Introduzione alle successioni e alle serie di funzioni

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

3-4-2018

Indice

Successioni di funzioni

MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DELLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Fin dall'antichità, il concetto di limite serve per rappresentare le soluzioni di quei problemi che non si lasciano risolvere in modo più semplice.

Da questo punto di vista, i limiti non sono fatti per essere calcolati, ma piuttosto per rappresentare le suddette soluzioni.

Ad esempio, per dimostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

ha almeno una soluzione, si costruisce un'opportuna successione di funzioni $y_k(x)$, e, sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y)$, si dimostra che tale successione converge ad una funzione limite $y(x)$, la quale a sua volta risolve il problema dato.

Se, ad esempio, la funzione $f(x, y)$ è di classe C^1 in un intorno del punto (x_0, y_0), allora esiste un raggio $\delta \in (0, +\infty)$ tale che il problema (1) ammette una e una sola soluzione $y(x)$ definita per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (teorema di esistenza e unicità in piccolo).

Il metodo accennato sopra non fornisce, in generale, un'espressione semplice della soluzione, ma ne dimostra l'esistenza e l'unicità.

CONVERGENZA PUNTUALE

Cosa vuol dire, dunque, che una successione di funzioni $y_k(x)$ converge ad una funzione limite $y(x)$?

A differenza di quanto accade per le successioni di numeri reali, per le funzioni vi sono molte diverse definizioni di convergenza, non equivalenti fra loro, la cui opportunità dipende dal contesto.

La più semplice nozione di convergenza è la convergenza puntuale, appresso definita.

Definizione. Data una successione di funzioni $y_k(x)$, aventi per dominio un insieme $X \subset \mathbb{R}^N$, e a valori reali, si dice che convergono puntualmente ad una $y \colon X \to \mathbb{R}$ se per ogni fissato $x \in X$ risulta

$$\lim_{k \to +\infty} y_k(x) = y(x).$$

Dunque la convergenza puntuale si riconduce alla convergenza dei numeri $y_k(x)$ (avendo fissato x) al numero $y(x)$. Tale convergenza deve sussistere per ogni x nel dominio delle funzioni.

Ad esempio, usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si può dimostrare che le funzioni

$$y_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

convergono alla funzione $y(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

IL DIFETTO DELLA CONVERGENZA PUNTUALE

Una successione di funzioni y_k può benissimo convergere puntualmente ad una funzione y senza che per questo gli integrali delle y_k debbano convergere all'integrale di y.

Ad esempio, le funzioni $y_k(x) = k\,x^{k-1}$ convergono puntualmente a $y(x) \equiv 0$ sull'intervallo $(0,1)$. Tuttavia

$$\int_0^1 y_k(x)\,dx = 1 \quad \text{per ogni } k > 0,$$

mentre

$$\int_0^1 y(x)\,dx = 0.$$

Un discorso simile vale per le derivate. Ad esempio, le funzioni

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{1}{k} + x^2}$$

convergono puntualmente a $y(x) = |x|$ sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Tuttavia $y_k'(0) = 0$ per ogni $k > 0$, mentre $y'(0)$ non esiste.

Questi difetti sono particolarmente sgradevoli perché, in pratica, la convergenza di funzioni serve per applicare il calcolo differenziale e integrale alla funzione limite $y(x)$ senza disporre di una sua semplice espressione, ma per il tramite delle funzioni y_k.

CONVERGENZA UNIFORME

Uno dei principali tipi di convergenza di funzioni, insieme alla convergenza puntuale, è la convergenza uniforme.

Definizione. Si dice che y_k converge uniformemente a y sul dominio X se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per ogni $k \geq \nu$ e per ogni $x \in X$ si ha $|y_k(x) - y(x)| < \varepsilon$.

In parole povere, la convergenza uniforme risulta dalla convergenza puntuale più l'indipendenza dell'indice ν dal punto x.

La convergenza uniforme, dunque, implica la convergenza puntuale.

Viceversa, se l'insieme X contiene solo un numero finito di punti, la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme.

La convergenza uniforme di y_k ad y si può, equivalentemente, definire tramite la condizione $\lim_{k\to+\infty} s_k = 0$, dove

$$s_k = \sup_{x \in X} |y_k(x) - y(x)|.$$

Se il dominio X è un intervallo (a, b) si può anche dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per ogni $k \geq \nu$ il grafico della funzione y_k sta nella striscia

$$\{\,(x,y) \mid x \in (a,b),\ y(x) - \varepsilon < y < y(x) + \varepsilon\,\}$$

centrata sul grafico di $y(x)$ e di altezza 2ε (fig. 2.1 a pag. 80 del testo).

I SOTTINTESI DELLA DEFINIZIONE

Possono essere utili le seguenti osservazioni.

1. La convergenza puntuale su di un insieme finito è sempre uniforme.

Cioè, se le funzioni $y_k(x)$ convergono in un numero finito di punti $x_1, \dots, x_n$, allora convergono uniformemente sull'insieme $X = \{ x_1, \dots, x_n \}$. Per verificarlo, poniamo

$$y(x_i) = \lim_{k \to +\infty} y_k(x_i) \text{ per } i = 1, \dots, n.$$

Preso $\varepsilon > 0$ esistono n indici $\nu_1, \dots, \nu_n$ tali che

$$|y_k(x_i) - y(x_i)| < \varepsilon \tag{2}$$

per ogni $k \geq \nu_i$ e $i = 1, \dots, n$. Siccome tali indici sono in numero finito, è legittimo definire

$$\nu = \max_{i=1,\dots,n} \nu_i.$$

Con questa definizione, la (2) implica che in tutto l'insieme X risulta

$$|y_k(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ per } k \geq \nu,$$

dunque la successione (y_k) converge uniformemente alla funzione y in tale insieme.

