguali, non è detto che l'intervallo (a, c) risulti anch'esso suddiviso in parti uguali.

Per dimostrare l'additività dell'integrale conviene considerare suddivisioni in parti non necessariamente tutte uguali fra loro.

Tuttavia l'impostazione semplificata, e la dimostrazione di equivalenza, rispondono alla naturale curiosità: “cosa c'è di male se divido l'intervallo in parti uguali?”

Verifichiamo che le due impostazioni sono equivalenti fra loro.

Prima parte. Supponiamo che f risulti integrabile nell'impostazione usuale, e poniamo

$$\ell = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Preso $\varepsilon > 0$, vogliamo dimostrare che esiste n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ risulta

$$\left| \ell - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon \qquad (3)$$

indipendentemente dalla scelta dei punti $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$, dove gli x_i sono come nella (2).

Per ipotesi esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, comunque si prendano punti di suddivisione $\tilde{x}_h$ soddisfacenti la condizione

$$\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1} < \delta_\varepsilon \quad \text{per } h = 1, \dots, m$$

e comunque si scelga $\tilde{x}_h^* \in (\tilde{x}_{h-1}, \tilde{x}_h)$ si ha

$$\left| \ell - \sum_{h=1}^{m} f(\tilde{x}_h^*)\,(\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \right| < \varepsilon$$

essendo m il numero degli intervalli della suddivisione.

Possiamo dunque prendere i punti x_i come nella (2) purché

$$n > n_\varepsilon = \frac{b-a}{\delta_\varepsilon},$$

e la (3) è soddisfatta, concludendo così la prima parte della dimostrazione.

Seconda parte. Supponiamo che f risulti integrabile nell'impostazione semplificata. Vogliamo dimostrare che f è integrabile nel senso usuale.

A tal fine indichiamo con $\mathcal{D} = \{\, a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_m = b \,\}$ una qualunque suddivisione dell'intervallo di integrazione (a, b) in m parti, non necessariamente uguali. Posto

$$\underline{S}_m = \sum_{h=1,\dots,m} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \inf_{\tilde{I}_h} f$$

e

$$\overline{S}_m = \sum_{h=1,\dots,m} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \sup_{\tilde{I}_h} f$$

con $\tilde{I}_h = (\tilde{x}_{h-1},\, \tilde{x}_h)$, è noto che i limiti di $\underline{S}_m$ e di $\overline{S}_m$ per $\delta \to 0^+$ esistono, e coincidono rispettivamente con

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_m \quad \text{e} \quad \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}_m,$$

dove gli estremi superiore e inferiore sono fatti al variare di m nell'insieme $\mathbb{Z}^+$, ed al variare della suddivisione $\mathcal{D}$ in tutti i modi possibili. Si ha, inoltre

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_m \le \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}_m. \qquad (4)$$

È noto inoltre che la funzione f è integrabile secondo Riemann se e solo se sussiste l'uguaglianza

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_m = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}_m. \qquad (5)$$

Per dimostrare la (5) fissiamo innanzitutto un intero positivo n e suddividiamo l'intervallo di integrazione (a, b) in n parti uguali tramite i punti x_i dati dalla (2).

Consideriamo ora una suddivisione arbitraria $\mathcal{D} = \{ a = \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_m = b \}$ dell'intervallo (a, b) in m parti, $m \geq 1$.

I corrispondenti intervalli $\tilde{I}_h = (\tilde{x}_{h-1}, \tilde{x}_h)$ sono di due tipi: alcuni contengono uno o più punti x_i con $i = 1, \ldots, n-1$, altri non ne contengono alcuno.

Dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \underline{S}_m &= \sum_{\substack{h=1,\ldots,m \\ \tilde{I}_h \cap \{x_1,\ldots,x_{n-1}\} \neq \emptyset}} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \inf_{\tilde{I}_h} f \\ &+ \sum_{\substack{h=1,\ldots,m \\ \tilde{I}_h \cap \{x_1,\ldots,x_{n-1}\} = \emptyset}} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \inf_{I_h} f \end{aligned}$$

e i termini della prima sommatoria sono al più $n-1$.

Perciò, indicata con δ la norma (1) della decomposizione $\mathcal{D}$, e siccome f è limitata, la prima sommatoria tende a zero quando $\delta \to 0$.

