Dispense di
Analisi Matematica I

Antonio Greco

Dipartimento di Matematica e Informatica
via Ospedale 72, 09124 Cagliari

31 ottobre 2018

$$\boxed{e^{a_n} \longrightarrow e^0 \qquad a_n \to 0}$$

$$3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln 3} \longrightarrow e^0 = 1$$

$$\frac{\ln 3}{n} \longrightarrow 0$$

Indice generale

La copertina è ricavata da un'immagine gentilmente fornitami da Ilaria Usai (2 ottobre 2018).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Come studiare

Come studiare

0) **Rispettare le proprie inclinazioni.** Cercare, innanzitutto, un campo di studi o un'attività lavorativa che ci permetta di esprimere il nostro talento naturale, e che ci possa dare delle soddisfazioni personali.
1) **Studiare molto.** La conquista di una laurea in Fisica richiede un impegno molto più grande di quello necessario per ottenere un diploma.
2) **Essere critici.** Non prendere per buono tutto quello che il docente dice: passarlo al vaglio della propria ragione, cercare conferme o smentite sui libri, parlarne con altre persone.
3) **Usare almeno un libro.** Non limitarsi agli appunti di lezione e al materiale fornito dal professore.
4) **Sfruttare il docente.** Discutere con il professore dopo la lezione. Richiedere colloqui per appuntamento. Scrivere a greco@unica.it
5) **Frequentare assiduamente le lezioni.**

Indicazioni particolari per chi frequenta

1) **Studiare regolarmente** tra una lezione e l'altra: non aspettare la fine del corso, non aspettare di trovarsi a ridosso dell'esame.
2) **Intervenire** durante la lezione per chiedere chiarimenti o esprimere le proprie impressioni.
3) **Partecipare alle esercitazioni in classe** e provare a svolgere da soli gli esercizi. Se necessario, chiedere aiuto al professore.

Errori da non commettere

Arrendersi di fronte agli esercizi e rinunciare a svolgerli: meglio chiedere chiarimenti al docente e/o al tutor.

Ulteriori indicazioni

Una raccolta di domande rivolte agli studenti in sede di esame si trova a pag. 84. Ulteriori indicazioni si possono trovare nella dispensa "Come si studia la matematica" all'indirizzo http://people.unica.it/~antoniogreco/metodo/

Saper chiedere

Indicazioni pratiche

1. Aprite la domanda con uno degli appositi termini della lingua italiana: ad esempio **Come...? Quale...? Perché...?** o similari.

2. In alternativa, chiedete conferma di una vostra affermazione: **È vero che...? È corretto dire che...? È giusto dire che...?**

3. Possibilmente, motivate la domanda: **Nel corso di Fisica abbiamo incontrato l'integrale... la derivata... la serie...** dopodiché formulate la domanda come spiegato sopra.

Gli errori da non commettere

1. *Girare intorno al problema.* Siate diretti.

2. *Complicare la domanda.* Esempio: se voglio sapere come si integra $\int e^{2x+1}\,dx$, non devo chiedere *come si integra* $\int e^{f(x)}\,dx$*, dove* $f(x)$ *è una generica funzione?* (realmente accaduto)

3. *Giustificarsi, scusarsi della domanda: "sa, vengo dal Classico/dalla Ragioneria...", "la volta scorsa ero assente...", "io non so ragionare..."*

4. *Attribuire al professore o ad un suo collega l'origine della domanda, come se fosse una colpa: "Lei aveva detto che...", "Il professore di Fisica ha detto che...", "A scuola mi è stato insegnato che..."*

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
In breve

In breve

Zero non è positivo. Si chiamano *positivi* i numeri reali *maggiori di zero.* Dunque, lo zero non è positivo.

Il fatto che lo zero non sia positivo è in accordo con la regola dei segni: *il prodotto di due numeri concordi nel segno è positivo; il prodotto di due numeri discordi è negativo.*

Invece, se considerassimo (erroneamente) positivo lo zero, allora il prodotto di un particolare numero positivo (lo zero) per un qualunque numero negativo sarebbe positivo (in quanto nullo), contraddicendo la regola dei segni.

Numeri reali. Fra le varie definizioni di numero reale, una delle più semplici per incominciare è la seguente [1, Definizione (I.4), pag. 33]:

> un numero reale è fatto con un segno (il segno $+$ o il segno $-$), poi delle cifre, eventualmente una virgola, e delle cifre decimali che possono anche essere infinite.

La difficoltà di operare su tali numeri, soprattutto quando le cifre decimali sono infinite, ha stimolato la formulazione di altre definizioni, forse più precise ma senza dubbio più impegnative sul piano concettuale. Tali definizioni coinvolgono, in particolare, la nozione di *completezza* di cui si accenna a pag. 15.

L'insieme di tutti i numeri reali si denota con il simbolo $\mathbb{R}$, la cui introduzione è attribuita a *Nicolas Bourbaki*, pseudonimo con il quale, negli anni Settanta, alcuni grandi matematici francesi solevano firmare le proprie opere.

Sul logaritmo. L'invenzione ed il successo dei logaritmi si fondano su di un'importante e ben nota proprietà delle potenze, la cosiddetta *regola della somma degli esponenti.* Tale regola stabilisce, in particolare, quanto segue: indicato con la lettera e il numero di Nepero (di cui si parla più diffusamente a pag. 15), per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{a+b} = e^a \, e^b. \tag{1}$$

Ciò che rende possibile l'uso dei logaritmi è il fatto che, comunque si prendano due numeri positivi x, y, esistono e restano univocamente individuati due numeri reali a, b tali che $e^a = x$ e $e^b = y$: i numeri a e b si chiamano, rispettivamente, il logaritmo naturale di x ed il logaritmo naturale di y, e si scrive: $a = \log x$ e $b = \log y$. Ma essendo il prodotto xy positivo, anch'esso ha un logaritmo: dunque la (1) implica

$$\log xy = \log x + \log y.$$

Quest'ultima relazione esprime il fatto che, operando sui logaritmi, l'operazione di moltiplicazione si riduce a un'addizione.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi sulla retta

Esercizi

1) Trovare l'equazione della retta di coefficiente angolare -2 che interseca l'asse x nel punto di ascissa -1.
2) Disegnare le rette di equazione $x = 3$, $x = 0$, $x = -6$, $y = -2$, $y = 0$, $y = 10^5$, $y = \frac{\pi}{2} - x$, $y = x$, $y = x - 1$.
3) Trovare le coordinate dei punti di intersezione tra la retta di equazione $y = 3 - x/2$ e gli assi cartesiani.
4) Calcolare il rapporto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (detto *rapporto incrementale*) ponendo $f(x) = 6x + 3$, $x = 10^6$, $x_0 = \sqrt{37}$.
5) Trovare il coefficiente angolare della retta r passante per i punti di coordinate $(-1, 7)$ e $(2, 6)$.
6) Tovare l'ordinata del punto di intersezione della retta r dell'esercizio precedente con l'asse y.
7) Determinare due costanti a e b tali che l'uguaglianza $3x^2 = ax + b$ sussista per ogni x reale. □ Non esistono due costanti aventi tale proprietà. □ Esistono infinite possibili scelte di a e b. □ Esiste un'unica soluzione del problema, che è $a =$ $b =$
8) Indicato con P il punto di coordinate $(0, 4)$ e con Q il punto di coordinate $(3, 0)$, trovare le coordinate (x, y) di un punto R, diverso dall'origine, in modo tale che il triangolo PQR sia simile al triangolo PQO. □ Questo problema non ha soluzione. □ Una soluzione del problema è: $x =$, $y =$ e ne esistono anche altre. □ Questo problema ha un'unica soluzione, che è: $x =$, $y =$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi sulla circonf.

Esercizi

1) Trovare la distanza del punto di coordinate $(3, 4)$ dall'origine (suggerimento: si può usare il teorema di Pitagora).
2) Stabilire se il punto di coordinate $(1, 2)$ appartiene al cerchio centrato nell'origine e di raggio 3.
3) Disegnare il luogo dei punti del piano cartesiano le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 4$.
4) Indicata con γ la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1, determinare le equazioni delle rette tangenti a γ nei punti di coordinate $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$.
5) Consideriamo un numero x tale che $-1 < x < 1$. Determinare un numero reale y tale che il punto di coordinate (x, y) appartenga alla circonferenza γ dell'esercizio precedente. □ Questo problema non ha soluzione. □ Questo problema ha un'unica soluzione, che è $y =$ □ Questo problema ha esattamente due soluzioni, che sono $y_1 =$ e $y_2 =$
6) Consideriamo un esagono regolare di lato $\ell = 17.353$. Calcolare il rapporto tra il perimetro dell'esagono e il raggio del cerchio cicoscritto.
7) Consideriamo due poligoni regolari aventi 367 lati ciascuno. Supponiamo che i raggi dei rispettivi cerchi circoscritti siano $r_1 = 22$ e $r_2 = 41$. Indicati con p_1 e p_2 i perimetri dei due poligoni, calcolare la differenza $p_1/r_1 - p_2/r_2$.

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Origini e definizione

Successioni

Definizione. Si chiama *successione numerica* una funzione a valori reali avente per dominio l'insieme dei numeri naturali, solitamente indicata con $a_n = f(n)$ (vedere [1, §4, pag. 34]).

Intuitivamente, una successione numerica è costituita da infiniti numeri (interi o decimali, positivi o negativi), elencati uno dopo l'altro.

Storicamente, uno dei primi esempi di successione numerica è costituito dalla successione delle aree dei poligoni regolari inscritti in un cerchio dato. Il valore di alcuni termini di questa successione fu calcolato da Archimede di Siracusa, nel terzo secolo a.C., per ottenere un'approssimazione dell'area del cerchio.

Espresso in termini moderni, il risultato di Archimede implica che le prime cifre del numero che oggi indichiamo con π sono: 3,14

Ai matematici babilonesi si attribuisce l'invenzione di un metodo per costruire una successione numerica utile per approssimare la radice quadrata di 2 (vedere [1, Esempio (I.8), pag. 36]). A sua volta la radice di 2 permette di ricavare la diagonale del quadrato a partire dal lato.

Definizione di limite finito [1, Definizione (I.5), pagina 35]. Dati una successione (a_n) ed un numero reale x, si dice che x è il limite di a_n, o che a_n tende ad x, se le disuguaglianze

$$-\varepsilon < a_n - x < \varepsilon \tag{2}$$

sono soddisfatte da tutti i termini della successione salvo tuttalpiù un numero finito di essi, comunque si scelga il parametro $\varepsilon > 0$. In tal caso la successione si dice *convergente*, e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x.$$

Esempio 1. La successione $a_n = 1/n$, i cui primi termini sono: 1, 1/2, 1/3, ... converge a zero. Infatti le disuguaglianze $-\varepsilon < 1/n < \varepsilon$ sono soddisfatte per ogni $n > 1/\varepsilon$.

Limite infinito [1, Definizione (I.14), pag. 40]: se la disuguaglianza

$$a_n > M$$

vale per tutti i termini della successione salvo tuttalpiù un numero finito di essi, comunque si scelga il parametro $M \in \mathbb{R}$, si dice che a_n è *divergente* o che *tende all'infinito*, e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Se invece risulta

$$a_n < M$$

per tutti i termini della successione salvo tuttalpiù un numero finito di essi, comunque si scelga il parametro $M \in \mathbb{R}$, si dice ancora che a_n è *divergente*, e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Esempio 2. La successione dei numeri naturali: 0, 1, 2, ... diverge a $+\infty$, mentre la successione dei loro opposti $(0, -1, -2, \dots)$ diverge a $-\infty$.