2. Se una successione di funzioni y_k converge ad una funzione y uniformemente in un insieme X, e puntualmente in un punto $x_0 \notin X$, allora la convergenza è uniforme in tutto l'insieme $X \cup \{ x_0 \}$.

Infatti, preso $\varepsilon > 0$, per le ipotesi suddette esiste ν_1 tale che

$$|y_k(x_0) - y(x_0)| < \varepsilon \text{ per } k \geq \nu_1,$$

ed esiste ν_2 tale che in tutto l'insieme X risulta

$$|y_k(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ per } k \geq \nu_2.$$

Ma allora, posto

$$\nu = \max\{ \nu_1, \nu_2 \},$$

risulta

$$|y_k(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ per } k \geq \nu$$

in tutto l'insieme $X \cup \{ x_0 \}$, come volevasi dimostrare.

Quest'ultima osservazione implica che è inutile sperare di modificare il tipo di convergenza (da puntuale a uniforme, o viceversa) aggiungendo o togliendo un punto dal dominio (ad esempio, gli estremi di un intervallo).

Infatti, se una successione di funzioni converge puntualmente ma non uniformemente su di un intervallo chiuso $[a, b]$, dall'osservazione 2 segue che la convergenza non può essere uniforme nemmeno su (a, b).

È questo il caso, ad esempio, della tipica successione $y_k(x) = x^k$ per $x \in [0, 1]$.

DUE PROPRIETÀ DELLA CONVERGENZA UNIFORME

La convergenza uniforme si comporta abbastanza bene rispetto alla continuità e all'integrazione.

Inoltre, la convergenza uniforme delle derivate si comporta bene rispetto alla derivazione.

Più esattamente, valgono i seguenti enunciati.

1) Se le y_k sono continue su di un intervallo $[a, b]$ (quindi sono anche integrabili secondo Riemann), e se convergono uniformemente ad una funzione y, allora anche $y \in C^0([a, b])$, e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b y_k(x)\,dx = \int_a^b y(x)\,dx.$$

Questa proprietà si usa spesso a rovescio, cioè, constatato che la funzione limite y è discontinua almeno in un punto, si deduce che la convergenza delle y_k non è uniforme.

2) Supponiamo che: le funzioni y_k siano derivabili in un intervallo limitato (a, b); convergano almeno in un punto di tale intervallo, e le loro derivate y'_k convergano uniformemente in tutto (a, b).

Allora si dimostra che: anche le funzioni y_k convergono uniformemente in tutto (a, b); la loro funzione limite, che indicheremo con y, è derivabile in (a, b), e la funzione limite delle derivate y'_k è proprio y'.

IL CRITERIO DI CAUCHY

La convergenza di funzioni serve per rappresentare una funzione $y(x)$, utile per risolvere un dato problema, come limite di una successione di funzioni $y_k(x)$.

Ciò costituisce un valido ripiego in quei casi, che sono molti, in cui non si conosce un'espressione più semplice della funzione $y(x)$.

D'altro canto la definizione della convergenza, e, in particolare, quella della convergenza uniforme, fa intervenire la funzione limite $y(x)$, dunque non è applicabile proprio nei casi per i quali tale nozione serve di più.

Pertanto gioca un ruolo essenziale la condizione di Cauchy, che è necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni $y_k(x)$ converga uniformemente in un dato intervallo $[a, b]$.

La condizione di Cauchy non richiede la conoscenza della funzione limite $y(x)$.

Si dice che una successione di funzioni $y_k(x) \in C^0([a, b])$ è "fondamentale" o "di Cauchy" se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per ogni $n, k \geq \nu$ risulta

$$\max_{x\in[a,b]} |y_n(x) - y_k(x)| < \varepsilon.$$

Che tale condizione sia necessaria lo si vede facendo tendere n e k a $+\infty$. Per dimostrare che è anche sufficiente si usa la completezza dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

CALCOLO DI UN LIMITE TRAMITE UNA SUCCESSIONE APPROSSIMANTE

Per dimostrare le proprietà fondamentali della convergenza uniforme enunciate a pag. SSF7 è importante saper calcolare i limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} g(x)$$

di una data funzione g utilizzando un'opportuna successione di funzioni g_k.

Più precisamente, supponiamo che le funzioni g_k siano definite sull'intervallo (a, x_0), oppure (x_0, b), con $x_0 \in \mathbb{R}$, e convergano uniformemente a g in tale intervallo.

Consideriamo, ad esempio, il primo dei due casi. Supponiamo inoltre che per ogni k esista il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} g_k(x),$$

limite che indicheremo con L_k. Se tutti gli L_k sono finiti, si dimostra (alle pagg. 17 e 18 del libro di testo) che esiste finito anche il limite

$$\lim_{k \to +\infty} L_k$$

e si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \lim_{k \to +\infty} L_k.$$

Nel caso $x \to x_0^+$ l'enunciato è analogo.

In questa sede esaminiamo il caso in cui risulta $L_k = +\infty$ per qualche valore di k.

Se risulta $L_k = +\infty$ solo per un numero finito di valori di k, e si ha $L_k \in \mathbb{R}$ definitivamente, si può applicare il teorema appena citato.

Se, invece, risulta $L_k = +\infty$ per infiniti valori di k, possiamo dimostrare che $L_k = +\infty$ definitivamente. Infatti, per la convergenza uniforme esiste un indice ν tale che per ogni $k, h \geq \nu$ si ha

$$|g_k(x) - g_h(x)| < 1$$

in tutto l'intervallo (a, x_0). Prendiamo allora una funzione g_k con $k \geq \nu$ e tale che

$$\lim_{x \to x_0^-} g_k(x) = +\infty.$$

Per ogni $h \geq \nu$ risulta

$$g_h(x) > g_k(x) - 1 \to +\infty$$

quando $x \to x_0^-$. Dunque $L_h = +\infty$ per ogni $h \geq \nu$, come volevasi dimostrare.