Inoltre un intervallo $\tilde{I}_h$ che non contiene punti x_i è necessariamente incluso in $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ per qualche i, e si ha

$$\inf_{\tilde{I}_h} f \geq \inf_{I_i} f.$$

Quindi l'ultima sommatoria si può riscrivere come segue:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\tilde{I}_h \subset I_i} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \inf_{\tilde{I}_h} f$$

e si può stimare per difetto con

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \inf_{I_i} f \sum_{\tilde{I}_h \subset I_i} (\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\max_{\tilde{x}_h \leq x_i} \tilde{x}_h - \min_{\tilde{x}_h \geq x_{i-1}} \tilde{x}_h) \inf_{I_i} f. \end{aligned}$$

Dunque facendo tendere δ a zero si conclude che

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_m \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{I_i} f.$$

Ora facciamo tendere n all'infinito. Poiché per ipotesi il secondo membro tende ad un limite $\ell \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_m \geq \ell.$$

D'altro canto con un ragionamento analogo si giunge a concludere che

$$\inf_{\mathcal{D}} \overline{S}_m \leq \ell.$$

Ma siccome, in generale, sussiste la disuguaglianza (4), la (5) è dimostrata.

Alternativamente, la seconda parte della dimostrazione si può anche svolgere come segue.

Supponiamo che f risulti integrabile nell'impostazione semplificata. Allora f è limitata.

Per proseguire, invochiamo un celebre risultato della teoria di Lebesgue, il teorema di Lebesgue-Vitali.[†]

Per il teorema di Lebesgue-Vitali, la funzione limitata f è integrabile nel senso usuale se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla. Indicato con

$$\omega(x) = \lim_{r \to 0^+} \Big(\sup_{(x-r,\, x+r)} f \; - \inf_{(x-r,\, x+r)} f \Big)$$

il cosiddetto "salto" della funzione in un punto $x \in (a, b)$, osserviamo che f è continua in x se e solo se $\omega(x) = 0$.

In virtù della numerabile additività della misura, è sufficiente dimostrare che per ogni $\varepsilon_0 > 0$ ha misura nulla l'insieme

$$E_{\varepsilon_0} = \{\, x \in (a, b) \mid \omega(x) > \varepsilon_0 \,\}.$$

Posto $m_0 = |E_{\varepsilon_0}|$, consideriamo ora gli n punti equidistanti dati dalla (2). Poiché si ha

$$|E_{\varepsilon_0}| = \sum_{i=1}^{n} |E_{\varepsilon_0} \cap (x_{i-1}, x_i)|,$$

e poiché la misura di $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ è $(b-a)/n$, il numero ν degli intervalli I_i che intersecano E_{ε_0} soddisfa

$$m_0 \leq \frac{b-a}{n}\, \nu. \tag{6}$$

Questa disuguaglianza ci servirà tra poco. Ora osserviamo che in ciascuno dei ν intervalli I_i che intersecano l'insieme E_{ε_0} esiste, per definizione, almeno un punto x tale che $\omega(x) > \varepsilon_0$.

Quindi prendendo punti $x_i^*, x_i^{**} \in I_i$ sufficientemente vicini ad x possiamo far sì che

$$f(x_k^*) - f(x_k^{**}) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Negli intervalli I_i che non intersecano E_{ε_0} prendiamo a piacere $x_i^* = x_i^{**}$. Così facendo, le somme di Cauchy-Riemann

$$S_n^* = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

e

$$S_n^{**} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{**})$$

soddisfano

$$S_n^* - S_n^{**} \geq \frac{b-a}{n}\, \nu\, \frac{\varepsilon_0}{2}$$

e quindi, per la (6),

$$S_n^* - S_n^{**} \geq m_0\, \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{7}$$

Quando n tende a $+\infty$, poiché S_n^* e S_n^{**} hanno un limite comune ℓ la loro differenza tende a zero, e perciò risulta $m_0 = 0$ come volevasi dimostrare.

Dunque l'impostazione semplificata è equivalente a quella usuale.

[†] Vedere, ad esempio, [7], oppure [5], Teorema 19.12, pag. 271, o anche [10], Chapter 5, Theorem 8, pag. 104.

Integrali doppi

PREMESSA

La dissertazione di Riemann [9] riguarda solo l'integrale semplice.

Secondo Kline [6] (pag. 1122) la teoria riemanniana dell'integrazione fu estesa alle funzioni di due variabili da K. J. Thomae nella comunicazione breve [11].

La suddetta comunicazione fa riferimento, a sua volta, al libro [12] dello stesso Thomae, nel quale il paragrafo 50 (pag. 33) riguarda la definizione dell'integrale doppio.