Successioni irregolari o indeterminate [1, pag. 41, prime righe]. Le successioni che non soddisfano nessuna delle definizioni di limite sopra richiamate si dicono *irregolari* o *indeterminate*.

Esempio 3. La successione i cui termini sono 1, -1, 1, -1, ... non ammette limite.

L'avverbio *"definitivamente"*. Per brevità, una disuguaglianza che sussiste per tutti i termini di una data successione salvo tuttalpiù un numero finito di essi si dice che vale *definitivamente*.

Successioni costanti. È legittimo considerare successioni i cui termini hanno tutti quanti lo stesso valore, come ad esempio 1, 1, 1, ... Tali successioni risultano convergenti ed il loro limite è il comune valore dei loro termini: infatti le disuguaglianze (2) si riducono a $-\varepsilon < 0 < \varepsilon$, dunque sono soddisfatte.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Valore assoluto

Valore assoluto

Si definisce *valore assoluto* di un numero $x \in \mathbb{R}$ la quantità indicata con $|x|$ e data da (cfr. [1, pag. 35, nota a margine])

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Le principali proprietà del valore assoluto sono le seguenti.

1. Risulta $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e l'ugaglianza $|x| = 0$ vale se e solo se $x = 0$.

2. Risulta $|x| = |-x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (proprietà di simmetria).

3. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza

$$|x - y| \leq |x| + |y|, \tag{3}$$

detta *disuguaglianza triangolare*. Sostituendo $z = -y$, la (3) si può equivalentemente scrivere (cfr. [1, esercizio 1 (a), pag. 70]):

$$|x + z| \leq |x| + |z|.$$

Per verificare la (3), dato che entrambi i membri sono non negativi, è sufficiente verificare che

$$|x - y|^2 \leq \big(|x| + |y|\big)^2.$$

Svolgendo i quadrati, tenendo presente che $|z|^2 = z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, l'ultima disuguaglianza si riduce a $-xy \leq |x|\,|y|$, la cui correttezza si riconosce immediatamente. A questo proposito si noti che $|x|\,|y| = |xy|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Utilità del valore assoluto. Il valore assoluto si presta a notevoli applicazioni, in algebra, in geometria analitica e nella teoria dei limiti.

1. In algebra, usando il valore assoluto si può scrivere $\sqrt{x^2} = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si noti che l'uguaglianza $\sqrt{x^2} = x$ sussiste se e solo se $x \geq 0$, dunque è sbagliato scrivere $\sqrt{x^2} = x$ per $x < 0$. In questo errore si rischia di cadere perché con un'espressione letterale non preceduta dal segno $-$ (meno) si può benissimo indicare una quantità negativa.

2. In geometria analitica il valore assoluto consente di esprimere la distanza tra due punti di ascissa x_1 e x_2 sull'asse delle x mediante la formula $\operatorname{dist}(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, indipendentemente dal fatto che x_1 sia più grande o più piccolo di x_2.

3. Nella definizione di limite, usando il valore assoluto le due disuguaglianze (2) si riducono a

$$|a_n - x| < \varepsilon \tag{4}$$

e perciò possono essere sostituite da una sola disuguaglianza [1, pag. 45, nota a margine].

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Notazione

Notazione

Essendo materialmente impossibile scrivere uno per uno tutti i termini di una successione, si ricorre principalmente alle tre tecniche appresso descritte per individuare una particolare successione.

1. Scrivere un'espressione letterale contenente la variabile n (oppure i, o anche j, o k, eccetera). A tale variabile vanno sostituiti i numeri naturali se si vogliono ricostruire i termini della successione considerata. Questa è la tecnica utilizzata più frequentemente.

Attenzione: non si confonda la ricerca del limite di una successione, definito nelle pagine precedenti, con la manipolazione suggestiva dell'espressione letterale usata per rappresentare la successione stessa.

Per evitare di cadere in questo errore può essere utile la tecnica seguente.

2. Scrivere alcuni termini iniziali della successione, seguiti dai puntini sospensivi. Esempio:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

Questa tecnica si fonda sull'aspettativa che chi legge sia in grado di ricostruire i termini successivi.

3. Definizione ricorsiva: si scrive esplicitamente il termine a_0, e poi si spiega come ottenere a_{n+1} da a_n. Esempio: ponendo $a_0 = 1$ e specificando che $a_{n+1} = (n+1)\, a_n$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$ si definisce la successione dei fattoriali, indicata con l'ausilio del punto esclamativo: $a_n = n!$ (cfr. [1, esercizio 30, pag. 72]).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Teoremi sui limiti

Teoremi sui limiti

Teorema della permanenza del segno (cfr. [1, esercizio 12, pag. 71]). Se una successione a_n converge ad un limite $x > 0$, oppure diverge a $+\infty$, allora risulta $a_n > 0$ definitivamente.

Corollario 1. Se i termini di una data successione (a_n) soddisfano tutti la disuguaglianza $a_n \ge 0$, allora l'eventuale limite x della successione soddisfa la disuguaglianza $x \ge 0$.

Corollario 2. Se i termini di una data successione (a_n) soddisfano tutti la disuguaglianza $a_n > 0$, allora l'eventuale limite x della successione soddisfa la disuguaglianza $x \ge 0$.

Teorema del confronto [1, Proposizione (I.18), pagina 45]. L'enunciato si articola in due parti. Prima parte: serve per trovare il limite di una successione (b_n) conoscendo il limite di due particolari successioni (a_n) e (c_n) sotto le seguenti ipotesi:

$$a_n \le b_n \le c_n \text{ definitivamente, e}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n.$$

Sotto tali ipotesi si dimostra che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Seconda parte: sapendo che la successione (a_n) diverge a $+\infty$, e che $a_n \le b_n$ definitivamente, si può concludere che anche b_n diverge a $+\infty$ senza bisogno di una terza successione (c_n).

Operaz. sui limiti

1. Limite di una somma [1, Proprietà (I.9), pag. 45]. Se due successioni (a_n) e (b_n) convergono rispettivamente ai numeri a e b, allora la successione delle somme $c_n = a_n + b_n$ converge ad $a + b$, e quella delle differenze $d_n = a_n - b_n$ converge ad $a - b$.

Definizione. Si dice che una successione numerica (a_n) è *limitata superiormente* se esiste una costante C tale che $a_n \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione. Se esiste una costante C avente la proprietà di cui sopra, allora anche le costanti $C+1$, $C+0{,}1$, $C+3$ eccetera hanno la stessa proprietà. Tutte le costanti aventi la suddetta proprietà si dicono *maggioranti* della successione.

Successioni limitate. Si dice che una successione numerica (a_n) è *limitata inferiormente* se esiste una costante c tale che $c \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le eventuali costanti c soddisfacenti tale disuguaglianza per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dicono *minoranti* della successione. Le successioni limitate sia superiormente che inferiormente si dicono *limitate*.

Nesso tra limitatezza e convergenza. Non tutte le successioni limitate ammettono limite: si pensi, ad esempio. alla successione $(-1)^n$ che è limitata e non ammette limite. Si può dimostrare che tutte le successioni che ammettono limite finito sono limitate. Infatti, se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x \in \mathbb{R}$$

vuol dire che le disuguaglianze (2) valgono definitivamente, comunque si prenda il valore del parametro $\varepsilon > 0$. Prendendo, per semplicità, $\varepsilon = 1$, si ottiene

$$x - 1 < a_n < x + 1$$

definitivamente. Ciò significa che gli eventuali termini che non soddisfano le due disuguaglianze qui sopra sono in numero finito. Ma allora esiste un'opportuna costante C tale che $|a_n| \leq C$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, come volevasi dimostrare.

1 bis. Se la successione (a_n) diverge a $+\infty$, e se (b_n) è limitata, allora la successione delle somme $c_n = a_n + b_n$ e quella delle differenze $d_n = a_n - b_n$ divergono entrambe a $+\infty$.

1 ter. Se entrambe le successioni (a_n) e (b_n) divergono a $+\infty$, allora anche la successione delle somme $c_n = a_n + b_n$ diverge a $+\infty$.

Infatti, qualunque sia $M \in \mathbb{R}$, per la definizione di limite infinito e per l'ipotesi che $a_n, b_n \to +\infty$ risulta $a_n > |M|$ e $b_n > |M|$ definitivamente. Sommando termine a termine le due disuguaglianze precedenti si trova

$$c_n > 2\,|M| \geq |M| \geq M$$

definitivamente, e la tesi segue dalla definizione di limite infinito.

La congiunzione *"infatti"*. La congiunzione *"infatti"* viene spesso utilizzata per introdurre la dimostrazione di una tesi appena enunciata (vedi sopra).

2. Limite di un prodotto [1, Proprietà (I.9), pagina 45]. Se due successioni (a_n) e (b_n) convergono rispettivamente ai numeri a e b, allora la successione dei prodotti $a_n\, b_n$ converge ad ab.

2 bis. Se la successione (a_n) diverge a $+\infty$, e b_n converge ad un numero reale $b \neq 0$, allora il prodotto $a_n\, b_n$ diverge a ∞ con il segno di b.

2 ter. Se entrambe le successioni (a_n) e (b_n) divergono a $+\infty$ il prodotto $a_n\, b_n$ diverge a $+\infty$.

3. Limite di un rapporto (cfr. [1, Proprietà (I.9), pagina 45]). Se due successioni (a_n) e (b_n) convergono rispettivamente ai numeri a e b, e se b è diverso da zero, allora la successione dei rapporti a_n/b_n converge al rapporto a/b. Si noti che dall'ipotesi che $b \neq 0$ segue, mediante il teorema della permanenza del segno, che $b_n \neq 0$ definitivamente, e quindi i rapporti a_n/b_n sono ben definiti almeno da un certo punto in poi.

3 bis. Se la successione (a_n) è limitata, e $b_b \to +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Infatti per ipotesi si ha $|a_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$, l'ipotesi che b_n diverga a $+\infty$ garantisce che

$$b_n > \frac{C}{\varepsilon}$$

definitivamente. Ma allora $|a_n|/b_n < \varepsilon$ definitivamente, e la tesi segue dalla definizione di limite (vedere (4)).

Dis. di Bernoulli

Per ogni numero reale $a \geq 0$ ed ogni intero $n \geq 0$ si ha

$$a^n \geq 1 + (a-1)\,n. \tag{5}$$

Tale disuguaglianza, detta talvolta disuguaglianza di Bernoulli, si può dimostrare facilmente per induzione procedendo come segue.

1. Base dell'induzione. Si verifica che la (5) sussiste nel caso particolare $n = 0$ effettuando direttamente la sostituzione: si ottiene 1 sia al primo membro che al secondo, dunque la disuguaglianza è verificata.

2. Passo induttivo: ammesso di essere arrivati a dimostrare la (5) per un particolare valore di n (ipotesi induttiva), verifichiamo che essa continua a sussistere per il valore successivo: verifichiamo cioè che

$$a^{n+1} \geq 1 + (a-1)\,(n+1). \tag{6}$$

A tal fine, usando la (5) e l'ipotesi $a \geq 0$, scriviamo

$$a^{n+1} = a\,a^n \geq a\,(1 + (a-1)\,n)$$

da cui segue che

$$a^{n+1} \geq a + a^2\,n - an = a + (a-1)^2\,n + an - n.$$

Trascurando il termine $(a-1)^2\,n$, che è maggiore o uguale a zero, otteniamo

$$a^{n+1} \geq a + an - n = 1 + (a-1)\,(n+1),$$

e cioè la (6).