È facile verificare che, nelle ipotesi anzidette, risulta

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = +\infty.$$

Infatti, per la convergenza uniforme esiste un indice ν tale che per ogni $k \geq \nu$ si ha

$$|g_k(x) - g(x)| < 1$$

in tutto l'intervallo (a, x_0). Presa allora una funzione g_k con $k \geq \nu$ e tale che

$$\lim_{x \to x_0^-} g_k(x) = +\infty,$$

risulta $g(x) > g_k(x) - 1 \to +\infty$ per $x \to x_0^-$, come volevasi dimostrare.

RIFERIMENTI AL LIBRO DI TESTO

Convergenza puntuale: pag. 13

Convergenza uniforme: pag. 13

Interpretazione grafica della convergenza uniforme: fig. 2.1, pag. 80

Continuità della funzione limite uniforme: pagg. 16-17

Scambio dei limiti: pag. 17

Criterio di Cauchy: pag. 19

Passaggio al limite sotto il segno di integrale: pag. 21

La convergenza puntuale non basta a tale scopo: pagg. 20-21

Passaggio al limite sotto il segno di derivata: pag. 26

La convergenza puntuale non basta a tale scopo: pagg. 22

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi Matematica due. Liguori.

Serie di funzioni

MOTIVAZIONI PER LO STUDIO DELLE SERIE DI FUNZIONI

Le motivazioni per l'utilizzo delle serie di funzioni sono analoghe a quelle delle successioni.

Ad esempio, i valori numerici di funzioni importanti come e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, non si possono calcolare a partire da x mediante le quattro operazioni aritmetiche.

Fanno eccezione pochi valori particolari, come ad esempio $e^0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, eccetera.

Tuttavia, le suddette funzioni si possono esprimere come somme di serie opportune. Si ha, ad esempio:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

DEFINIZIONE

Consideriamo una funzione $y(x)$ ed una successione di funzioni $y_k(x)$ aventi per dominio lo stesso insieme, e supponiamo, per semplicità, che tale insieme sia un intervallo (a, b). Si scrive

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(x)$$

se la successione di funzioni $S_n(x)$, date da

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k(x)$$

converge a $y(x)$ sull'intervallo (a, b). Anche in questo caso si distingue tra convergenza puntuale e convergenza uniforme.

SERIE DI POTENZE

Le serie i cui termini $y_k(x)$ hanno la forma $y_k(x) = a_k\, x^k$, cioè sono prodotti di potenze della x con esponenti $k \in \mathbb{N}$ per coefficienti reali a_k, si dicono "serie di potenze".

Una serie di potenze ha dunque la forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k.$$

Le serie di potenze sono importanti perché la serie di Maclaurin di una qualunque funzione regolare f è di questo tipo, essendo $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Il carattere di una serie di potenze è molto particolare: esiste infatti un valore $r \geq 0$, che può anche essere $+\infty$, tale che la serie converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-r, r)$, e non converge, nemmeno puntualmente, in nessun punto x tale che $|x| > r$.

Tale quantità r si chiama "raggio di convergenza", ed è data da

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,. \qquad (3)$$

Si intende che $r = 0$ (rispettivamente, $r = +\infty$) quando il limite al secondo membro è $+\infty$ (rispettivamente, zero). Spesso, per praticità, si ricava r dalla formula

$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$$

che è corretta sotto l'ipotesi che il limite al secondo membro esista.

ULTERIORI PRECISAZIONI

Tutte le serie di potenze convergono banalmente al numero a_0 nel punto $x = 0$.

Invece, quando $r \in (0, +\infty)$, l'eventuale convergenza di una serie di potenze nei due punti $x = \pm r$ non rientra nell'enunciato alla pagina precedente, e si deve discutere caso per caso.

Qualora, tuttavia, si riesca a stabilire la convergenza puntuale nel punto $x = r$ (rispettivamente, nel punto $x = -r$), si ha automaticamente la convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[a, r]$ con $a > -r$ (rispettivamente, in ogni intervallo $[-r, b]$ con $b < r$).

ESEMPIO 1. La serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

è la serie di Maclaurin della funzione $y(x) = 1/(1-x)$. Il raggio di convergenza è $r = 1$. Per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{4}$$

La serie non converge per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La funzione generatrice, invece, è definita per ogni $x \neq 1$.

OSSERVAZIONE

L'esempio precedente fa vedere che la serie di Maclaurin di una data funzione non è detto che converga ad essa in tutto il dominio di quest'ultima.

ESEMPIO 2. La serie di Maclaurin della funzione $y(x) = -\log(1-x)$ è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Il raggio di convergenza è $r = 1$: questo di per sé non vuol dire che la serie converga alla funzione generatrice.

Tuttavia, integrando termine a termine l'uguaglianza (4), si verifica che per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x). \tag{5}$$

Per $x = 1$ la serie considerata si riduce alla serie armonica, dunque non converge.

Infine, usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange si dimostra che l'uguaglianza (5) sussiste anche per $x = -1$, cioè si trova

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2.$$

INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE PER SERIE

Come già detto a pagina SSF11, le serie di potenze convergono uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$ incluso nell'intervallo aperto $(-r, r)$, dove r denota il raggio di convergenza.

Quindi l'integrale della funzione somma $y(x)$ si può esprimere mediante una serie:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_a^b x^k\,dx.$$

Si verifica, inoltre, che la serie delle derivate

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,a_k\,x^{k-1}, \tag{6}$$

che è anch'essa una serie di potenze, ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

Poiché ogni punto $x \in (-r, r)$ si può includere in un intervallo aperto (a, b) tale che $[a, b] \subset (-r, r)$, si deduce che la somma della serie (6) è proprio la derivata $y'(x)$ della funzione somma $y(x)$.