L'IMPOSTAZIONE SEMPLIFICATA EQUIVALE A QUELLA USUALE

Supponiamo che una funzione $f\colon R \to \mathbb{R}$ sia integrabile nell'impostazione semplificata, e poniamo

$$\ell = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Preso $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, fissiamo un intero positivo n e di conseguenza i punti di suddivisione

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n},$$

$$y_j = c + j\,\frac{d-c}{n}$$

in modo tale che risulti $S_n > \ell - \varepsilon$ per ogni scelta dei punti $\boldsymbol{p}_{ij}^*$.

In tale suddivisione andiamo a fissare i punti $\boldsymbol{p}_{ij}^*$ in modo tale che

$$f(\boldsymbol{p}_{ij}^*) < \inf_{R_{ij}} f + \varepsilon.$$

Confrontiamo con S_n le somme di Cauchy-Riemann definite come di consueto:

$$S = \sum_{h=1}^{m_x}\sum_{k=1}^{m_y} f(\tilde{\boldsymbol{p}}_{hk}^*)(\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1})\,(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}).$$

Gli intervalli $(\tilde{x}_{h-1}, \tilde{x}_h)$ che contengono qualche x_i sono al più $n-1$, come pure gli intervalli $(\tilde{y}_{k-1}, \tilde{y}_k)$ che contengono qualche y_j.

Quando la norma δ della decomposizione tende a zero, la somma delle aree dei loro prodotti cartesiani tende a zero, dunque

$$S = o(1) + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\tilde{R}_{hk}\subset R_{ij}} f(\tilde{\boldsymbol{p}}_{hk}^*)\,|\tilde{R}_{hk}|.$$

Poiché per ogni $\tilde{R}_{hk} \subset R_{ij}$ si ha $f(\tilde{\boldsymbol{p}}_{hk}^*) \geq \inf_{R_{hk}} f \geq \inf_{R_{ij}} f$, possiamo scrivere

$$S \geq o(1) + \sum_{i,j=1}^{n} \inf_{R_{ij}} f \sum_{\tilde{R}_{hk}\subset R_{ij}} |\tilde{R}_{hk}|. \qquad (8)$$

Quando la norma δ della decomposizione tende a zero, si ha

$$\sum_{\tilde{R}_{hk}\subset R_{ij}} |\tilde{R}_{hk}| \to |R_{ij}|$$

e quindi nella (8) risulta

$$\sum_{i,j=1}^{n} \inf_{R_{ij}} f \sum_{\tilde{R}_{hk}\subset R_{ij}} |\tilde{R}_{hk}| \to \sum_{i,j=1}^{n} |\tilde{R}_{ij}|\,\inf_{R_{ij}} f$$

$$> \sum_{i,j=1}^{n} (f(\boldsymbol{p}_{ij}^*) - \varepsilon)\,|\tilde{R}_{ij}| = S_n - \varepsilon\,|R|$$

$$> \ell - \varepsilon\,(1 + |R|),$$

perciò esiste δ_ε tale che se $\delta < \delta_\varepsilon$ si ha

$$S > \ell - \varepsilon\,(2 + |R|).$$

Con un ragionamento analogo si dimostra che esiste δ'_ε tale che se $\delta < \delta'_\varepsilon$ si ha

$$S < \ell + \varepsilon\,(2 + |R|),$$

dunque per la definizione di limite si deduce che $S \to \ell$, e perciò la funzione f è integrabile nel senso usuale, ed il suo integrale coincide con ℓ.

Integrabilità per rettangoli chiusi

Nel testo [2] le somme di Cauchy-Riemann si costruiscono prendendo il punto $\tilde{\boldsymbol{p}}^*_{hk}$ nel rettangolo chiuso $\tilde{R}_{hk}$.

In tal modo è legittimo prendere, ad esempio, $\tilde{\boldsymbol{p}}^*_{hk} = \tilde{\boldsymbol{p}}^*_{h,k+1}$ per un $k < m_y$.

Verifichiamo che se una funzione limitata $f\colon R \to \mathbb{R}$ è integrabile per rettangoli aperti allora lo è anche per rettangoli chiusi. Posto

$$\ell = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

e preso $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, fissiamo un intero positivo n e di conseguenza i punti di suddivisione

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n},$$

$$y_j = c + j\,\frac{d-c}{n}$$

in modo tale che risulti $S_n > \ell - \varepsilon$ per ogni scelta dei punti $\boldsymbol{p}^*_{ij} \in R_{ij} = (x_{i-1},\, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$.