3. Conclusione: per il principio di induzione matematica, si conclude che la (5) vale per ogni intero $n \geq 0$.

Corollario. Verifichiamo che per ogni numero reale $b \geq 0$ e per ogni intero $n \geq 1$ si ha [1, (I.7), pag. 64]

$$b^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{b-1}{n}. \tag{7}$$

A tal fine basta sostituire nella (5)

$$a = 1 + \frac{b-1}{n} \geq 0$$

cosicché si ottiene

$$\left(1 + \frac{b-1}{n}\right)^n \geq b.$$

Prendendo la radice ennesima di ambo i membri, che sono non negativi, la disuguaglianza si conserva, e si giunge alla (7).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Limiti di potenze

Limiti di potenze

Limiti di potenze. Per verificare che per ogni $a > 1$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

basta applicare la (5). Consideriamo adesso un numero $c \in (0,1)$ e poniamo $a = \frac{1}{c} > 1$. Essendo $c^n = \frac{1}{a^n}$, e sapendo che $a^n \to +\infty$, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} c^n = 0. \tag{8}$$

Ora indichiamo con b un numero reale maggiore di 1, cosicché $b^{\frac{1}{n}} > 1$. Usando la (7) ed il teorema del confronto, si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Infine, preso $c \in (0,1)$, e posto $b = \frac{1}{c} > 1$, dal risultato precdente si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Più in generale si può dimostrare quanto segue.

1. Se (a_n) e (b_n) sono due successioni convergenti rispettivamente ad a e b, con $a > 0$, allora la successione delle potenze $a_n^{b_n}$ converge ad a^b [1, (I.19), pag. 45].
2. Se $a_n \to a > 1$, e se $b_n \to +\infty$, allora $a_n^{b_n} \to +\infty$.
3. Se $a_n \to a \in (0,1)$, e se $b_n \to +\infty$, allora $a_n^{b_n} \to 0$.

Le formule precedenti si possono vedere come casi particolari, validi quando la base è costante, di questi ultimi e più generali enunciati.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Il numero di Nepero

Il numero e

Una delle diverse (ma equivalenti) definizioni del numero di Nepero e (detto all'estero *numero di Eulero*) è la seguente:

Definizione del numero di Nepero.

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{9}$$

Affinché la definizione sia ben posta, occorre sapere che la successione che figura nella (9) ammette limite. Questo discende dal fatto che essa è monotòna (strettamente crescente) e limitata, e da una notevole proprietà dell'insieme dei numeri reali, detta *completezza*:

Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$. *Ogni successione monotòna e limitata ammette limite finito.*

Una dimostrazione della monotonia della successione $(1 + 1/n)^n$ si può trovare, ad esempio, in [8, Teorema 3.7, pagina 192]. Per una discussione della proprietà di completezza si veda [1, pag. 44].

Osserviamo che anche altri numeri, di uso più comune di e, si definiscono come limiti di successioni, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4. Un altro numero definito mediante un limite. Una celebre successione convergente a $\sqrt{2}$, ispirata alla matematica babilonese, è esaminata in [1, Esempio (I.8), pagina 36]. Descriviamo qui di seguito una costruzione alternativa, basata sul cosiddetto metodo di bisezione. Si considera l'intervallo $(a_0, b_0) = (1,2)$, al quale

$\sqrt{2}$ deve (se esiste) appartenere, e lo si suddivide a metà tramite il punto $c_0 = (a_0 + b_0)/2 = 1{,}5$. Verificato che $c_0^2 > 2$ (il che non richiede di calcolare radici quadrate, ma solo di fare una moltiplicazione), consideriamo l'intervallo $(a_1, b_1) = (a_0, c_0)$ e suddividiamolo di nuovo a metà tramite il punto $c_1 = (a_1 + b_1)/2 = 1{,}25$. Stavolta troviamo $c_1^2 < 2$, e perciò andiamo a considerare l'intervallo $(a_2, b_2) = (c_1, b_1)$. Procedendo in tal modo si definiscono due successioni monotòne e limitate $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in N}$, che per la *completezza* di $\mathbb{R}$ ammettono limite. Anzi, ammettono lo stesso limite perché $b_n - a_n = 2^{-n} \to 0$. Indicato per il momento con ℓ tale limite, resta da verificare che $\ell^2 = 2$. A tal fine, cominciamo con l'osservare che, per la monotonia di a_n e b_n, si ha $a_n < \ell < b_n$ per ogni n. Dunque, elevando al quadrato i tre termini di questa catena di disuguaglianze (termini che sono positivi) troviamo

$$a_n^2 < \ell^2 < b_n^2 \tag{10}$$

D'altra parte, anche le successioni a_n^2 e b_n^2 sono monotòne e limitate, ed ammettono uno stesso limite perché $b_n^2 - a_n^2 = (a_n + b_n)(a_n - b_n) \to 0$. Poiché, per costruzione, si ha $a_n^2 < 2 < b_n^2$, segue che $a_n^2, b_n^2 \to 2$. A questo punto, richiamando la (10) si deduce che $\ell^2 = 2$. Dunque la radice quadrata di 2 si può definire come il limite delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costruite come sopra.

Conseguenze della (9). Tornando al numero di Nepero, osserviamo che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

e quindi anche questa successione tende ad e. Volendo considerare valori negativi di n, poniamo $n = -k$ con $k > 1$, ed osserviamo che

$$\left(1 + \frac{1}{-k}\right)^{-k} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k} = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k}$$

Ponendo $m = k - 1$ si trova, infine,

$$= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} \to e,$$

Dunque

$$\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Si può anche verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e, \tag{11}$$

dove x varia nell'insieme dei numeri reali. Ciò non è del tutto immediato, come mostra il seguente esempio.

Esempio 5. Confronto tra sen πn e *sen* πx. Consideriamo la successione $\operatorname{sen}\pi n$. Si ha che $\operatorname{sen}\pi n \to 0$ per $n \to +\infty$ perché tale successione è identicamente nulla. Invece, la funzione $\operatorname{sen}\pi x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

Dimostrazione della (11). Per dimostrare la (11), osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $[x] \le x < [x] + 1$, dove $[x]$ denota la *parte intera* di x. Dunque per ogni $x \ge 1$ si ha

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

e la tesi segue dalle considerazioni precedenti. Similmente si dimostra che

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Esercizi sui limiti

Esercizi

1) Calcolare i primi tre termini delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad c_n = \frac{2n}{n+1}$$

2) Stabilire se le successioni dell'esercizio 1 sono monotone.

3) Stabilire se le successioni dell'esercizio 1 ammettono limite. In caso affermativo, determinarlo.

4) Posto $d_n = \dfrac{2^n}{n}$, calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}$

5) Ammettiamo per assurdo che il limite di d_n per $n \to +\infty$ sia un numero reale $\ell > 0$. Calcolare sotto questa ipotesi il limite dell'esercizio precedente.

6) Verificare che la successione dei d_n dell'esercizio 4 è monotona, e calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n$

7) Indicata con $[x]$ la parte intera di x, e cioè il più grande intero non superiore a x, disegnare il grafico della funzione $y = [x]$.

8) Stabilire per quali valori positivi della variabile x risulta $\dfrac{2^x}{x} \geq \dfrac{2^{[x]}}{[x]+1}$ e calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x}$

Il simbolo $\binom{n}{k}$

Il simbolo $\binom{n}{k}$, che si legge *"enne sopra cappa"*, si può definire in diversi modi equivalenti, che corrispondono a diverse sue applicazioni.

Definizione implicita: si dicono *coefficienti binomiali* i coefficienti, indicati con $\binom{n}{k}$, che figurano nella seguente espressione della potenza n-esima del binomio $a + b$ (*formula di Newton*)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \tag{12}$$

dove n è un numero naturale arbitrario. Questa definizione è *implicita* perché individua $\binom{n}{k}$ senza darne direttamente il valore. Applicando tale definizione, cerchiamo ora un'espressione esplicita dei coefficienti binomiali.

Esempio 6. Quadrato di un binomio. Partendo dall'uguaglianza $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$, e applicando la proprietà distributiva, si trova $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$. Dunque la (12) è verificata nel caso $n = 2$ con i seguenti coefficienti:

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1.$$

Determinazione combinatoria dei coefficienti binomiali. Per ricavare i coefficienti binomiali per ogni intero $n \geq 1$ e $k = 0, \ldots, n$, procediamo in modo analogo.

Cominciamo con l'osservare che

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot \cdots \cdot (a+b)}_{n \text{ volte}}. \tag{13}$$

Svolgendo il prodotto con la proprietà distributiva si ottiene la somma di 2^n termini, ciascuno dei quali è il prodotto di n lettere, che possono essere a o b, ciascuna delle quali, a sua volta, proviene da uno degli n fattori $(a+b)$ che figurano nella (13). Pertanto, il termine generale della somma si può scrivere come $\ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_n$, dove ogni lettera ℓ_i, per $i = 1, \ldots, n$, è una a o una b.

Alcuni dei termini suddetti si possono sommare tra loro: a tal fine, occorre e basta che contengano uno stesso numero di lettere a: il coefficiente $\binom{n}{k}$ è il numero di quei termini che contengono k volte la lettera a. Per contarli, procediamo come segue. Per $k = 0$ si ha un unico termine, e cioè $b \cdot \ldots \cdot b = b^n$. Di conseguenza

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Se, invece, $k > 1$, immaginiamo per un attimo di distinguere le k lettere a all'interno del termine $\ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_n$, e di indicarle con $a_1, \ldots, a_k$. La a_1 può provenire da uno qualunque degli n fattori $(a+b)$ che figurano nella (13). La a_2 può provenire da uno qualunque degli $n-1$ fattori $(a+b)$ diversi da quello di prima, e così via. Infine, la a_k può provenire da uno qualunque degli $n-k+1$ fattori $(a+b)$ diversi dai precedenti. I termini che contengono k volte la lettera a sarebbero dunque, in base a questo ragionamento,

$$D_{n,k} = n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \tag{14}$$

Così facendo, tuttavia, abbiamo contato $k!$ volte ciascun termine: per esempio, il termine

$$a \cdot a \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n-2 \text{ volte}},$$

che compare quando si prende la a dai primi due fattori $(a+b)$ al secondo membro della (13), e la b dagli altri fattori, è stato contato due volte: una prima volta quando abbiamo indicato con a_1 la a del primo fattore e con a_2 quella del secondo, ed una seconda volta quando abbiamo indicato con a_1 la a presa dal secondo fattore e con a_2 quella presa dal primo.

L'espressione (14) va perciò divisa per il numero delle permutazioni delle k lettere a, che è $k!$. Si trova dunque

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \qquad \text{per } k = 1, \ldots, n.$$

Definizione esplicita: per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni intero $k \geq 0$ si pone

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \frac{x\,(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!} & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Nel caso particolare in cui $x = n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$ risulta

$$n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

dunque si può scrivere [1, esercizio 30, pag. 72]:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{15}$$

Per sostituzione diretta del valore $k = 0$ si verifica che quest'ultima espressione resta valida anche in tale caso.