DAL REALE AL COMPLESSO

Osserviamo che le quattro operazioni aritmetiche si possono fare anche con i numeri complessi, e godono delle consuete proprietà associativa, commutativa e distributiva.

Inoltre la nozione di limite si estende anche alle successioni di numeri complessi, intendendo che $z_k \to z$ se risulta, contemporaneamente, $\operatorname{Re} z_k \to \operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z_k \to \operatorname{Im} z$.

Equivalentemente, si dice che $z_k \to z$ se il modulo $|z_k - z|$, che è un numero reale, tende a zero.

Si intuisce, dunque, che la nozione di somma di una serie si può formulare anche per i numeri complessi, con le stesse modalità che sono valide per i numeri reali.

In particolare, una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k,$$

dove ora i coefficienti a_k sono numeri complessi, ha un raggio di convergenza r dato ancora dalla (3), e converge uniformemente in ogni insieme chiuso $K \subset B_r(0,0) \subset \mathbb{C}$.

Queste proprietà consentono di estendere ai numeri complessi la definizione delle funzioni e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e di tante altre importanti funzioni.

L'idea principale è semplicemente quella di prendere la serie di Maclaurin della funzione considerata, e sostituire numeri complessi al posto della variabile x.

A titolo di esempio, la funzione esponenziale e^z è definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ come segue:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Talvolta la funzione $y(x)$ cui si è interessati è espressa non per serie ma mediante un integrale.

Più precisamente, si ha a che fare con espressioni della seguente forma:

$$y(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt. \tag{7}$$

Questo accade, ad esempio, quando la funzione $y(x)$ è la soluzione di un problema associato ad un'equazione differenziale che viene risolto mediante una trasformata integrale, come la trasformata di Fourier o la trasformata di Laplace.

Un'altra fra le tante espressioni del tipo (7) è la rappresentazione del potenziale gravitazionale generato da una densità μ:

$$V(x,y,z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(x',y',z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

In questa sede, senza entrare nei dettagli, ci limitiamo ad enunciare il seguente teorema:

se la funzione $f(x,t)$ sotto il segno di integrale è di classe $C^1(R)$, dove R è un rettangolo del tipo $R = [a,b]\times[c,d]$, allora la funzione $y(x)$ data dalla (7) è di classe $C^1([a,b])$ e la sua derivata $y'(x)$ si può ottenere come segue:

$$y'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

RIFERIMENTI AL LIBRO DI TESTO

Somma di una serie: pag. 30

Serie di potenze: pag. 36

Raggio di convergenza: formula (6.13), pag. 39

Integrazione e derivazione delle serie di potenze: teorema 6, pag. 41

Derivazione sotto il segno di integrale: pag. 157

Funzione esponenziale nel campo complesso: pag. 288

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi Matematica due. Liguori.

Serie di Fourier

MOTIVAZIONI

Vediamo un classico modello matematico(*) del fenomeno della conduzione del calore, ad un duplice scopo:

1. Introdurre una delle principali equazioni differenziali alle derivate parziali della fisica matematica.

2. Spiegare l'origine delle serie di Fourier, contrastando la tesi che attribuisce lo sviluppo della nostra disciplina esclusivamente alla volontà di generalizzare ed organizzare le conoscenze precedenti.

IL CORPO CONDUTTORE

Studiamo il fenomeno della conduzione del calore attraverso un filo sottile, rettilineo (oppure una sbarra) isotropo, omogeneo, e di sezione costante S.

Ci interessiamo soltanto della conduzione del calore nella direzione dell'asse del filo (asse x) trascurando la conduzione nelle direzioni trasversali, come pure le eventuali dispersioni di calore.

Ammettiamo che la temperatura dei punti del filo sia una funzione $u(x,t)$ che dipende solo dall'ascissa x e dal tempo.

(*) D. V. Widder. The heat equation. Academic Press, 1975.

CAPACITÀ TERMICA

Il rapporto tra la quantità di calore dQ fornita ad un dato corpo ed il corrispondente aumento du della sua temperatura viene definito "capacità termica" C del corpo:

$$C = \frac{dQ}{du}. \tag{8}$$

CALORE SPECIFICO

La capacità termica dell'unità di massa si chiama "calore specifico". Se dunque M è la massa del corpo, il calore specifico c è

$$c = \frac{C}{M}. \tag{9}$$

Ragioniamo sul cosiddetto "elemento" di filo tra il punto di ascissa x e quello di ascissa $x + dx$, il cui volume è $dV = S\,dx$

Indicata con μ la densità materiale, l'elemento di massa è $dM = \mu\,dV$ e, per la (9), la capacità termica dell'elemento di filo è

$$\begin{aligned} C &= c\,dM \\ &= c\mu S\,dx. \end{aligned} \tag{10}$$

LEGGE DI FOURIER

La quantità di calore dQ_1 che, nell'intervallo di tempo dt, attraversa la sezione del filo di ascissa x da sinistra verso destra è data da

$$\frac{dQ_1}{dt} = -kS\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \tag{11}$$

cioè è direttamente proporzionale alla sezione S ed a $-\partial u/\partial x$.

La costante di proporzionalità k si dice "conducibilità termica" e dipende dal materiale di cui è composto il filo.