In tale suddivisione andiamo a fissare i punti $\boldsymbol{p}^*_{ij}$ in modo tale che

$$f(\boldsymbol{p}^*_{ij}) < \inf_{R_{ij}} f + \varepsilon.$$

Confrontiamo con S_n le somme di Cauchy-Riemann definite come di consueto:

$$S = \sum_{h=1}^{m_x} \sum_{k=1}^{m_y} f(\tilde{\boldsymbol{p}}^*_{hk})(\tilde{x}_h - \tilde{x}_{h-1})\,(\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}),$$

dove questa volta si intende $\tilde{\boldsymbol{p}}^*_{hk} \in \tilde{R}_{hk} = [x_{h-1},\, x_h] \times [y_{k-1},\, y_k]$.

Gli intervalli $[\tilde{x}_{h-1}, \tilde{x}_h]$ che contengono qualche x_i sono al più $n-1$, come pure gli intervalli $[\tilde{y}_{k-1}, \tilde{y}_k]$ che contengono qualche y_j.

Quando la norma δ della decomposizione tende a zero, la somma delle aree dei loro prodotti cartesiani tende a zero, dunque

$$S = o(1) + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\tilde{R}_{hk} \subset R_{ij}} f(\tilde{\boldsymbol{p}}^*_{hk})\,|\tilde{R}_{hk}|.$$

Poiché per ogni $\tilde{R}_{hk} \subset R_{ij}$ si ha $f(\tilde{\boldsymbol{p}}^*_{hk}) \geq \inf_{R_{hk}} f \geq \inf_{R_{ij}} f$, giungiamo nuovamente alla (8).

Procedendo come a pagina 11 si deduce che $S \to \ell$, e perciò la funzione f è integrabile nel senso usuale, ed il suo integrale coincide con ℓ.

Integrabilità per successioni

Consideriamo una funzione limitata $f\colon R \to \mathbb{R}$.

Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ ed ogni $i, j = 1, \ldots, n$ scegliamo un punto $\boldsymbol{p}^*_{ij} \in R_{ij}$, cosicché rimane individuata la "successione di Cauchy-Riemann"

$$S_n = \frac{|R|}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f(\boldsymbol{p}^*_{ij}).$$

Se tutte le successioni di Cauchy-Riemann ammettono lo stesso limite ℓ, allora f è integrabile e si ha

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \ell.$$

Per la dimostrazione, supponiamo che f non sia integrabile nell'impostazione semplificata.

Per ogni n, le somme di Cauchy-Riemann corrispondenti alle diverse scelte dei punti $\boldsymbol{p}^*_{ij}$ costituiscono un insieme Y_n incluso in un intervallo $[m, M]$ indipendente da n.

Siccome f non è integrabile per ipotesi, l'insieme Y_n non converge ad un punto, dunque esistono almeno due successioni S_{n_k} e $S_{n'_k}$ convergenti a limiti $\ell \neq \ell'$, contro l'ipotesi.

Dunque l'integrabilità per successioni è equivalente all'integrabilità nel senso usuale.

Limitatezza

L'ipotesi che la funzione integranda $f\colon R \to \mathbb{R}$ sia limitata può essere omessa, purché ci si ricordi di precisare che le somme di Cauchy-Riemann devono avere limite finito.

Dimostriamo che se $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora f è limitata.

A tal fine verifichiamo che, se f non è superiormente limitata, è possibile costruire una particolare successione di Cauchy-Riemann $S_n \to +\infty$.

Basta procedere come segue. Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ il dominio di integrazione R risulta suddiviso in n^2 rettangoli, ed in almeno uno di essi, che indichiamo con $R_{i_0 j_0}$, la funzione f non è superiormente limitata.

Innanzitutto scegliamo a piacere i punti $\boldsymbol{p}^*_{ij}$ negli altri $n^2 - 1$ rettangoli.

Poi, sfruttando il fatto che f non è superiormente limitata in $R_{i_0 j_0}$, prendiamo $\boldsymbol{p}^*_{i_0 j_0}$ in modo tale che $S_n > n$.

Ne segue che $S_n \to +\infty$, come volevasi dimostrare.

Definizione tramite la misura di Peano-Jordan

Nel testo [4] la definizione dell'integrale di Riemann compare incidentalmente a pag. 424 e si basa sulla misura di Peano-Jordan.