Proprietà dei coefficienti binomiali. Ci concentriamo sul caso in cui $x = n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, \ldots, n\}$. Cominciamo con l'osservare che, se $k \geq 1$, il prodotto $D_{n,k}$ al secondo membro della (14) contiene esattamente k fattori. Per proseguire, osserviamo che dalla (15) segue immediatamente che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{16}$$

come pure

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

qualunque sia $k \in \{0, \ldots, n\}$. Ancora mediante la (15) si dimostra la proprietà principale dei coefficienti binomiali: per ogni intero $n \geq 1$ ed ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ risulta

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{17}$$

Triangolo di Tartaglia. La proprietà (17), insieme alle (16), consente di calcolare ricorsivamente i coefficienti binomiali disponendoli in uno schema chiamato *triangolo di Tartaglia* in onore di Niccolò Fontana (1506–1557) detto Tartaglia.

$$\begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{0} & & & \\
\boxed{\binom{2}{0}} & \boxed{\binom{2}{1}} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \boxed{\binom{3}{1}} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

La figura mostra una porzione del triangolo di Tartaglia. In evidenza tre coefficienti legati fra loro dalla rerlazione (17).

Verifica induttiva della formula di Newton. Avendo definito direttamente i coefficienti binomiali tramite la (15), resta da dimostrare la validità della formula (12). Ciò può farsi per induzione, procedendo come segue [1, esercizio 31, pag. 72] .

1. Base dell'induzione. Verifichiamo che la formula (12) vale nel caso particolare $n = 1$. Effettuando la sostituzione, il primo membro si riduce a $(a+b)^1 = a+b$, mentre il secondo membro diventa

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k\, b^{0-k} = b + a,$$

dunque l'uguaglianza è verificata.

2. Passo induttivo. Ammettiamo di essere arrivati a dimostrare la (12) per un particolare valore di n (ipotesi induttiva), e vediamo se risulta

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n-k}. \tag{18}$$

A tal fine, scriviamo

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Applicando la proprietà distributiva, si ottiene

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k}.$$

Scorporando il primo addendo ($k = 0$), la seconda sommatoria si può riscrivere come segue:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k}.$$

L'altra sommatoria, invece, posto $j = k+1$ diventa:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} + a^{n+1}, \end{aligned}$$

dunque possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} = b^{n+1} &+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} + a^{n+1}. \end{aligned}$$

Scrivendo k al posto dell'indice di somma j (che è un indice muto), e utilizzando la proprietà (17) dei coefficienti binomiali, otteniamo

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + a^{n+1}.$$

Portando all'interno della sommatoria i termini b^{n+1} ed a^{n+1}, che corrispondono ai valori $k = 0$ e $k = n+1$ dell'indice di somma, otteniamo la (18), come volevasi dimostrare.

3. Conclusione: per il principio di induzione matematica, si conclude che la (12) vale per ogni intero $n \geq 1$, mentre il caso $n = 0$ si verifica per sostituzione.

Corollario: ponendo $a = b = 1$ nella (12) si ricava un'ulteriore proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi coeff. bin. 1

Esercizi

Definiamo i *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ come quei numeri interi tali che, qualunque siano i numeri reali a, b ed il numero naturale n, valga la seguente uguaglianza:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}. \tag{19}$$

1) Trovare tre numeri $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ e $\binom{2}{2}$ che soddisfano la (19) con $n = 2$.

2) Consideriamo tre oggetti distinti a_1, a_2 e a_3. Scrivere per esteso tutte le permutazioni dell'insieme $\{\, a_1, a_2, a_3 \,\}$.

3) Scrivere per esteso tutte le combinazioni che si possono ottenere prendendo due elementi a piacere (diversi fra loro) dall'insieme precedente.

4) Verificare che $\binom{n}{2} = n\,(n-1)/2$. Suggerimento: confrontare la (19) con la seguente uguaglianza:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)}_{n\text{ volte}}.$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi coeff. bin. 2

Esercizi

1) Verificare l'uguaglianza $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$. Suggerimento: sviluppare $(x+y)^n$ con la formula di Newton, e poi prendere x e y uguali a...

2) Verificare l'uguaglianza $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, dove n è un intero positivo e k un intero appartenente all'intervallo $[0, n]$. Suggerimento: sfruttare l'esercizio precedente, usando come indice di somma la variabile $h = n - k$.

3) Determinare due numeri reali m e q tali che $(1+x)^{100} \approx mx + q$, per x vicino a 0.

4) Determinare tre numeri reali a_0, a_1, a_2 tali che $(1+x)^{100} = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + o(x^2)$, per x vicino a 0.

5) Svolgere il prodotto $(a+b)^3$ usando la proprietà distributiva, ma non quella commutativa. Fra gli 8 termini così ottenuti, contare quelli che contengono esattamente due b.

6) Immaginiamo di svolgere il prodotto $(a+b)^{100}$ usando la proprietà distributiva, ma non quella commutativa. Fra i 2^{100} termini che si otterrebbero, stabilire quanti sono quelli che contengono esattamente due b. Come si potrebbe procedere per scriverli per esteso?

7) È possibile trovare dei coefficienti $c_{n,k}$, *diversi da* $\binom{n}{k}$, tali che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\, a^{n-k}\, b^k$?

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Serie numeriche

Serie numeriche

Motivazioni. Talvolta si è costretti, per la difficoltà del problema considerato, a ripiegare su di una soluzione approssimata. Questo capita, ad esempio, quando si deve calcolare il valore numerico di π. Le serie consentono di esprimere rigorosamente certe approssimazioni.

Ad esempio, il calcolo di π è da secoli oggetto di studi approfonditi. In particolare, si attribuisce a Leibniz (1674) la scoperta che

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Nel 1997, invece, è stata scoperta la seguente formula:

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{2}{8k+6} \right).$$

Ulteriori informazioni su questa formula, e su altre formule simili, si possono trovare sulla rivista "Notices of the American Mathematical Society" (agosto 2013, pag. 847).

La necessità di approssimare funzioni importanti come e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, con dei polinomi (che si possono calcolare mediante operazioni aritmetiche), è una motivazione allo studio delle *serie di funzioni*.

Significato intuitivo. Intuitivamente, la somma di una serie è la somma di infiniti termini. I termini da sommare si possono indicare con la notazione a_k, dove l'indice k varia nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

Definizione [1, Definizione (XII.3), pag. 423]. Per definire la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{20}$$

si considera la successione delle somme parziali S_n, dette anche "somme ridotte", date da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

e si procede come segue. Se esiste finito il limite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \tag{21}$$

si dice che la serie (20) è convergente, e la sua somma è il valore numerico del suddetto limite. Se, invece, il limite (21) è $+\infty$ o $-\infty$, si dice che la serie (20) è divergente a $+\infty$ o a $-\infty$. Se, infine, la successione delle somme ridotte S_n non ammette limite, si dice che la serie (20) è indeterminata.

L'errore tipico. Il tipico errore del principiante è quello di confondere tra loro le due successioni coinvolte nella definizione: quella dei termini da sommare a_k, e quella delle somme ridotte S_n.

Un'osservazione utile. Consideriamo una data serie i cui termini indichiamo con a_k, e siano S_n le corrispondenti somme ridotte. Cambiando il valore del primo termine a_0 di una quantità δ_0, e cioè sostituendo a_0 con $a_0 + \delta_0$, si ottiene una nuova serie le cui somme ridotte sono date da $S_n + \delta_0$. Ma allora il *carattere* della serie (cioè il fatto che essa sia convergente, divergente o indeterminata) non dipende dal valore numerico del primo termine.

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Condizione necessaria

Cond. necessaria

Come ricavare a_n a partire da S_n. Partendo dall'uguaglianza $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ e sottraendo da essa l'uguaglianza seguente: $S_{n-1} = a_0 + \cdots + a_{n-1}$ si trova

$$S_n - S_{n-1} = a_n. \tag{22}$$

Dunque è possibile ritrovare gli addendi a_n conoscendo le somme parziali S_n.

Una condizione necessaria per la convergenza [1, Teorema XII.24, pag. 428]. Condizione necessaria affinché la serie (20) converga, è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{23}$$

Infatti, se per ipotesi risulta

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

allora si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S.$$

Di conseguenza, passando al limite nella (22), si ottiene la (23), come volevasi dimostrare.

La suddetta condizione non è sufficiente affinché la serie considerata converga. Per dimostrarlo, basta esibire un controesempio, come quello costituito dalla cosiddetta serie armonica (vedere appresso).

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Serie armonica

Serie armonica

Definizione. Si chiama serie armonica la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$$

La serie armonica è divergente perché [1, Esempio (XII.19)]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 &+ \frac{1}{2} \\ &+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{32}\right) \\ &+ \ldots \\ \geq 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty.\end{aligned}$$

La disuguaglianza sopra si ottiene osservando che

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$
$$\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

eccetera. Questa dimostrazione è attribuita a Nicola d'Oresme, vescovo di Lisieux (anno 1360) [7, vol. I, pag. 509].

Serie geometrica

Definizione. Si chiama "serie geometrica" la serie in cui ciascun termine (tranne il primo) si ottiene dal termine precedente moltiplicandolo per un numero fisso detto "ragione" e indicato solitamente con la lettera q. L'espressione generale della serie geometrica è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_0\, q^k \tag{24}$$

dove a_0 e q possono avere un qualunque valore fissato. In particolare, se $a_0, q \neq 0$, i termini $a_k = a_0\, q^k$ sono diversi da zero e si constata che il rapporto tra due termini consecutivi vale

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_0\, q^{k+1}}{a_0\, q^k} = q.$$

La scelta della lettera q è dovuta al fatto che essa è l'iniziale della parola "quoziente". Il termine "ragione" deriva invece dal latino "ratio", cioè rapporto [1, pag. 424].

Somma ridotta della serie geometrica. Lo studio esauriente della serie geometrica è possibile grazie alla seguente espressione della somma ridotta, valida per $q \neq 1$, la quale, secondo [7, vol. I, pag. 509], si ricava dagli *Elementi* di Euclide:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{25}$$

Per dimostrare la (25) basta moltiplicare ambo i membri per $1-q$. Svolgendo il seguente prodotto:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$$

con la proprietà distributiva, si trova infatti

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\\ &= 1-q^{n+1}.\end{aligned}$$

Carattere della serie geometrica. Se il primo termine a_0 è nullo, sono nulli anche tutti gli altri termini. In tal caso, applicando la definizione, si trova che la serie geometrica (24) converge e la sua somma è 0.

Se, invece, $a_0 \neq 0$, applicando la definizione si trova che il carattere della serie geometrica (24) è lo stesso della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k. \tag{26}$$

Ci concentriamo quindi su quest'ultima. Se $q = 1$, tutti i termini valgono 1 e la serie diverge a $+\infty$. Se, invece, $q \neq 1$, possiamo usare la (25) ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{se } q \in (-1,1)\\ +\infty & \text{se } q > 1\end{cases}$$

mentre il limite non esiste se $q \leq -1$. Pertanto, se $q \in (-1,1)$, la serie (26) converge e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \tag{27}$$

Se, invece $q \geq 1$, la serie (26) diverge a $+\infty$. Se, infine $q \leq -1$, la serie (26) è indeterminata.

Achille e la tart.

Achille corre con velocità costante v_A verso una tartaruga, posta inizialmente ad una distanza d_0 da lui. La tartaruga fugge con una velocità costante v_T. Essendo $v_T < v_A$, il rapporto $q = v_T/v_A$ è minore di 1.

