Un teorema sulla convergenza in media

di

F. Rellich (Gottinga)

Presentato da R. Courant alla seduta del 24 gennaio 1930

§1. Un teorema sulla convergenza in media.

Sia $\mathfrak{M}$ un insieme infinito di funzioni (distinte) $u(x,y)$ che siano tutte continue e differenziabili con continuità nell'interno di una regione G del piano xy; il contorno di G sia costituito da un numero finito di curve chiuse con tangente continua a tratti, e non abbia cuspidi. Per tutte le funzioni di $\mathfrak{M}$ esistano gli integrali

$$\iint_G u^2\,dx\,dy, \qquad \iint_G u_x^2\,dx\,dy, \qquad \iint_G u_y^2\,dx\,dy,$$

e si abbia, per tutte le funzioni dell'insieme,

$$\iint_G u^2\,dx\,dy < C, \qquad \iint_G u_x^2\,dx\,dy < C, \qquad \iint_G u_y^2\,dx\,dy < C,$$

con una stessa C fissata. *Allora dall'insieme dato si può estrarre una successione $u_n(x,y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ che converge in media, cioè per la quale si ha*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \iint_G (u_n - u_m)^2\,dx\,dy = 0.$$

La dimostrazione di questo teorema si può svolgere sfruttando la proprietà di completezza delle funzioni trigonometriche, considerando inizialmente un quadrato arbitrario con i lati paralleli agli assi, e poi approssimando la regione G con un numero finito di quadrati. Qui svolgo tuttavia una dimostrazione che non fa uso della suddetta proprietà, e si basa solo su stime elementari di integrali[1].

A tal fine suddividiamo il dominio G in un numero finito, diciamo N, di domini G_ν di area g_ν che non si sovrappongano e la cui forma sarà precisata più avanti. Per ogni funzione u consideriamo la funzione $\overline{u}$, che in ogni G_ν è data da

$$\overline{u} = u^{(\nu)} = \frac{1}{g_\nu} \iint_{G_\nu} u\,dx\,dy; \tag{1}$$

$\overline{u}$ è pertanto una funzione costante a tratti in G.

[1] Ringrazio il signor K. Friedrichs per avermi suggerito di dare tale impostazione alla dimostrazione seguente.

Il nostro teorema segue evidentemente non appena si mostri che:

1) Esiste nell'insieme di funzioni dato una successione $u_1(x,y),\ u_2(x,y), \ldots$ tale che per ogni $N = 1, 2, \ldots$ risulta

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \iint_G (\overline{u}_n(x,y) - \overline{u}_m(x,y))^2\, dx\, dy = 0; \tag{2}$$

2) Per tutte le funzioni u e v dell'insieme e per ogni $\varepsilon > 0$ si può far sì che

$$\left| \iint_G [(u-v)^2 - (\overline{u} - \overline{v})^2]\, dx\, dy \right| < \varepsilon \tag{3}$$

prendendo, indipendentemente da u e v, il numero $N = N(\varepsilon)$ sufficientemente grande. (Si badi che $\overline{u}$ e $\overline{v}$ dipendono da N).

La prima parte di questa tesi si ottiene come segue: per la (1) si ha, per ogni successione $u_n(x,y)$ di funzioni dell'insieme dato,

$$\iint_G (\overline{u}_n(x,y) - \overline{u}_m(x,y))^2\, dx\, dy = \sum_{\nu=1}^{N} (\sqrt{g_\nu}\, u_n^{(\nu)} - \sqrt{g_\nu}\, u_m^{(\nu)})^2$$

con

$$|\sqrt{g_\nu}\, u_n^{(\nu)}| \le \sqrt{g_\nu} \sqrt{\frac{1}{g_\nu} \iint_G u_n^2\, dx\, dy} \le \sqrt{C}.$$

Per il teorema del punto di accumulazione di Weierstrass esiste una sottosuccessione delle $u_n(x,y)$ - denotiamo questa sottosuccessione ancora con $u_n(x,y)$ - tale che le N successioni $\sqrt{g_1}\, u_n^{(1)}$, $\sqrt{g_2}\, u_n^{(2)}$, $\sqrt{g_N}\, u_n^{(N)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ convergono, e

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{N} (\sqrt{g_\nu}\, u_n^{(\nu)} - \sqrt{g_\nu}\, u_m^{(\nu)})^2 = 0. \tag{2a}$$

Effettuando questa costruzione per $N = 1, 2, \ldots$ ecc. e facendo in modo che, per le successioni così ottenute, la successiva sia interamente contenuta nella precedente, la successione diagonale di questo schema soddisfa (2a) per ogni N. Con questo la prima parte della tesi, cioè l'uguaglianza (2), è dimostrata.