In sintesi, si considerano le somme

$$s(P) = \sum_{h=1}^{m} |X_h| \inf_{X_h} f$$

$$S(P) = \sum_{h=1}^{m} |X_h| \sup_{X_h} f$$

dove $P = \{ X_1, \dots, X_m \}$ è una qualunque partizione del dominio R costituita da insiemi X_h misurabili secondo Peano-Jordan.

La funzione limitata $f \colon R \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann sul rettangolo R se

$$\sup_P s(P) = \inf_P S(P). \tag{9}$$

Si noti che la dissertazione [9] in cui Riemann introduce l'integrale è del 1854, quando Camille Jordan aveva 16 anni e Giuseppe Peano non era ancora nato.

Si tratta quindi di una riformulazione basata su nozioni introdotte successivamente.

Verifichiamo che se f è integrabile nel senso usuale allora lo è anche in quello suddetto.

È sufficiente osservare che i rettangoli R_{ij} costituiscono una partizione P del rettangolo R, quindi l'integrabilità nel senso usuale (5) implica la (9).

Verifichiamo che se f è integrabile nel senso (9) allora lo è anche in quello usuale.

Fissata una partizione $P = \{ X_1, \dots, X_m \}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ la somma superiore

$$\overline{S}_n = \frac{|R|}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{R_{ij}} f$$

si divide in $m+1$ sommatorie. Raccogliendo i rettangoli R_{ij} inclusi in X_h, per $h = 1, \dots, m$, e infine tutti quelli che contengono punti della frontiera ∂X_h per qualche h si ottiene

$$\overline{S}_n = \frac{|R|}{n^2} \sum_{h=1}^{m} \sum_{R_{ij} \subset X_h} \sup_{R_{ij}} f + o(1)$$

perché f è limitata, e gli insiemi X_h sono misurabili secondo Peano-Jordan e quindi le loro frontiere hanno misura nulla. Ma siccome

$$\frac{|R|}{n^2} \sum_{R_{ij} \subset X_h} \sup_{R_{ij}} f \le \frac{|R|}{n^2} \sum_{R_{ij} \subset X_h} \sup_{X_h} f$$

ed il secondo membro tende al prodotto $|X_h| \sup_{X_h} f$, ne segue che

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n \le S(P).$$

Per l'arbitrarietà di P si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n \le \inf_P S(P).$$

Con un ragionamento analogo si dimostra che

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{S}_n \ge \sup_P s(P),$$

e siccome per ipotesi vale l'uguaglianza (9), ne segue che

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n,$$

dunque f è integrabile nel senso usuale, come volevasi dimostrare.

Il teorema di Lebesgue-Vitali†

Il teorema di Lebesgue-Vitali afferma che una funzione limitata $f\colon R \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è misurabile ed ha misura nulla.†

Equivalentemente, f non è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità o non è misurabile, oppure lo è ma ha misura positiva.

Consideriamo una funzione limitata $f\colon R \to \mathbb{R}$, integrabile secondo Riemann.

Verifichiamo che l'insieme dei suoi punti di discontinuità è misurabile ed ha misura nulla.

Procediamo come a pag. 8. Indicato con

$$\omega(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \Big(\sup_{B_r(x,y)} f \; - \inf_{B_r(x,y)} f \Big)$$

il salto della funzione in un punto $(x,y) \in R$, osserviamo che f è continua in (x,y) se e solo se $\omega(x,y) = 0$. Posto

$$E_\lambda = \{\, (x,y) \in R \mid \omega(x,y) > \lambda \,\},$$

l'insieme E_0 dei punti di discontinuità è l'unione

$$E_0 = \bigcup_{\lambda > 0} E_\lambda = \lim_{\lambda\to 0^+} E_\lambda$$

della famiglia monotona degli insiemi E_λ, decrescente al crescere di λ.

†Vedere, ad esempio, [7], oppure [5], Teorema 19.12, pag. 271, o anche [10], Chapter 5, Theorem 8, pag. 104.

Mostriamo che l'insieme E_λ ha misura di Peano-Jordan nulla per ogni $\lambda > 0$: ne segue che E_λ ha misura di Lebesgue nulla, e, per la numerabile additività, $|E_0| = 0$.

Fissato $\lambda_0 > 0$, osserviamo che in ciascuno dei ν rettangoli (aperti) R_{ij} che intersecano E_{λ_0} esiste, per definizione, almeno un punto (x,y) tale che $\omega(x,y) > \lambda_0$.