Achille percorre la distanza d_0 impiegando il tempo $t_0 = d_0/v_A$. In tale lasso di tempo, la tartaruga percorre la distanza $d_1 = t_0\, v_T$, e cioè $d_1 = d_0\, q$.

Successivamente Achille percorre la distanza d_1 impiegando il tempo $t_1 = d_1/v_A$. In tale lasso di tempo, la tartaruga percorre la distanza $d_2 = t_1\, v_T$, e cioè $d_2 = d_1\, q = d_0\, q^2$.

Procedendo in questo modo, Achille percorre una successione di distanze d_k la cui espressione generale è $d_k = d_0\, q^k$. Per la (27), la somma di tutte le distanze è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} d_0\, q^k = d_0 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{d_0}{1-q}.$$

Il tempo necessario ad Achille per percorrere la distanza d_k è

$$t_k = \frac{d_k}{v_A} = \frac{d_0}{v_A}\, q^k,$$

quindi la somma di tutti i tempi è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_k = \frac{d_0}{v_A}\,\frac{1}{1-q} = \frac{d_0}{v_A - v_T}.$$

Questo è, infatti, il tempo necessario ad Achille per raggiungere la tartaruga [1, esercizio 42, pag. 456].

Converg. assoluta

Le serie a termini positivi [1, pag. 432] godono di una notevole proprietà, espressa dal seguente teorema:

Teorema 1. *Le serie i cui termini sono tutti positivi, o almeno non negativi, non sono indeterminate: esse possono essere convergenti o divergere a $+\infty$.*

Infatti, se $a_n \geq 0$ per ogni n, dalla (22) si ricava $S_{n+1} \geq S_n$, dunque la successione delle somme ridotte è monotona non decrescente. La proprietà più importante (se proprio dobbiamo sceglierne una) dell'insieme dei numeri reali, che è la completezza, garantisce che tutte le successioni monotone ammettono limite (finito o infinito): da essa segue l'asserto.

Le serie a termini non negativi hanno un ruolo importante anche nello studio delle serie a termini di segno variabile. Vediamo perché.

Definizione. Si dice che la serie (20) è assolutamente convergente se è convergente la serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

Si può dimostrare che la convergenza assoluta è una condizione sufficiente affinché la serie (20) converga [1, Proposizione (XII.41), pag. 438].

Per verificare che l'assoluta convergenza non è necessaria per la convergenza semplice basta esibire un controesempio (vedere a pagina 30).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Criteri di convergenza

Criteri di conv.

Criterio del confronto [1, (XII.32), pag. 433]. Se risulta $0 \le a_k \le b_k$ per ogni k, e se la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

è convergente, allora lo è anche la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

L'enunciato discende dalla definizione di somma di una serie, usando il teorema del confronto per i limiti, e tenendo conto del fatto che le serie a termini non negativi non sono indeterminate.

Criterio del confronto asintotico [1, (XII.34), pagina 434]. Due serie i cui termini (positivi) a_k e b_k sono tali che il rapporto a_k/b_k ammette limite finito $\ell > 0$ hanno lo stesso carattere.

Ciò segue dal criterio del confronto enunciato sopra. Infatti, per la definizione di limite, risulta $\frac{\ell}{2}\, b_k < a_k < 2\,\ell\, b_k$ definitivamente, e perciò le serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ell}{2}\, b_k, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2\,\ell\, b_k$$

hanno lo stesso carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Criterio del rapporto [1, (XII.36), pag. 435]. Consideriamo una serie i cui addendi a_k siano tutti positivi. Condizione sufficiente affinché la serie converga è che il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \tag{28}$$

esista e sia minore di 1. Condizione sufficiente affinché la serie diverga a $+\infty$ è che il limite (28) esista e sia maggiore di 1 (anche $+\infty$).

Criterio della radice [1, pag. 439]. Consideriamo una serie i cui addendi a_k siano tutti non negativi. Condizione sufficiente affinché la serie converga è che il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} \tag{29}$$

esista e sia minore di 1. Condizione sufficiente affinché la serie diverga a $+\infty$ è che il limite (29) esista e sia maggiore di 1 (anche $+\infty$).

Come dimostrare i criteri del rapporto e della radice. Osserviamo innanztutto che, se la serie considerata è una serie geometrica, e cioè se $a_k = a_0\, q^k$, allora i limiti (28) e (29) valgono entrambi q. Se, invece, la serie considerata non è geometrica, la si confronta con la serie geometrica la cui ragione q è il limite (28) o (29). Se, infine, il limite (28) o (29) è maggiore di 1, la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta, e la conclusione segue immediatamente.

Controesempio. Data una serie i cui termini indicheremo con a_k, e stabilito che il limite (28) o (29) vale 1, è troppo presto per trarre conclusioni sul carattere della serie.

Infatti se consideriamo $a_k = 1/k$ otteniamo la serie armonica, che è divergente, ed i limiti (28) e (29) valgono proprio 1. D'altro canto, se poniamo $a_k = 1/(k\,(k+1))$, otteniamo la serie [1, (XII.6), pag. 444]

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} \tag{30}$$

la cui somma ridotta è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

e perciò, per la definizione di convergenza, la serie (30) converge. Ebbene, anche in questo caso i limiti (28) e (29) valgono 1.

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Serie esponenziale

Serie esponenz.

Una delle serie (di funzioni) più importanti è la serie di Maclaurin della funzione esponenziale e^x, e cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{31}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, essa è una serie numerica il cui termine generale a_k è dato da

$$a_k = \frac{x^k}{k!}.$$

Nel caso particolare in cui $x = 0$, tutti i termini sono nulli tranne $a_0 = 1$, quindi la serie converge (anche assolutamente) e la sua somma vale 1. In questo caso si intende che $0^0 = 1$ per il motivo spiegato a pag. 37.

Nel caso $x \neq 0$ osserviamo che il rapporto fra due termini consecutivi, presi in valore assoluto, è

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1}.$$

Poiché il limite (28) in questo caso è nullo, la serie (31) converge assolutamente qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange, si può poi dimostrare [1, Esempio (XII.20), pag. 427] che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Limiti notevoli

Avendo appena dimostrato che la serie (31) converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ricordando che la condizione (23) è necessaria per la convergenza, concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$$

qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Per la definizione di limite nullo si ha, quindi, che $x^k < \varepsilon\, k!$ definitivamente, qualunque sia $\varepsilon > 0$.

In particolare, per ogni $x > 0$ possiamo scrivere $\sqrt[k]{k!} > x/\sqrt[k]{\varepsilon}$ definitivamente. Ma siccome $\sqrt[k]{\varepsilon} \to 1$ (pag. 15), ed essendo $x > 0$ arbitrario, per la definizione di limite infinito possiamo scrivere

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty \tag{32}$$

Lo stesso ragionamento si può applicare alla serie a termini positivi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k^k}, \tag{33}$$

il cui termine generale è $a_k = k!/k^k$. Il rapporto fra due termini consecutivi è

$$\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\,\frac{k^k}{k!} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{1}{e} < 1,$$

quindi la serie (33) converge. Ricordando che la condizione (23) è necessaria per la convergenza, concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k} = 0.$$

Come ultima applicazione, consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{x^k}, \tag{34}$$

dove x è un parametro maggiore di 1. Si tratta di una serie il cui termine generale a_k è positivo ed è dato da

$$a_k = \frac{k}{x^k}.$$

Perciò il rapporto fra due termini consecutivi soddisfa

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{k+1}{x^{k+1}}\,\frac{x^k}{k}\\ &= \frac{1}{x}\,\frac{k+1}{k} \to \frac{1}{x} < 1,\end{aligned}$$

e la serie (34) converge per il criterio del rapporto. Ricordando che la condizione (23) è necessaria per la convergenza, concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{x^k} = 0 \text{ se } x > 1.$$

Per la definizione di limite nullo si ha, in particolare, che $k/x^k < 1$ definitivamente, e cioè che $\sqrt[k]{k} < x$ definitivamente. Poiché $x > 1$ è arbitrario, e poiché per la definizione della radice k-esima si ha $\sqrt[k]{k} > 1$ per ogni $k > 1$, dalla definizione di limite finito segue che

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1. \tag{35}$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
La forma indeterm. 0^0

Forma indet. 0^0

Nella teoria dei limiti delle successioni, come pure nella teoria dei limiti delle funzioni di una variabile reale (vedere a pag. 37), si suole dire che

$$0^0 \text{ è una forma indeterminata.}$$

Tale espressione non si riferisce, come si potrebbe erroneamente pensare, all'operazione di elevamento a potenza del numero zero, ma abbrevia un'affermazione ben precisa: esistono tre successioni (a_k), (b_k) e (c_k), tutte e tre infinitesime (cioè tendono a zero), tali che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{b_k} \neq \lim_{k\to+\infty} c_k^{b_k}.$$

Pertanto il limite di una successione *della forma* $x_k^{y_k}$, dove $x_k, y_k \to 0$, *non è determinato* dal solo fatto che $x_k, y_k \to 0$ ma dipende da quali sono le particolari successioni (x_k) e (y_k) considerate.

Per dimostrare tale affermazione basta prendere, ad esempio, $a_k, b_k = 1/k$ e $c_k = c^k$ con un parametro $c \in (0,1)$, cosicché $c_k \to 0$ per la (8). Per il limite notevole (35), si ha

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1.$$

Invece la successione $c_k^{b_k}$ assume identicamente il valore c e perciò tende a $c \in (0,1)$. La tesi segue. In alternativa, si può anche prendere $c_k = 1/k!$ ed usare il limite (32), o semplicemente $c_k = 0$ per ogni k (e a_k e b_k come sopra).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Serie a t. di segno alt.

Segno alterno

Definizione. Se i termini a_k sono tutti non negativi, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, a_k \tag{36}$$

si dice serie a termini di segno alterno.

Criterio di Leibniz [1, (XII.38), pag. 437]. Condizione sufficiente affinché la serie (36) sia convergente è che i termini a_k costituiscano una successione monotona che tende a 0. Lo si dimostra usando la completezza dell'insieme dei numeri reali.

Esempio. Applicando il criterio di Leibniz, si trova che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

è convergente. La stessa serie non è convergente assolutamente perché la serie armonica non converge. Applicando la formula di Taylor con il resto di Lagrange alla funzione logaritmica, si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2.$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Funz. ζ di Riemann

Zeta di Riemann

La funzione

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

si può definire anche per valori complessi della x. Essa viene detta funzione ζ (zeta) di Riemann, ed è legata ad una famosa congettura. In questa sede ci limitiamo a discutere il caso $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo, innanzitutto, che per $x \le 1$ la serie diverge a $+\infty$ perché in tal caso si ha $1/k^x \ge 1/k$, e la serie armonica è divergente. Se, invece, $x > 1$, si può dimostrare che la serie converge, procedendo come segue. Visto che

$$\frac{1}{k^x} \le \frac{1}{t^x}$$

per ogni $t \in (k-1,\, k)$, integrando ambo i membri in dt su tale intervallo si trova

$$\frac{1}{k^x} \le \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x}$$

da cui, sommando su k per $k \ge 2$, si ricava

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \le \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

L'integrale al secondo membro si calcola immediatamente, e vale

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left. \frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1},$$

dunque la serie data, detta *serie armonica generalizzata*, è convergente per ogni $x > 1$, come volevasi dimostrare.