Per dimostrare la seconda parte, poniamo per brevità

$$u - v = w, \qquad \overline{u} - \overline{v} = \overline{w} \tag{4}$$

ed otteniamo per il primo membro della (3)

$$\begin{aligned} \left| \iint_G (w^2 - \overline{w}^2)\, dx\, dy \right| &\le \iint_G |w + \overline{w}| \cdot |w - \overline{w}|\, dx\, dy \\ &\le \sqrt{\iint_G (w + \overline{w})^2\, dx\, dy \cdot \iint_G (w - \overline{w})^2\, dx\, dy}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Ora, essendo

$$\iint_G (w + \overline{w})^2\, dx\, dy \le 2 \iint_G w^2\, dx\, dy + 2 \iint_G \overline{w}^2\, dx\, dy$$

si ha per la (4)

$$\iint_G (w+\overline{w})^2\,dx\,dy \leq 16\,C.$$

Abbiamo dunque concluso se mostriamo che l'integrale

$$\iint_G (w-\overline{w})^2\,dx\,dy = \sum_{\nu=1}^{N} \iint_{G_\nu} (w-\overline{w}^{(\nu)})^2\,dx\,dy$$

si può rendere arbitrariamente piccolo per tutte le funzioni w *simultaneamente* prendendo N sufficientemente grande. Ma ciò segue dalla disuguaglianza

$$\iint_{G_\nu} (w-\overline{w})^2\,dx\,dy \leq c_N \iint_{G_\nu} (w_x^2+w_y^2)\,dx\,dy, \tag{6}$$

dimostrata più avanti, nella quale c_N denota una costante che può essere resa arbitrariamente piccola prendendo N sufficientemente grande, indipendentemente dalla funzione w. Sulla base di questa disuguaglianza si ha infatti

$$\iint_G (w-\overline{w})^2\,dx\,dy \leq c_N \iint_G (w_x^2+w_y^2)\,dx\,dy,$$

e siccome

$$\iint_G (w_x^2+w_y^2)\,dx\,dy \leq \iint_G (u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)\,dx\,dy \leq 8\,C$$

si ha anche

$$\iint_G (w-\overline{w})^2\,dx\,dy \leq c_N \cdot 8\,C,$$

con il che tutto è dimostrato.

La disuguaglianza (6) si può dimostrare seguendo K. Friedrichs[2] per particolari domini G_ν tramite semplici stime di integrali. A tal fine prendiamo come G innanzitutto domini delimitati da un segmento di lunghezza k_ν parallelo all'asse x, da due rette perpendicolari ad esso e da una curva $y=y(x)$ differenziabile con continuità a tratti e distante al massimo h_ν e almeno k_ν dalla base; successivamente "triangoli" rettangoli i cui cateti sono segmenti paralleli agli assi aventi lunghezza non superiore ad h_ν, e la cui "ipotenusa" consista di tratti di curva differenziabili con continuità e aventi proiezione unica su entrambi i cateti. Poi prendiamo come G i domini che si ottengono ruotando i precedenti di un angolo arbitrario. Pensiamo ora il dominio G suddiviso[3] in un numero finito di tali domini G_ν per i quali le h_ν e k_ν ($\nu=1,2,\dots,N$) stanno al di sotto di una quantità che tende a 0 per $N\to\infty$; richiediamo inoltre che per ogni ν valga la disuguaglianza $h_\nu \leq a\,k_\nu$ con un numero a che dipende solo dal dominio G.