Quindi prendendo punti $\boldsymbol{p}^*_{ij}, \boldsymbol{p}^{**}_{ij} \in R_{ij}$ sufficientemente vicini ad (x,y) possiamo far sì che

$$f(\boldsymbol{p}^*_{ij}) - f(\boldsymbol{p}^{**}_{ij}) \ge \frac{\lambda_0}{2}.$$

Nei rettangoli R_{ij} che non intersecano E_{λ_0} prendiamo a piacere $\boldsymbol{p}^*_{ij} = \boldsymbol{p}^{**}_{ij}$. Così facendo, le somme di Cauchy-Riemann

$$S^*_n = \frac{|R|}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f(\boldsymbol{p}^*_{ij})$$

$$S^{**}_n = \frac{|R|}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f(\boldsymbol{p}^{**}_{ij})$$

soddisfano

$$S^*_n - S^{**}_n \ge \frac{|R|}{n^2}\, \nu\, \frac{\lambda_0}{2} = |P|\, \frac{\lambda_0}{2},$$

dove P è un plurirettangolo che, unito alla griglia $\Gamma_n = \{\, (x,y) \in R \mid (x-x_i)(y-y_j) = 0,\ i,j = 1,\dots,n \,\}$, la quale ha misura di Peano-Jordan nulla, ricopre E_{λ_0}.

Quando n tende a $+\infty$, poiché S^*_n e S^{**}_n hanno un limite comune ℓ, la loro differenza tende a zero, e perciò l'insieme E_{λ_0} ha misura di Peano-Jordan nulla, come volevasi dimostrare.

Il teorema di Lebesgue-Vitali (segue)

Consideriamo un rettangolo chiuso R ed una funzione limitata $f\colon R \to \mathbb{R}$, i cui punti di discontinuità costituiscano un insieme E_0 di misura nulla secondo Lebesgue.

Verifichiamo che f è integrabile secondo Riemann.

1. Per gli insiemi chiusi e limitati, la misura esterna di Peano-Jordan coincide con la misura di Lebesgue. Conviene quindi definire

$$F_\lambda = \{\, (x,y) \in R \mid \omega(x,y) \geq \lambda \,\},$$

ed osservare che F_λ è chiuso per ogni $\lambda \geq 0$. L'insieme E_0 dei punti di discontinuità è l'unione

$$E_0 = \bigcup_{\lambda > 0} F_\lambda = \lim_{\lambda \to 0^+} F_\lambda$$

della famiglia monotona degli insiemi F_λ, decrescente al crescere di λ.

Poiché per ipotesi $|E_0| = 0$, si ha $|F_\lambda| = 0$ per ogni $\lambda > 0$, e anche la misura esterna di Peano-Jordan di F_λ è nulla per ogni $\lambda > 0$.

2. Fissato $\lambda_0 > 0$, l'insieme F_{λ_0}, in quanto insieme chiuso, è l'intersezione dei plurirettangoli P_n costruiti riunendo per ogni n i rettangoli chiusi R_{ij} che intersecano F_{λ_0}:

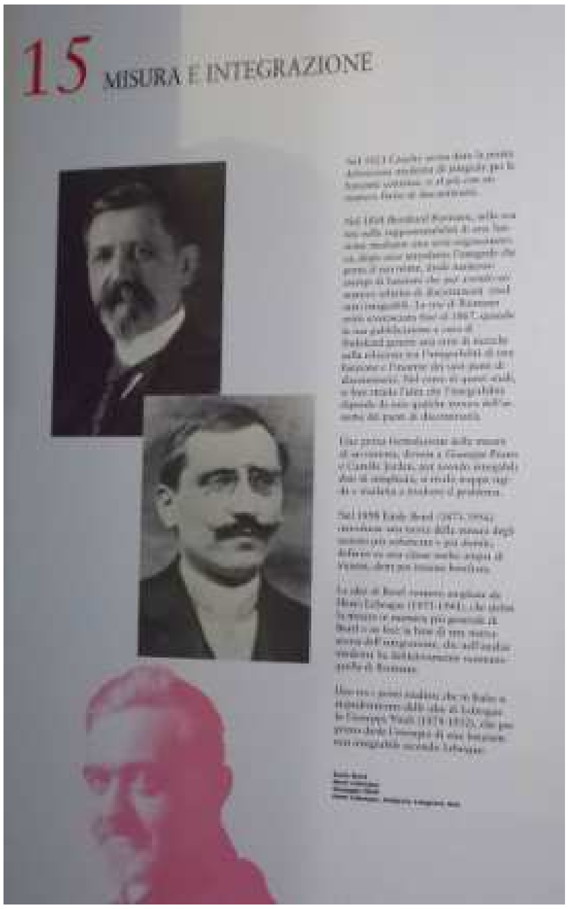
$$F_{\lambda_0} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

Per la continuità della misura di Lebesgue si ha dunque $|P_n| \to 0$.