Analogamente, la quantità di calore dQ_2 che, nell'intervallo di tempo dt, attraversa la sezione del filo di ascissa $x + dx$ da destra verso sinistra è data da

$$\frac{dQ_2}{dt} = kS\,\frac{\partial u}{\partial x}(x + dx,\, t). \tag{12}$$

EQUAZIONE DEL CALORE

Sommando la (11) e la (12) si trova la quantità di calore $dQ = dQ_1 + dQ_2$ che giunge all'elemento di filo nell'intervallo di tempo dt:

$$\frac{dQ}{dt} = kS\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x + dx,\, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big).$$

Per la (8), il primo membro si può anche scrivere $C\,\partial u/\partial t$. Dividendo ambo i membri per dx, e tenendo conto della (10), si ottiene

$$c\mu\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{13}$$

La (13) è detta equazione del calore in una dimensione spaziale.

Analogamente, la conduzione del calore in un corpo tridimensionale $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si può modellizzare tramite l'equazione

$$c\mu\,\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\Delta u,$$

essendo Δ l'operatore di Laplace. Poiché i teoremi di esistenza, e le proprietà qualitative delle soluzioni non dipendono dal valore numerico delle costanti $c, \mu, k > 0$, si suole concentrarsi sull'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

NOTA BENE

Le considerazioni testé svolte non sono la dimostrazione di alcunché, e non possono esserlo in quanto mettono in relazione un'equazione con un fenomeno naturale (la conduzione del calore), il quale per ciò stesso non è assoggettabile alle dimostrazioni nel senso matematico del termine.

ORIGINI DELLE SERIE DI FOURIER

J.-B. J. Fourier, nel trattato "Théorie analytique de la chaleur" (1822) studia la conduzione del calore in corpi di forme diverse, incluso l'anello.

Consideriamo un filo disposto come la circonferenza di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos\alpha, \\ y = \operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

La temperatura del punto del filo individuato dall'angolo α è data, all'istante t, da una funzione $u(\alpha, t)$ soddisfacente l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \tag{14}$$

dove, per semplicità, abbiamo posto uguali ad 1 le costanti fisiche.

Si vede per sostituzione (o per separazione delle variabili) che le funzioni $e^{-k^2 t}\cos k\alpha$ per $k = 0, 1, 2, \ldots$ e le funzioni $e^{-k^2 t}\operatorname{sen} k\alpha$, per $k = 1, 2, 3, \ldots$ sono soluzioni della (14).

Fourier ritiene che l'integrale generale della (14) sia

$$u(\alpha, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k^2 t}\,(a_k \cos k\alpha + b_k \operatorname{sen} k\alpha)$$

dove i coefficienti a_k e b_k si devono ricavare dalla temperatura iniziale $u(\alpha, 0)$ tramite l'uguaglianza

$$u(\alpha, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\alpha + b_k \operatorname{sen} k\alpha).$$

ESPRESSIONE DEI COEFFICIENTI

Inizialmente (par. 215) Fourier determina l'espressione dei coefficienti a_k, b_k tramite particolari serie numeriche, dedotte sotto l'ipotesi che la funzione generatrice $u(\alpha, 0)$ sia analitica.

Successivamente (par. 219), risolvendo un'opportuna equazione ordinaria, egli perviene alla rappresentazione oggi ben nota di a_k e b_k tramite integrali.

A tale riguardo (par. 220) Fourier commenta che "anche le funzioni del tutto arbitrarie possono essere sviluppate in serie trigonometriche".

Infine (par. 221) osserva che, integrando termine a termine la serie trigonometrica, "si ottengono nella maniera più breve" i valori dei coefficienti.

L'ANALISI ARMONICA

La necessità di giustificare le affermazioni di Fourier ha stimolato profondi studi, che confluiscono in una branca della matematica chiamata analisi armonica.

Si attribuisce a Pierre Lejeune-Dirichlet il merito di aver dimostrato, successivamente alla pubblicazione del libro di Fourier, un primo teorema di convergenza valido sotto opportune ipotesi aggiuntive rispetto alla sola periodicità della funzione generatrice.

CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

Se una funzione u appartiene ad $L^1((-\pi,\pi))$ ed è derivabile in un punto $x_0 \in (-\pi,\pi)$, allora

$$u(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \operatorname{sen} kx_0)$$

essendo a_k, b_k i coefficienti di Fourier della funzione u.

Per la dimostrazione avremo bisogno dei seguenti lemmi.

Lemma 1: per ogni $t \neq 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ si ha

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$2\cos\alpha \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta).$$

Posto $\alpha = kt$ e $\beta = t/2$, sommando su k si ottiene l'identità

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \cos kt \operatorname{sen} \tfrac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen} \tfrac{2k+1}{2}\, t - \operatorname{sen} \tfrac{2k-1}{2}\, t\right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \tfrac{2n+1}{2}\, t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} \tfrac{t}{2}.
\end{aligned}$$

La tesi si ricava dividendo per il fattore $\operatorname{sen} \frac{t}{2}$, che non dipende dall'indice di somma k.

Lemma 2: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} = 1.$$

Dimostrazione. Per $n = 0$ la conclusione è immediata, mentre per $n > 0$ basta applicare il lemma 1 e integrare.

Lemma 3 (lemma, o teorema di Riemann-Lebesgue): per ogni funzione $f \in L^1((-\pi,\pi))$ risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt = 0.$$

Dimostriamo il teorema nel caso particolare in cui $f \in L^2((-\pi,\pi))$. Il caso generale segue dalla densità di $L^2((-\pi,\pi))$ in $L^1((-\pi,\pi))$. Poniamo

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt\big)$$

dove gli a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier, dati da

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt.$$

Usando le definizioni dei coefficienti di Fourier sopra richiamate, si trova

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(t) - S_n(t)\Big)^2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(t)\, dt,
\end{aligned}$$

L'ultimo integrale si può svolgere sfruttando le relazioni di ortogonalità in $L^2((-\pi,\pi))$ delle funzioni $\cos kt$ e $\operatorname{sen} kt$. Così facendo, si ottiene

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt.$$

L'ultima disuguaglianza, detta di Bessel, implica che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

è convergente. Richiamando la condizione necessaria per la convergenza di una serie, si ricava la tesi del teorema di Riemann-Lebesgue.