Per ogni dominio G_ν, essendo $\iint_{G_\nu}(w-\overline{w})\,dx\,dy=0$ si può applicare la disuguaglianza citata e il ragionamento di Friedrichs porge immediatamente

$$\iint_{G_\nu} (w-\overline{w})^2\,dx\,dy \leq b\cdot h_\nu^2 \iint_{G_\nu} (w_x^2+w_y^2)\,dx\,dy,$$

[2] K. Friedrichs: *Die Randwert- und Eigenwertprobleme...*, Math. Ann. **98** in partic. pagg. 230–232. (Il secondo membro della seconda formula a pag. 231 e della prima formula a pag. 232 deve essere moltiplicato per un fattore L).

[3] È facile vedere che questa suddivisione è sempre possibile.

dove b è un numero fissato, dipendente solo dal dominio G. Posto

$$h_N = \max_{\nu=1,2,\ldots,N} h_\nu,$$

il prodotto $b \cdot h_N^2$ ha evidentemente le proprietà richieste per la costante c_N nella (6). Con ciò la dimostrazione del teorema enunciato inizialmente è portata completamente a termine.

Si noti che questo teorema e la dimostrazione testé presentata si estendono immediatamente al caso di più di due variabili.

§2. Applicazioni.

1) Entrambi i noti teoremi sulla molteplicità finita e sulla crescita infinita degli autovalori di un operatore lineare autoaggiunto si ottengono immediatamente dal teorema del §1. Lo dimostro con riferimento all'equazione differenziale $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$ e devo ovviamente verificare quanto segue: data una successione di funzioni $u^{(n)}(x,y)$ linearmente indipendenti e corrispondenti costanti λ_n tali che: 1) $u^{(n)}(x,y)$ è continua nella regione chiusa G, differenziabile due volte con continuità nell'interno di G e soddisfa ivi l'equazione differenziale

$$u_{xx}^{(n)} + u_{yy}^{(n)} + \lambda_n u^{(n)} = 0. \tag{7}$$

2) $u^{(n)}(x,y)$ si annulla sul contorno di G.

3) L'integrale $\iint_G [(u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2]\,dx\,dy$ esiste.

4) $\iint_G (u^{(n)})^2\,dx\,dy = 1$.

Allora non esiste un maggiorante C tale che la disuguaglianza $|\lambda_n| < C$ valga per ogni N.

Se infatti fosse $|\lambda_n| < C$, allora siccome

$$\iint_G [(u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2]\,dx\,dy = \lambda_n$$

(la trasformazione di Green, mediante la quale si ricava questa formula dalla (7), si può applicare alle funzioni $u^{(n)}(x,y)$ sotto le nostre ipotesi) si avrebbe anche

$$\iint_G (u_x^{(n)})^2\,dx\,dy < C, \qquad \iint_G (u_y^{(n)})^2\,dx\,dy < C;$$

quindi per il §1 si avrebbe, per una sottosuccessione,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \iint_G (u^{(n)} - u^{(m)})^2\,dx\,dy = 0.$$

Ma questo è impossibile perché si può supporre che le funzioni siano mutualmente ortogonali, da cui, stante la loro normalizzazione, segue che per $n \neq m$

$$\iint_G (u^{(n)} - u^{(m)})^2\,dx\,dy = 2.$$

Con le stesse considerazioni si può dimostrare il noto teorema secondo il quale la generica (anche non autoaggiunta) equazione differenziale ellittica omogenea può avere soltanto un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti che si annullano sul contorno.

2) Come ulteriore applicazione si ottiene immediatamente il noto fatto che da ogni successione minimizzante di un problema di minimo che conduce ad un problema agli autovalori del tipo anzidetto si può estrarre una sottosuccessione che converge in media. Infatti, ad esempio, per il problema

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy = \mathrm{Min}, \qquad \iint_G u^2\, dx\, dy = 1$$
$$u = 0 \text{ sul contorno di } G$$

segue che, per ogni successione minimizzante $u^{(n)}(x,y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, gli integrali

$$\iint_G (u_x^{(n)})^2\, dx\, dy, \qquad \iint_G (u_y^{(n)})^2\, dx\, dy$$

e naturalmente anche

$$\iint_G (u^{(n)})^2\, dx\, dy$$

sono limitati indipendentemente da n, per cui il nostro teorema porge immediatamente la tesi.

Titolo orig. *Ein Satz über mittlere Konvergenz*, Nachrichten Göttingen **1930** (1930), 30–35 (cfr. www.DigiZeitschriften.de) Trad. it. A. Greco, Università di Cagliari, 27-6-2010.