Preso $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, esiste n_ε tale che $|P_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. Inoltre per ogni $(x,y) \in R \setminus P_{n_\varepsilon}$ si ha $\omega(x,y) < \lambda_0$, e siccome f è limitata risulta

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n \leq (\sup_R f - \inf_R f)\, \varepsilon + |R|\, \lambda_0.$$

Per l'arbitrarietà di λ_0 e di ε, l'integrabilità di f segue.



Nel pannello n. 15 della "Piccola storia del calcolo infinitesimale" esposta al Palazzo delle Scienze sono ritratti Émile Borel, Henri Lebesgue e Giuseppe Vitali.

Appendice

Sulla rappresentabilità di una funzione mediante una serie trigonometrica

di

B. Riemann

[omissis]

Sul concetto di integrale definito ed il suo ambito di validità

4.

L'incertezza che ancora regna in alcuni punti fondamentali della teoria degli integrali definiti ci impone di premettere qualcosa sul concetto di integrale definito ed il suo ambito di validità.

Quindi innanzitutto: cosa si deve intendere con $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$?

Per stabilire questo, prendiamo fra a e b una successione crescente di valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ e denotiamo la differenza $x_1 - a$ con δ_1, $x_2 - x_1$ con δ_2, ..., $b - x_{n-1}$ con δ_n, e con ε una frazione propria positiva. Allora il valore della somma

$$S = \delta_1\, f(a + \varepsilon_1\, \delta_1) + \delta_2\, f(x_1 + \varepsilon_2\, \delta_2) + \delta_3\, f(x_2 + \varepsilon_3\, \delta_3) + \ldots + \delta_n\, f(x_{n-1} + \varepsilon_n\, \delta_n)$$

dipenderà dalla scelta degli intervalli δ e delle grandezze ε. Se essa, comunque si scelgano δ ed ε, ha la proprietà di avvicinarsi indefinitamente ad un limite fissato A quando le δ diventano tutte infinitamente piccole, quel valore si indica con $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se essa non ha tale proprietà, $\int_a^b f(x)\,dx$ non ha alcun significato. Si è tuttavia cercato in molti casi di dare anche allora un significato a quel simbolo, ed *una* fra queste generalizzazioni del concetto di integrale definito è accettata da tutti i matamatici. Precisamente, quando la funzione $f(x)$ diventa infinitamente grande all'avvicinarsi del suo argomento verso un unico valore c nell'intervallo (a, b), allora ovviamente la somma S può assumere qualunque valore si voglia, quale che sia il grado di piccolezza che si voglia assegnare alle δ; essa inoltre non ha alcun valore limite, e $\int_a^b f(x)\,dx$ non avrebbe nessun significato dal di sopra. Se però, quando α_1 e α_2 diventano infinitamente piccoli, $\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$ si avvicina ad un limite fissato, allora si intende con $\int_a^b f(x)\,dx$ tale limite.

Altre posizioni di Cauchy sul concetto di integrale definito, nei casi in cui non avviene qualcosa del genere secondo il concetto fondamentale, possono essere idonee per ricerche di particolari tipologie, tuttavia, non essendo sviluppate in generale, e soprattutto a causa della loro notevole arbitrarietà, sono ben poco opportune.

Ora per seconda cosa studiamo l'ambito di validità di questo concetto, ovvero la domanda: in quali casi una funzione è suscettibile di integrazione e in quali no?