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Esercizi serie num. 1

Esercizi

1) Indichiamo con n un generico intero positivo, e consideriamo una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, derivabile $n-1$ volte nell'intervallo (a,b) e dotata anche della derivata n-esima in un punto $x_0 \in (a,b)$. Indichiamo con $P_n(x,x_0)$ il polinomio di Taylor di ordine n associato ad f, ed avente x_0 come punto base dello sviluppo. Dimostrare che per $x \to 0$ si ha:

$$f(x) = P_n(x,x_0) + o((x-x_0)^n)$$

(formula di Taylor con il resto di Peano). Suggerimento: usare la regola di de l'Hôpital per studiare il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}.$$

2) Calcolare $\sum\limits_{k=0}^{9} 2^k$.

3) Trovare due numeri reali a, b tali che per ogni $x \neq 1$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{a + b\,x^{n+1}}{1-x}.$$

4) Dare la definizione di *somma di una serie*, procedendo come segue: a) basarsi sulla memoria; b) consultare le dispense, un libro o gli appunti di lezione; c) chiedere al tutor o al docente.

5) Stabilire se la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}$ è convergente, ed in caso affermativo calcolarne la somma.

6) Trovare le prime quattro cifre significative del numero $x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} 10^{-k}$.

7) Dimostrare che *condizione necessaria per la convergenza di una serie* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *è che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Suggerimento: osservare che $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

8) Dimostrare che la condizione dell'esercizio precedente non è sufficiente a garantire la convergenza della serie. Suggerimento: pensare alla serie armonica.

9) Diciamo che una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è *indeterminata* se il limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ non esiste. Costruire un esempio di serie indeterminata.

10) Una serie i cui addendi sono positivi si dice *serie a termini positivi*. Usando la completezza dell'insieme dei numeri reali, dimostrare che *le serie a termini positivi non sono indeterminate.*

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi serie num. 2

Esercizi

1) Calcolare i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x}\,dx; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{x^2}\,dx; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{3}{2^x}\,dx.$$

2) Indicato con I_k l'intervallo $I_k = [k,\, k+1]$, trovare tutti gli interi positivi k tali che

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \text{ per ogni } x \in I_n.$$

3) Trovare tutti gli interi positivi k tali che

$$\log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k}.$$

4) Trovare tutti gli interi positivi n tali che

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\log(k+1) - \log k \Big) = \log(n+1).$$

5) Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi serie num. 3

Esercizi

1) Trovare tutti i numeri reali x tali che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k}$ è convergente.

2) Trovare tutti i numeri reali x tali che la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ è convergente.

3) Trovare tutti i numeri reali x tali che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

è convergente.

4) Trovare tutti i numeri naturali n tali che

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k \Big) = \operatorname{arctg}(n+1).$$

5) Stabilire se la seguente serie è convergente, ed in caso affermativo calcolarne la somma.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k \Big)$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Il concetto di limite

L'idea di limite

Mini-test. Prima di procedere con lo studio dei limiti, verificate la vostra preparazione rispondendo a questa domanda. Indichiamo con x e t due variabili reali, e con $[t]$ il più grande intero non superiore a t. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{1/\log x},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{-1}{x}\right], \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1-3\,x^3+4\,x^5-x^7}{5+2\,x^7}.$$

Che cosa i limiti non sono. I limiti non sono, di norma, delle sostituzioni. La *sostituzione*, o valutazione di una funzione in un punto, consiste in quanto segue: data una funzione $f(x)$, ed un punto x_0 nel dominio di f, il sostituire x_0 al posto di x ed ottenere $f(x_0)$ si chiama *valutazione* di f in x_0. La valutazione differisce, in generale, dal limite di $f(x)$ per $x \to x_0$. Ma allora, il limite che cos'è?

L'idea intuitiva di limite. Il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ è, se esiste, un numero reale ℓ al quale il valore di $f(x)$ si avvicina (o diventa uguale) quando x si avvicina (ma senza diventare uguale) a x_0. Inoltre, il limite è $+\infty$ quando il valore di f *tende a diventare grandissimo*, ed è $-\infty$ quando il *valore assoluto* di $f(x)$ tende a diventare grandissimo, e $f(x)$ è negativo.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Limite di una funzione

Definiz. di limite

In pratica, l'idea intuitiva di limite, e le proprietà dei limiti di cui parleremo più avanti, sono sufficienti per molte applicazioni. Per applicazioni più sofisticate, e anche per soddisfare l'esigenza di rigore della teoria, si utilizza la *definizione* di limite. Essa si può dare in diversi modi, alcuni dei quali equivalenti fra loro, altri più o meno generali. A titolo indicativo, se ne riporta una qui di seguito. Questa definizione si articola in numerosi casi.

Limite per x che tende ad un numero reale, da destra. Consideriamo una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, ed un numero reale ℓ. Indichiamo con x una variabile reale *appartenente all'intervallo* (a,b). Se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x < a+\delta$ risulta $|f(x)-\ell| < \varepsilon$, si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende ad a da destra, e si scrive

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x < a+\delta$ risulta $f(x) > M$, si dice che $f(x)$ tende a più infinito per x che tende ad a da destra, e si scrive

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x < a+\delta$ risulta $f(x) < M$, si dice che $f(x)$ tende a meno infinito per x che tende ad a da destra, e si scrive

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Limite per x che tende ad un numero reale, da sinistra. Se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x > b-\delta$ risulta $|f(x)-\ell| < \varepsilon$, si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a b da sinistra, e si scrive

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x > b-\delta$ risulta $f(x) > M$, si dice che $f(x)$ tende a più infinito per x che tende a b da sinistra, e si scrive

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x > b-\delta$ risulta $f(x) < M$, si dice che $f(x)$ tende a meno infinito per x che tende a b da sinistra, e si scrive

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty.$$

Limite per x che tende ad un numero reale. Se la funzione f è definita sull'insieme $(a,b)\cup(b,c)$, e se, in base alle definizioni precedenti, esistono (finiti o infiniti) i limiti $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)$ e sono uguali fra loro, allora, indicato con L il loro comune valore, si dice che $f(x)$ tende a L per x che tende a b, e si scrive

$$\lim_{x\to b} f(x) = L.$$

Limite per x che tende a $+\infty$. Consideriamo ora una funzione f definita sull'intervallo $(a, +\infty)$, e indichiamo con x una variabile reale. Se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $x_0 > a$ tale che per ogni $x \in (x_0, +\infty)$ risulta $|f(x)-\ell| < \varepsilon$, si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a più infinito, e si scrive

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $x_0 > a$ tale che per ogni $x \in (x_0, +\infty)$ risulta $f(x) > M$, si dice che $f(x)$ tende a più infinito per x che tende a più infinito, e si scrive

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $x_0 > a$ tale che per ogni $x \in (x_0, +\infty)$ risulta $f(x) < M$, si dice che $f(x)$ tende a meno infinito per x che tende a più infinito, e si scrive

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Limite per x che tende a $-\infty$. Consideriamo una funzione f definita sull'intervallo $(-\infty, b)$, e indichiamo ancora con x una variabile reale. Se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $x_0 < b$ tale che per ogni $x \in (-\infty, x_0)$ risulta $|f(x)-\ell| < \varepsilon$, si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a meno infinito, e si scrive

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $x_0 < b$ tale che per ogni $x \in (-\infty, x_0)$ risulta $f(x) > M$, si dice che $f(x)$ tende a più infinito per x che tende a meno infinito, e si scrive

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $x_0 < b$ tale che per ogni $x \in (-\infty, x_0)$ risulta $f(x) < M$, si dice che $f(x)$ tende a meno infinito per x che tende a meno infinito, e si scrive

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

La continuità

La continuità è una notevole proprietà di alcune funzioni, tra le quali quelle di uso più comune, che consiste in quanto segue.

Definizione (continuità) Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, e considerato un punto $x_0 \in (a,b)$, la funzione f si dice *continua* in x_0 *se esiste* il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, e se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

In parole povere, f è continua in x_0 se il passaggio al limite per $x \to x_0$ dà lo stesso risultato della sostituzione $x = x_0$. La continuità delle funzioni di uso più comune è *responsabile*, per così dire, della confusione tra limite e sostituzione. Un esempio di funzione *discontinua in un punto* si trova a pagina 46.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Il calcolo dei limiti

Calcolo di limiti

Lo studio di un limite può essere impossibile da portare a termine, anche a tutti i matematici del mondo. Per motivi didattici, nel corso di Analisi I si incontrano perlopiù limiti che possono essere calcolati combinando fra loro alcune tecniche, che a loro volta si possono riassumere come segue.

1. Innanzitutto, usando la definizione di limite, si stabiliscono dei limiti particolari, o *limiti notevoli*. Ad esempio, con considerazioni geometriche basate sulla definizione di $\operatorname{sen} x$, si trova che $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si conclude che $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

2. Si utilizzano le cosiddette *proprietà dei limiti*, dette anche *teoremi sui limiti*. Solitamente, si tratta di proprietà accettabili sul piano intuitivo, e trattate come tali in queste dispense. Una rassegna ampia e rigorosa delle principali proprietà si può trovare sui testi di Analisi esistenti.

A titolo di esempio, verifichiamo che *il prodotto di una funzione limitata f per una g che tende a zero, tende a zero.* Si tratta di una proprietà un pò meno evidente di altre, ma molto utile in pratica. Per dimostrarla, osserviamo che essendo f limitata, risulta $|f(x)| < C$ per ogni x e per un'opportuna costante $C > 0$. Preso arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x < a + \delta$ (se parliamo di limite per $x \to a^+$), ovvero per ogni $x > b - \delta$ (se parliamo di limite per $x \to b^-$), oppure per ogni $x > x_0$ (se parliamo di limite per $x \to +\infty$), o infine per ogni $x < x_0$ (se parliamo di limite per $x \to -\infty$), si ha $|g(x)| < \varepsilon$. Ma allora $|f(x)\, g(x)| < C\,\varepsilon$. Siccome ε è arbitrario, scrivere ε o $C\,\varepsilon$ nella definizione di limite è lo stesso, dunque tale definizione è soddisfatta e la proprietà è dimostrata.

3. Il terzo ingrediente per il calcolo dei limiti è un insieme di artifici, di espedienti atti a calcolare limiti di particolari funzioni. A titolo di esempio, consideriamo il limite del rapporto tra due polinomi, per $x \to +\infty$. Supponiamo che i due polinomi abbiano lo stesso grado $n > 0$. Dividendo numeratore e denominatore per x^n si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\, x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, x^{k-n}}{b_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k\, x^{k-n}}.$$

Quello appena descritto è un *artificio* adatto al nostro particolare problema. A questo punto, poiché per ogni $k = 0, \ldots, n-1$, risulta $\lim_{x\to+\infty} x^{k-n} = 0$ (limite notevole, ingrediente del tipo 1), ed usando le proprietà dei limiti (ingredienti del tipo 2), si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\, x^k} = \frac{a_n}{b_n}.$$

In modo analogo si può affrontare il caso in cui il grado del numeratore è diverso da quello del denominatore.

L'aritmetica degli infiniti. Espressioni come $\frac{1}{+\infty} = 0$ e $+\infty + \infty = +\infty$ rappresentano in modo sintetico alcune proprietà dei limiti. Servono, cioè, per richiamare efficacemente tali proprietà.