Lemma 4: per ogni funzione f nello spazio $L^1((-\pi,\pi))$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2n+1}{2}\,t\right)dt=0.$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$\mathrm{sen}\,\tfrac{2n+1}{2}\,t=\mathrm{sen}\,nt\,\cos\tfrac{t}{2}+\cos nt\,\mathrm{sen}\,\tfrac{t}{2}$$

dunque l'integrale al primo membro si può scrivere come la somma

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\,\cos\tfrac{t}{2}\right)\mathrm{sen}\,nt\,dt$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\,\mathrm{sen}\,\tfrac{t}{2}\right)\cos nt\,dt.$$

Poiché per ipotesi $f\in L^1((-\pi,\pi))$, anche i prodotti $f(t)\cos\frac{t}{2}$ e $f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}$ appartengono ad $L^1((-\pi,\pi))$, e la conclusione segue dal teorema di Riemann-Lebesgue.

Dimostrazione del teorema a pagina SSF20 (convergenza della serie di Fourier).

Per semplicità poniamo $x_0=0$. Sostituendo al posto di a_k e b_k le loro espressioni, la somma ridotta $S_n(0)$ diventa

$$\begin{aligned}S_n(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\,dt\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\,\cos kt\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)u(t)\,dt.\end{aligned}$$

Grazie al lemma 1, possiamo scrivere

$$S_n(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{2n+1}{2}\,t}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}\,u(t)\,dt.$$

D'altro canto per il lemma 2 si ha, banalmente,

$$u(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{2n+1}{2}\,t}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}\,u(0)\,dt.$$

Sottraendo l'ultima uguaglianza dalla precedente si trova

$$\begin{aligned}&S_n(0)-u(0)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(t)-u(0)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2n+1}{2}\,t\right)dt.\end{aligned}$$

Verifichiamo che il secondo membro tende a zero. Innanzitutto, posto

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{u(t)-u(0)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}\\ &= \frac{u(t)-u(0)}{t}\,\frac{t/2}{\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}},\end{aligned}$$

e siccome $u(t)$ è derivabile per ipotesi nel punto $t=0$, risulta che $f(t)$ è limitata in un opportuno intorno dell'origine.

TENENDO CONTO ANCHE DEL FATTO CHE $u \in L^1((-\pi,\pi))$, SEGUE CHE $f \in L^1((-\pi,\pi))$. PERCIÒ, SCRIVENDO

$$S_n(0) - u(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2n+1}{2}\,t\right)dt$$

ED APPLICANDO IL LEMMA 4 SI OTTIENE

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(0) = u(0)$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SERIE DI FOURIER IN L^2

Nello spazio $L^2((-\pi,\pi))$ vale un teorema di convergenza della serie di Fourier particolarmente semplice ed elegante:

Data una qualunque funzione $u \in L^2((-\pi,\pi))$, i coefficienti di Fourier

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \cos kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \operatorname{sen} kx\, dx$$

sono ben definiti, e la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\, \cos kx + b_k\, \operatorname{sen} kx) \qquad (15)$$

converge nel senso di L^2 alla funzione generatrice $u(x)$. Ciò significa che, indicata con $S_n(x)$ la somma ridotta

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\, \cos kx + b_k\, \operatorname{sen} kx)$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - u\|_2 = 0,$$

essendo $\|\ \|_2$ la norma di $L^2((-\pi,\pi))$. Vale inoltre l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\,\|u\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2), \qquad (16)$$

che estende il teorema di Pitagora dal piano (bidimensionale) allo spazio vettoriale-topologico infinito-dimensionale $L^2((-\pi,\pi))$.

IDENTITÀ DI PARSEVAL

Consideriamo due funzioni $u, v \in L^2((-\pi,\pi))$. Siano a_k, b_k i coefficienti di Fourier di u, e c_k, d_k quelli di v. Vale allora l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, v(x)\, dx = \frac{a_0\, c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\, c_k + b_k\, d_k). \qquad (17)$$

Osserviamo innanzitutto che, ponendo $v = u$, si riottiene la (16).

Viceversa, è possibile ricavare la (17) applicando la (16) alle funzioni $u+v$ e $u-v$. Si ha, infatti

$$\frac{1}{\pi}\,\|u\pm v\|_2^2 = \frac{(a_0 \pm c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big((a_k \pm c_k)^2 + (b_k \pm d_k)^2\Big).$$

Poiché le serie convergono, si possono sottrarre l'una dall'altra termine a termine.

Sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima, e svolgendo i quadrati, si ottiene la (17).

OSSERVAZIONE 1. Il procedimento appena seguito consente di dimostrare l'uguaglianza

$$(u|v) = \tfrac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

detta "identità di polarizzazione", che vale in un qualunque spazio prehilbertiano: vedere la Proposizione 1.2.2 in G. A. Pozzi, Appunti per il corso di analisi funzionale. Dispensa (2007).

OSSERVAZIONE 2. Con un procedimento analogo (sommando invece di sottrarre) si ottiene l'identità del parallelogramma

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \tfrac{1}{2}\,(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2).$$

OSSERVAZIONE 3. In un qualunque spazio normato E, condizione necessaria e sufficiente affinché esista un prodotto scalare $(u|v)$ tale che

$$(u|u) = \|u\|^2 \text{ per ogni } u \in E$$

è che valga l'identità del parallelogramma: vedere il teorema di Fréchet - von Neumann - Jordan in K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag (1965), capitolo I, 5, Theorem 1.