Consideriamo il concetto di integrale nel senso stretto, cioè supponiamo che la somma S converga quando le δ diventano collettivamente infinitamente piccole. Indichiamo con D_1 la massima oscillazione della funzione tra a e x_1, cioè la differenza fra il suo più grande ed il suo più piccolo valore* in questo intervallo, con D_2 quella fra x_1 e x_2, ..., con D_n quella fra x_{n-1} e b, cosicché

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

deve diventare infinitamente piccola con le grandezze δ. Ammettiamo inoltre che, quando le δ rimangono tutte più piccole di d, il più grande valore che tale somma può assumere sia Δ; Δ sarà quindi una funzione di d che decresce insieme a d e insieme a questa grandezza diventa infinitamente piccola. Se ora la lunghezza complessiva degli intervalli dove l'oscillazione è più grande di σ è $= s$, allora il contributo di questi intervalli alla somma $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ è evidentemente $\geq \sigma s$. Da qui si ottiene

$$\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n \leq \Delta, \quad \text{quindi } s \leq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

Quando σ è dato, $\frac{\Delta}{\sigma}$ può essere reso piccolo a piacere mediante un'opportuna scelta di d; lo stesso vale quindi per s, e se ne deduce che:

Se la somma S converge quando le δ diventano tutte infinitamente piccole, risulta anche, per la limitatezza della funzione $f(x)$, che la lunghezza complessiva degli intervalli nei quali l'oscillazione è $> \sigma$ o anche σ, può essere resa arbitrariamente piccola mediante un'opportuna scelta di d.

Di questa proposizione vale anche il viceversa:

Se la funzione $f(x)$ è sempre finita†, e la lunghezza complessiva s degli intervalli nei quali l'oscillazione della funzione è più grande di una data grandezza σ diventa infinitamente piccola al ridursi indefinito di tutte le grandezze δ, allora la somma S converge quando le δ diventano tutte infinitamente piccole.

Infatti gli intervalli nei quali l'oscillazione è $> \sigma$ danno alla somma $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ un contributo più piccolo di s moltiplicato per la massima oscillazione della funzione tra a e b, la quale (per ipotesi) è finita; gli altri intervalli danno in contributo $< \sigma(b-a)$. Chiaramente si può prendere innanzitutto σ piccolo a piacere, e poi determinare (per ipotesi) la lunghezza degli intervalli in modo tale che anche s sia piccolo a piacere, e con ciò dare alla somma $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ un valore piccolo a piacere, e di conseguenza il valore della somma S può essere racchiuso fra limiti arbitrariamente vicini.

* Qui Riemann avrebbe dovuto dire *"la differenza fra il suo estremo superiore ed il suo estremo inferiore"*

† Si intende *"limitata"*

Abbiamo dunque trovato condizioni necessarie e sufficienti affinché la somma S converga al decrescere indefinito delle grandezze δ, e si possa parlare in senso stretto di un integrale della funzione $f(x)$ fra a e b.

Se ora il concetto di integrale viene ampliato come sopra, è chiaro che l'ultima delle due condizioni trovate è ancora necessaria affinché sia possibile l'integrazione; al posto della condizione che la funzione sia sempre finita† subentra però la condizione che la funzione diventi infinita all'avvicinarsi dell'argomento a *singoli* valori, e che esista un determinato limite quando gli estremi di integrazione si avvicinano indefinitamente a tali valori.

[omissis]

† Si intende *"limitata"*

Bibliografia

[1] L. Amerio. Analisi matematica con elementi di analisi funzionale. Vol. 2. UTET, 1977.

[2] V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini. Analisi matematica con elementi di geometria e calcolo vettoriale. Vol. 2. Apogeo/ Maggioli, 2008.

[3] G. Darboux. *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Annales scientifiques de l'École Normale Superieure 2^e^ série **4** (1875), 57–112.

[4] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi matematica due. Liguori, 1996.

[5] E. Giusti. Analisi matematica 2. Boringhieri, 2003.

[6] M. Kline. Storia del pensiero matematico. Vol. 2. Einaudi, 1996.

[7] M. Müger. *Lebesgue's characterization of Riemann integrable functions.* http://www.math.ru.nl/~mueger/Lebesgue.pdf

[8] C. D. Pagani, S. Salsa. Analisi matematica. Vol. 2. Masson/Zanichelli, 1998.

[9] B. Riemann. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe *(Sulla rappresentabilità di una funzione mediante una serie trigonometrica)*. Dissertazione per il conseguimento dell'abilitazione a docente universitario, presentata nel 1854.

[10] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick. Real analysis. Prentice Hall, 2010.

[11] K. J. Thomae. *Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe (Sulla definizione dell'integrale definito tramite il limite di una somma).* Zeitschrift für Mathematik und Physik **21** (1876), 224–227.

[12] K. J. Thomae. Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale *(Introduzione alla teoria degli integrali definiti)*. Nebert, 1875.

[13] V. Volterra. *Sui principii del calcolo integrale.* Giornale di Matematica diretto dal prof. G. Battaglini **19** (1881), 333–372.