Ad esempio, la prima espressione sta a significare che *data una funzione* f *che tende a* $+\infty$*, la funzione* $1/f$ *tende a zero.* Per completezza, dimostriamo che questo è vero usando la definizione di limite. Consideriamo un numero reale positivo ε arbitrario. Definiamo il numero M ponendo $M = 1/\varepsilon$. Per la definizione di limite, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x < a + \delta$ (se parliamo di limite per $x \to a^+$), ovvero per ogni $x > b - \delta$ (se parliamo di limite per $x \to b^-$), oppure per ogni $x > x_0$ (se parliamo di limite per $x \to +\infty$), o infine per ogni $x < x_0$ (se parliamo di limite per $x \to -\infty$), si ha $f(x) > M$. Dunque, per ragioni algebriche, si ha anche $|1/f(x)| < 1/M = \varepsilon$. Usando ancora la definizione di limite, concludiamo che $1/f(x) \to 0$.

Le forme indeterminate. Si è soliti dire che $+\infty - \infty$ è una *forma indeterminata*, come pure $0/0$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $0 \cdot (+\infty)$, $1^{+\infty}$, 0^0. Spieghiamo cosa si intende con questo genere di affermazioni, facendo riferimento alla forma indeterminata 0^0.

L'affermazione secondo la quale 0^0 è una forma indeterminata significa che esistono quattro funzioni, che indicheremo con f_1, f_2, g_1, g_2, di cui f_1 e f_2 positive, che tendono tutte e quattro a zero e sono tali che il limite di $f_1^{g_1}$ è diverso dal limite di $f_2^{g_2}$.

Quali sono le funzioni la cui esistenza è stata appena asserita? Esse si possono scegliere in diversi modi, uno dei quali è il seguente: prendiamo per dominio l'intervallo $(0,1)$, e per ogni $x \in (0,1)$ poniamo

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2,$$
$$g_1(x) = g_2(x) = \frac{1}{\log x}.$$

Per le proprietà dei logaritmi, per ogni $x \in (0,1)$ risulta $(f_1(x))^{g_1(x)} = e$, e similmente $(f_2(x))^{g_2(x)} = e^2$. Ma allora dalla definizione di limite discende immediatamente che $f_1^{g_1} \to e$, e $f_2^{g_2} \to e^2$ per $x \to 0^+$, dunque i due limiti sono diversi, come volevasi dimostrare.

In parole povere, dire che 0^0 è una forma indeterminata significa dire che il solo fatto che due funzioni f e g tendano a zero (con f positiva) non è sufficiente a determinare il limite di f^g. Infatti, come abbiamo appena visto, tale limite dipende da quale particolare f e quale particolare g si considera.

L'uguaglianza $\mathbf{0^0 = 1}$. Talvolta si utilizza l'uguaglianza $0^0 = 1$. Ad esempio, un generico polinomio è stato rappresentato a pagina 36 nella forma $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$. Il termine noto del polinomio è quello che corrisponde a $k = 0$, e cioè $a_0\, x^0$. Questa rappresentazione risulta corretta, anche per $x = 0$, se si conviene che $0^0 = 1$. Quest'uguaglianza non contraddice quanto abbiamo appena visto sulle forme indeterminate perché, quando scriviamo $0^0 = 1$, stiamo denotando con 0 il numero 0, come di consueto, e stiamo dando significato all'elevamento a potenza 0^0. Invece, quando diciamo che 0^0 è una forma indeterminata, stiamo usando le due cifre 0 non per rappresentare lo zero, ma per abbreviare la frase il cui significato è stato spiegato nel paragrafo precedente.

Conclusione. A questo punto possiamo ritornare ai paragrafi precedenti ed apprezzare meglio la forza dei teoremi sui limiti: quando, ad esempio, diciamo che $\frac{1}{+\infty} = 0$, intendiamo che il solo fatto che f tenda a $+\infty$ basta a concludere che $1/f \to 0$, indipendentemente da quale sia la particolare f che stiamo considerando.

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Esercizi assortiti

Esercizi

1) Scrivere il valore dei seguenti limiti: $\lim_{x\to 3^+}(2x-6) =$

$\lim_{t\to 0^-} \operatorname{sen} t =$; $\lim_{t\to +\infty} \frac{2}{t} =$; $\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} =$

$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos t \, \operatorname{tg} t}{\operatorname{sen} t} =$; $\lim_{x\to +\infty} e^x =$;

$\lim_{x\to -\infty} e^x =$

2) Scrivere l'insieme di tutti i numeri reali t tali che $\operatorname{sen} t < t$:

3) Scrivere l'insieme di tutti i numeri reali t tali che $\operatorname{sen} t > t$:

4) Scrivere l'insieme di tutti i numeri reali t tali che $|\operatorname{sen} t| < |t|$:

5) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

6) Indicato con x_0 un numero reale positivo e minore di 1, segnare sul grafico della funzione f dell'esercizio precedente il punto Q di ascissa x_0.

7) Trovare l'equazione della retta r passante per il punto Q dell'esercizio precedente e per il punto $P = (0, 1)$.

8) Indicato con $m(x_0)$ il coefficiente angolare della retta r dell'esercizio precedente, scrivere il valore del seguente limite: $\lim_{x_0\to 0^+} m(x_0) =$

Tangenza

L'affermazione secondo la quale due linee sono tangenti quando hanno un solo punto in comune non è vera, in generale. Per rendersene conto basta considerare qualche semplice esempio.

Esempio 7. Linee non tangenti. Gli assi cartesiani hanno in comune solo un punto, ma non sono tangenti.

Esempio 8. Una tangente alla sinusoide. Consideriamo il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$, e la retta di equazione $y = 1$. In questo esempio le due linee hanno in comune infiniti punti, anziché uno solo, però sono tangenti!

Il criterio dell'unicità del punto di intersezione, per stabilire la condizione di tangenza, è valido in casi particolari, come quando si considerano una retta ed una circonferenza. In questo caso è utilizzabile anche un altro criterio: si ha tangenza tra una retta ed una circonferenza (complanari) quando esse hanno almeno un punto in comune, e la circonferenza giace in uno dei due semipiani in cui il piano risulta diviso dalla retta. Anche questo criterio non è applicabile a tutte le curve, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 9. Una tangente alla cubica. Il grafico della funzione $y = x^3$ è tangente nell'origine all'asse x, pur non giacendo interamente in nessuno dei due semipiani in cui l'asse x divide il piano cartesiano.

Esempio 10. Linee non tangenti. Il grafico di $y = |x|$ e l'asse delle x soddisfano il criterio suddetto, ma non sono tangenti fra loro.

Cerchiamo di precisare meglio, dunque, il concetto di tangenza. Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il cui grafico passi per l'origine, se vogliamo stabilire se esso è tangente all'asse x in tale punto, dobbiamo accertarci che il rapporto $f(x)/x$ tenda a zero per $x \to 0$.

Intuitivamente questo significa che, vicino al punto di tangenza, lo scarto tra il grafico di f e l'asse delle x (scarto che è rappresentato dalla quantità $f(x)$) è molto più piccolo dello scarto tra x e l'ascissa del punto di tangenza (scarto che è uguale a x perché, in questo caso particolare, l'ascissa del punto di tangenza è 0).

Più in generale, fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, indichiamo con $(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)$ l'insieme $\{\, x \in \mathbb{R} : x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon \,\}$, e cioè l'intervallo di estremi $x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon$. Il simbolo ε è la lettera epsilon dell'alfabeto greco, tradizionalmente usata in questo tipo di considerazioni. Consideriamo, inoltre, una funzione $f\colon (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ed una retta r passante per il punto del grafico di f di ascissa x_0. Dovendo passare per tale punto, la retta r ha equazione

$$y(x) = m\,(x - x_0) + f(x_0). \tag{37}$$

Il **criterio di tangenza** è il seguente: il grafico di f è tangente alla retta r nel punto di ascissa x_0 se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - y(x)}{x - x_0} = 0. \tag{38}$$

La derivata

Il criterio di tangenza espresso dalla (38) richiede, per poter essere applicato, la conoscenza dell'equazione della retta tangente. Ma come procedere per determinare il parametro m che figura in tale equazione?

Consideriamo, come in precedenza, una funzione $f\colon (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ed una retta r di equazione (37). Utilizzando tale equazione si verifica la seguente uguaglianza:

$$\frac{f(x) - y(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m.$$

Ne segue che *condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f ammetta, nel punto di ascissa x_0, una retta tangente di equazione (37), è che esista e sia finito il seguente limite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{39}$$

La frazione che figura nella formula (39) si chiama *rapporto incrementale*.

Definizione della derivata. Se il limite (39) esiste finito, si dice che la funzione f è *derivabile* nel punto di ascissa x_0. Il valore del limite (39) si chiama *derivata* di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$ o con

$$\frac{df}{dx}(x_0).$$

Interpretazione geometrica della derivata. L'equazione della *retta tangente* al grafico di f nel punto di ascissa x_0 è data dalla (37), ove si ponga $m = f'(x_0)$.

Il calcolo differenziale. La determinazione delle derivate di alcune funzioni di uso comune si esegue considerando il loro rapporto incrementale e studiandone il limite mediante appositi artifici (vedi i due esempi seguenti, gli elenchi di esercizi n. 2 e 3, ed i testi di Analisi esistenti). La derivata di molte altre funzioni, definite a partire dalle precedenti, si può determinare utilizzando apposite *regole di derivazione*, che riducono il problema della derivazione all'applicazione di un algoritmo: *il calcolo differenziale*.

Esempio 11. Derivata della funzione $f(x) = mx$. La derivata della funzione $f(x) = mx$, dove m è un parametro reale, si trova direttamente ed è $f'(x) = m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ed ogni $x \neq x_0$ si ha:

$$\frac{mx - mx_0}{x - x_0} = m,$$

e passando al limite per $x \to x_0$ si trova $(mx)' = m$, come volevasi dimostrare.

Esempio 12. Derivata della funzione $f(x) = 1/x$. La funzione $f(x) = 1/x$ è derivabile per ogni $x \neq 0$, e si ha: $(1/x)' = -1/x^2$. Basta infatti considerare un punto arbitrario $x_0 \neq 0$, ed un $x \neq x_0$, con $x \neq 0$, ed osservare che

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x\,x_0} \to -\frac{1}{x_0^2}.$$

La conclusione segue dalla definizione della derivata.

Regola di derivazione del prodotto. Tornando alle *regole di derivazione*, una regola importante è la *regola di derivazione del prodotto:* se le funzioni f e g sono derivabili in un intervallo (a,b), allora anche il prodotto $f(x)\,g(x)$ è derivabile in (a,b) e si ha:

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

Una possibile dimostrazione di questa regola si ricava considerando il rapporto incrementale della funzione prodotto $f(x)\,g(x)$ in un punto arbitrario $x_0 \in (a,b)$, rapporto che è il seguente:

$$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}. \tag{40}$$

Esso può anche essere riscritto in questo modo:

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x_0) + f(x)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Il limite della precedente espressione per $x \to x_0$ si trova ricordando che f e g sono derivabili per ipotesi, e sapendo che la derivabilità implica la continuità, e perciò $f(x) \to f(x_0)$. In definitiva, tale limite vale

$$f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0), \tag{41}$$

come volevasi dimostrare. Un'altra possibile dimostrazione si basa sul fatto che, se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0, allora vale la seguente uguaglianza:

$$f(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0) + o(x - x_0), \tag{42}$$

dove con $o(x - x_0)$ si indica la funzione

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0), \tag{43}$$

e la notazione $o(x - x_0)$, che si legge "o piccolo di $x - x_0$", esprime il fatto che che il rapporto tra la (43) e $x - x_0$ tende a zero quando x tende a x_0. Si dice, brevemente, che la funzione (43) è *infinitesima di ordine superiore* rispetto a $x - x_0$. Essendo, per ipotesi, derivabile anche g, abbiamo

$$g(x) = g'(x_0)\,(x - x_0) + g(x_0) + o(x - x_0), \tag{44}$$

dove questa volta il termine $o(x - x_0)$ indica la funzione $g(x) - g(x_0) - g'(x_0)\,(x - x_0)$.