OSSERVAZIONE 4. L'identità di Parseval (17) mostra che l'operatore $F\colon L^2((-\pi,\pi)) \to \ell^2$ che ad ogni $u \in L^2((-\pi,\pi))$ associa la successione dei suoi coefficienti di Fourier, con piccole modifiche diventa un'isometria.

LO SPAZIO ℓ^2

Si denota con ℓ^2 lo spazio di Hilbert costituito dalle successioni numeriche (c_k) tali che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty.$$

La norma in ℓ^2 di una tale successione è la radice quadrata della suddetta serie.

Il prodotto scalare tra due successioni $a = (a_k)$ e $b = (b_k)$ in ℓ^2 si definisce come segue:

$$(a|b) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, b_k.$$

TEOREMA DI RIEMANN-LEBESGUE

Fissata $f \in L^1((-\pi,\pi))$, consideriamo la funzione f_n definita per $n \in \mathbb{Z}^+$ come segue:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{se } f(x) \geq n; \\ f(x), & \text{se } f(x) \in (-n, n), \\ -n, & \text{se } f(x) \leq -n. \end{cases}$$

La funzione f_n è misurabile perché, qualunque sia $b \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f_n^{-1}((-\infty, b])$ dell'intervallo $(-\infty, b]$ è data da

$$f_n^{-1}((-\infty, b]) = \begin{cases} (-\pi, \pi), & \text{se } b \geq n; \\ f^{-1}((-\infty, b]), & \text{se } b \in [-n, n); \\ \emptyset, & \text{se } b < -n, \end{cases}$$

e a sua volta la controimmagine $f^{-1}((-\infty, b])$ dell'intervallo $(-\infty, b]$ è misurabile perché f è misurabile per ipotesi.

Inoltre, poiché risulta $|f_n(x)|^p \leq n^p$, si ha $f_n \in L^\infty((-\pi,\pi))$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$, e, a maggior ragione, $f_n \in L^p((-\pi,\pi))$ per ogni $p \in [1, +\infty)$ ed ogni $n \in \mathbb{Z}^+$.

Verifichiamo che $f_n \to f$ in $L^1((-\pi, \pi))$.

Cerchiamo innanzitutto il limite puntuale di f_n. Per ogni fissato $x \in (-\pi,\pi)$ risulta $f_n(x) = f(x)$ definitivamente (e precisamente per $n \geq |f(x)|$). Perciò si ha, banalmente,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

per ogni $x \in (-\pi,\pi)$. Resta da vedere se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

Poiché sappiamo che la funzione integranda tende a zero, siamo di fronte ad un tipico problema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Poiché risulta

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)|$$

per ogni $x \in (-\pi,\pi)$, e la funzione $|f(x)|$ è sommabile per ipotesi, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lebesgue: quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 0\, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si conclude che $f_n \to f$ in $L^1((-\pi, \pi))$, come volevasi dimostrare.

VERIFICHIAMO CHE LE SEGUENTI DEFINIZIONI SONO BEN POSTE PER OGNI $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx.$$

ESSENDO $\cos kx$ E $\operatorname{sen} kx$ MISURABILI E LIMITATE PER OGNI k, E $f \in L^1((-\pi, \pi))$ PER IPOTESI, I PRODOTTI $f(x) \cos kx$ E $f(x) \operatorname{sen} kx$ SONO SOMMABILI PER OGNI k.

DUNQUE LE DEFINIZIONI DEI COEFFICIENTI DI FOURIER SONO BEN POSTE PER OGNI $k \in \mathbb{Z}^+$. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0.$$

FISSATO $\varepsilon \in (0, +\infty)$, ESISTE UNA FUNZIONE f_{n_0} TALE CHE

$$\|f_{n_0} - f\|_1 < \varepsilon. \tag{18}$$

VERIFICHIAMO CHE I COEFFICIENTI DI FOURIER a_{0k} E b_{0k} DELLA FUNZIONE f_{n_0} TENDONO A 0 PER $k \to +\infty$.

ABBIAMO VERIFICATO CHE f_{n_0} APPARTIENE AD $L^p((-\pi, \pi))$ PER OGNI $p \in [1, +\infty]$, DUNQUE IN PARTICOLARE $f_{n_0} \in L^2((-\pi, \pi))$.

MA ALLORA I COEFFICIENTI a_{0k} E b_{0k} TENDONO A 0 PER LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL.

LA CONDIZIONE (18) NON SERVE PER LA VALIDITÀ DELL'ASSERTO, MA PER LE QUESTIONI SUCCESSIVE.

VERIFICHIAMO CHE RISULTA $|a_k|, |b_k| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE.

PER LA DEFINIZIONE DEI COEFFICIENTI DI FOURIER, SI HA

$$|a_{0k} - a_k| \leq$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| f_{n_0}(x) - f(x) \Big| \, |\cos kx| \, dx,$$

E SICCOME $|\cos kx| \leq 1$, SI CONCLUDE CHE $|a_{0k} - a_k| \leq \frac{1}{\pi} \|f_{n_0} - f\|_1$.

FACENDO INTERVENIRE ADESSO LA CONDIZIONE (18), POSSIAMO SCRIVERE $|a_{0k} - a_k| \leq \varepsilon/\pi$ PER OGNI $k \in \mathbb{Z}^+$, E DI CONSEGUENZA

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq |a_{0k}| + |a_{0k} - a_k| \\ &\leq |a_{0k}| + \varepsilon/\pi. \end{aligned}$$

RICORDANDO CHE $a_{0k} \to 0$, PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE RISULTA DEFINITIVAMENTE

$$\begin{aligned} |a_k| &< \varepsilon/2 + \varepsilon/\pi \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE. ALLO STESSO MODO SI CONCLUDE PER b_k. IL TEOREMA DI RIEMANN-LEBESGUE SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

Appendice

BASE DI $C^2(I)$

Indicato con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo qualunque, con interno non vuoto, sappiamo che lo spazio vettoriale $C^2(I)$ possiede una base.

Esistono, cioè, un opportuno insieme S (insieme degli indici) ed un insieme $X = \{ \varphi_s \mid s \in S \} \subset C^2(I)$, aventi le seguenti due proprietà.

1. Per ogni funzione $y \in C^2(I)$ esistono un numero finito $n(y) > 0$ di indici $s_1, \dots, s_{n(y)}$ e di numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{n(y)}$ tali che

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n(y)} \lambda_i \, \varphi_{s_i}(x) \text{ per ogni } x \in I.$$

2. Ogniqualvolta si prende un numero finito $n > 0$ di indici $s_1, \dots, s_n$ e di numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, se risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \varphi_{s_i}(x) = 0 \text{ per ogni } x \in I$$

allora $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ (indipendenza lineare).

Vogliamo verificare che l'insieme S degli indici non è numerabile. A tal fine supponiamo, per assurdo, di poter prendere $S = \mathbb{N}$. Scriveremo allora φ_k in luogo di φ_s.

Fissiamo un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$, con $a < b$.

Poiché ogni funzione $y \in C^2([a, b])$ ha un'estensione $\tilde{y} \in C^2(I)$, l'insieme X costituisce un insieme di generatori per $C^2([a, b])$.

Da ora in avanti lavoreremo con le restrizioni delle funzioni φ_k all'intervallo $[a, b]$.

Scartate, tra tali funzioni, quelle identicamente nulle in $[a, b]$, applichiamo alle rimanenti il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt rispetto al prodotto scalare di $L^2((a, b))$.

In tal modo otteniamo ancora un insieme di generatori per $C^2([a, b])$, insieme che indicheremo con $Y = \{ \psi_k \mid k \in \mathbb{N} \}$. Posto

$$M_k = \max_{x \in [a,b]} |\psi_k(x)| + \max_{x \in [a,b]} |\psi_k'(x)| + \max_{x \in [a,b]} |\psi_k''(x)|,$$

definiamo la funzione ψ ponendo

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)}{k^2 \, M_k}.$$

Tale serie converge totalmente, dunque anche uniformemente in $[a, b]$, e quindi in $L^2((a, b))$.

Derivando due volte termine a termine si ottiene ancora una serie totalmente convergente, dunque $\psi \in C^2([a, b])$. Ma allora

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n(\psi)} \lambda_i \, \psi_{k_i}(x) \text{ in } [a, b].$$

Ciò è assurdo perché implica che ψ è ortogonale a ψ_k per ogni k diverso da $k_1, \dots, k_{n(\psi)}$, mentre invece dalla definizione di ψ segue che per ogni $k > 0$ si ha

$$\int_a^b \psi(x) \, \psi_k(x) \, dx = \frac{1}{k^2 \, M_k} > 0.$$

NORMA DI $C^2(I)$

Lo spazio funzionale $C^2([a,b])$, dove $[a,b]$ è un qualunque intervallo chiuso e limitato, è dotato della norma

$$\|y\| = \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y''(x)|.$$

Una successione di funzioni $y_k \in C^2([a,b])$ converge rispetto a tale norma se e solo se converge uniformemente, insieme alla successione delle derivate prime y'_k ed a quella delle derivate seconde y''_k.

La suddetta definizione non si può estendere allo spazio $C^2(\mathbb{R})$ perché alcune funzioni in tale spazio sono illimitate, dunque prive di massimo o minimo e con estremo superiore o inferiore infiniti.

Ciò non ostante si può definire$^{(*)}$ una metrica $d(y_1, y_2)$ su $C^2(\mathbb{R})$ ponendo $d(y_1, y_2) = d(y_1 - y_2,\, 0)$, e

$$d(y,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|y\|_k}{1+\|y\|_k},$$

dove $\|y\|_k$ denota la norma della funzione y nelo spazio $C^2([-k,k])$.

Una successione di funzioni $y_k \in C^2(\mathbb{R})$ converge rispetto a tale metrica se e solo se converge uniformemente, insieme alla successione delle derivate prime y'_k ed a quella delle derivate seconde y''_k, in ogni intervallo limitato.

$^{(*)}$ Vedere, ad esempio, la proposizione 6 a pagina 27 in: K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1965.

Verifichiamo che non esiste nessuna norma che induca lo stesso tipo di convergenza.

A tal fine supponiamo, per assurdo, che ci sia una tale norma su $C^2(\mathbb{R})$. La indicheremo con $\| \ \|$.

Scegliamo a piacere una funzione $y_0 \in C^2(\mathbb{R})$, nulla per ogni $x < 0$ ma non identicamente nulla. Per esempio, possiamo prendere

$$y_0(x) = \begin{cases} x^3, & \text{per } x \geq 0, \\ 0 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Posto $y_k(x) = y_0(x-k)$ per $k = 1, 2, \ldots$, osserviamo che le norme

$$\alpha_k = \|y_k\|$$

sono tutte positive perché nessuna delle funzioni y_k è identicamente nulla. Consideriamo allora le funzioni normalizzate

$$\overline{y}_k(x) = \frac{y_k(x)}{\alpha_k}.$$

Esse hanno norma 1 per costruzione. Tuttavia, poiché sono definitivamente nulle su ogni intervallo limitato, esse tendono a zero uniformemente, insieme alle loro derivate prime e seconde, su ogni intervallo limitato.

Dunque si ha $1 = \|\overline{y}_k\| \to 0$: assurdo.

RIFERIMENTI AL LIBRO DI TESTO

Spazi metrici: pagg. 75-76

Spazi normati: pagg. 93-94

Gli spazi $C^k([a, b])$: pag. 103

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi Matematica due. Liguori.