Il simbolo *o*. Il fatto che lo stesso simbolo o denoti due funzioni diverse è un'eccezione alla regola secondo la quale non si possono indicare con lo stesso simbolo due quantità diverse. Anzi, una qualunque funzione $h(x)$ tale che $\lim_{x\to x_0} h(x)/(x - x_0) = 0$ può legittimamente indicarsi come $o(x - x_0)$. Tale eccezione rende particolarmente comodo l'uso del simbolo o, come si vede nel seguito della dimostrazione.

Per proseguire con la dimostrazione della regola di derivazione del prodotto, moltiplichiamo termine a termine la (42) e la (44). Troviamo:

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) \;&=\; (f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0) + o(x - x_0)) \\ &\;\; (g'(x_0)\,(x - x_0) + g(x_0) + o(x - x_0)). \end{aligned}$$

Dobbiamo ora svolgere il prodotto fra le due espressioni al secondo membro, che hanno tre termini ciascuna: si ottiene una somma algebrica di ben nove termini. L'uso del simbolo $o(x - x_0)$, che può denotare funzioni diverse, purché infinitesime di ordine superiore rispetto a $x - x_0$, semplifica notevolmente l'espressione finale: possiamo infatti scrivere

$$\begin{aligned} &= \Big(f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\Big)\,(x - x_0) + f(x_0)\,g(x_0) \\ &\qquad + o(x - x_0). \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione precedente al posto di $f(x)\,g(x)$ nella (40), e facendo tendere x a x_0, si riottiene la (41), ed anche questa seconda dimostrazione è conclusa.

Regola di derivazione della funzione composta. Una altra importante regola di derivazione è la *regola di derivazione della funzione composta:* se la funzione $g\colon (a,b) \to (c,d)$ è derivabile nell'intervallo (a,b), e se la funzione $f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ è derivabile nell'intervallo (c,d), allora la funzione composta $h(x) = f(g(x))$ è derivabile per ogni $x \in (a,b)$ e la sua derivata è la seguente:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x) \tag{45}$$

Con la notazione di Leibniz, posto $y = g(x)$, la (45) assume la seguente forma, particolarmente espressiva:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

Esempio 13. Derivata della funzione $\boldsymbol{h(x) = e^{2x}}$. Come semplice applicazione, cerchiamo la derivata della funzione $h(x) = e^{2x}$. Ponendo $y(x) = g(x) = 2x$ e $f(y) = e^y$, possiamo scrivere $e^{2x} = f(g(x))$. Sapendo che

$$\frac{df}{dy} = e^y; \qquad \frac{dy}{dx} = 2,$$

si trova $(e^{2x})' = 2\,e^{2x}$.

Regola di derivazione del reciproco. Un'altra regola di derivazione di uso frequente è la *regola di derivazione del reciproco* di una funzione, che possiamo semplicemente ricavare dalle considerazioni precedenti, con il seguente ragionamento. Consideriamo una funzione $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ che sia derivabile in tutto l'intervallo (a,b) e *diversa da zero*. Allora, posto $f(y) = 1/y$, possiamo scrivere: $1/g(x) = f(g(x))$. Sapendo che $f'(y) = -1/y^2$ (esempio 12), ed usando la regola di derivazione delle funzioni composte (45), si trova:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (f(g(x)))' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Regola di derivazione del rapporto. Infine, vogliamo studiare la *derivata del rapporto* $f(x)/g(x)$, supponendo che f e g siano derivabili in un certo intervallo (a,b), con g diversa da zero. Si ha:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{g(x)}$$

Dunque, usando la regola di derivazione del prodotto e quella del reciproco, troviamo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\,\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x)\,\frac{1}{g(x)} - f(x)\,\frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Eserc. retta tangente

Esercizi

1) Verificare che la retta r, di equazione $y(x) = 1$, è tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$. A tal fine, studiare il rapporto $(f(x) - y(x))/(x - x_0)$ per x che tende a x_0.

2) Determinare la retta tangente al grafico della funzione f, data nell'esercizio precedente, nel punto di ascissa $x_0 = 1/\sqrt{2}$.

3) Dire se esiste la retta tangente al grafico della funzione $y = |x|$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$, ed in caso affermativo determinarne l'equazione.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. sulle derivate 1

Esercizi

1) Trovare due funzioni g e h, ambedue infinitesime per $x \to 0$, tali che

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = +\infty.$$

2) Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed in caso affermativo determinare la loro derivata.

$$f_0(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f_1(x) = \cos x, \qquad f_2(x) = x^2,$$
$$f_3(x) = x^3, \qquad f_4(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots,$$
$$f_5(x) = |x|.$$

3) Determinare l'equazione delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ rispettivamente nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$ e nel punto di ascissa $x_1 = 1$.

4) Che valore vi aspettate che abbia il seguente limite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Svolgimento. 1) Possiamo prendere $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = x\,|x|$, e sfruttare il fatto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

2) Dobbiamo studiare il rapporto incrementale

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}$$

per $x \to 0$. Posto $x' = x - x_0$, possiamo riscriverlo nella forma

$$\frac{\operatorname{sen}(x' + x_0) - \operatorname{sen} x_0}{x'}.$$

È noto (formula di addizione) che $\operatorname{sen}(x' + x_0) = \operatorname{sen} x' \cos x_0 + \cos x' \operatorname{sen} x_0$, e perciò si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}(x' + x_0) - \operatorname{sen} x_0}{x'} = \frac{\operatorname{sen} x'}{x'} \cos x_0 + \frac{\cos x' - 1}{x'} \operatorname{sen} x_0.$$

Sapendo che $(\operatorname{sen} x')/x' \to 1$ e $(\cos x' - 1)/x' \to 0$ per $x' \to 0$, si deduce che l'espressione precedente ammette limite finito per $x' \to 0$, e che tale limite vale $\cos x_0$. Dunque la funzione $f_0(x) = \operatorname{sen} x$ è derivabile per ogni x reale, e la sua derivata è $f_0'(x) = \cos x$.

Poiché $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$, anche questa funzione è derivabile per ogni x reale, e si ha $(\cos x)' = (\operatorname{sen}(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen} x$.

Per quanto riguarda la funzione $f_4(x)$, che comprende come casi particolari $f_2(x)$ e $f_3(x)$, dobbiamo esaminare il rapporto incrementale

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Se $n = 1$ allora il rapporto qui sopra vale 1 per ogni $x \neq x_0$, ed è indefinito per $x = x_0$ come tutti i rapporti incrementali. Esso tende perciò ad 1 quando $x \to x_0$. In conclusione, la funzione $y(x) = x$ è derivabile per ogni x reale, e la sua derivata è la funzione costante 1. Per studiare il caso $n \geq 2$, possiamo procedere come segue. Poiché il numeratore è un polinomio nella variabile x, che si annulla per $x = x_0$, esso è divisibile per $x - x_0$. Infatti, si ha $x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x_0\, x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2}\, x + x_0^{n-1})$. Pertanto, il rapporto suddetto è uguale a $x^{n-1} + x_0\, x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2}\, x + x_0^{n-1}$ per $x \neq x_0$. Esso ammette limite finito per $x \to x_0$, e tale limite vale $x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}$. Poiché gli addendi sono n, possiamo scrivere semplicemente $n\, x_0^{n-1}$. In conclusione, $f_4(x)$ è derivabile (rispetto alla x) per ogni x reale ed ogni $n = 1, 2, \ldots$ e la sua derivata è $(x^n)' = n\, x^{n-1}$.

Il rapporto incrementale di f_5 è:

$$\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}.$$

Per $x_0 = 0$ esso diventa $|x|/x$. Ma

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dunque $|x|$ non è derivabile per $x = 0$. Se, invece, $x_0 > 0$, allora

$$\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = 1 \text{ per } x \in (0, x_0) \cup (x_0, +\infty),$$

dunque il limite del rapporto incrementale esiste, è finito e vale 1. Pertanto $(|x|)' = 1$ per ogni $x > 0$. Ragionando analogamente, si trova che $(|x|)' = -1$ per ogni $x < 0$.

3) Per l'interpretazione geometrica della derivata, l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa x_0 si trova ponendo $m = f'(x_0)$ nella (37), ed è dunque

$$y(x) = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{\pi}{3}\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'equazione della retta tangente nel punto di ascissa x_1 si trova in modo analogo, ed è

$$y(x) = (\cos 1)\,(x - 1) + \operatorname{sen} 1,$$

il che richiama l'attenzione sulla necessità di un metodo di calcolo per le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ per valori arbitrari di x.

4) Scrivendo $x = x/2 + x/2$, ed usando una formula trigonometrica di addizione, si trova $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2(x/2)$. Perciò

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\right)^2.$$

Sapendo che $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$ per $t \to 0$, c'è da aspettarsi che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

In effetti, questo risultato si può dimostrare (rigorosamente) usando la definizione di limite e le proprietà del passaggio al limite.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Derivate di e^x e $\log x$

Esercizi

1) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log x$ (logaritmo naturale di x) nel punto di ascissa $x_0 = 1$, presupponendo la continuità di f in x_0.

2) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$, presupponendo la continuità di f in x_0.

3) Dire se la funzione $f(x) = e^x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed in caso affermativo determinarne la derivata.

4) Dire se la funzione $f(x) = \log x$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed in caso affermativo determinarne la derivata.

5) Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x$ è continua per $x = 0$, come presuppone l'esercizio 2. Suggerimento: a) cominciare con la successione $e^{1/n}$; b) fare appello alla completezza; c) posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} e^{1/n}$, dimostrare che $e^{1/n} > \ell$ per ogni n, e dedurne che $\ell = 1$.

Svolgimento. 1) Per l'interpretazione geometrica della derivata, è sufficiente trovare $f'(1)$. A tal fine, posto $x' = x - 1$, scriviamo il rapporto incrementale come segue:

$$\frac{\log x}{x-1} = \frac{\log(1+x')}{x'} = \log(1+x')^{1/x'}.$$

Adesso, ponendo $t = 1/x'$, siamo condotti a considerare l'espressione

$$\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t. \tag{46}$$

Osserviamo che, quando x tende ad 1, x' tende a 0 e $|t|$ tende a $+\infty$. Dunque l'argomento del logaritmo tende al numero di Nepero e. Sapendo che la funzione logaritmica è continua, l'espressione (46) tende a $\log e = 1$. Dunque $(\log x)' = 1$ per $x = 1$, e l'equazione della retta tangente è $y = x - 1$.

Esempio 14. Una funzione discontinua. La seguente funzione è discontinua nel punto di ascissa $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

2) Poiché la funzione esponenziale è inversa di quella logaritmica, si trova che l'equazione della tangente è $y(x) = x + 1$. In particolare, si dimostra che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{47}$$

Basta infatti sostituire $t = e^x$ e si trova

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{t-1}{\log t}.$$

Quando x tende a zero, t tende ad 1 per la continuità della funzione esponenziale. Dunque, il limite del primo membro, per $x \to 0$ può essere determinato facendo tendere t ad 1 nel secondo membro. Ma questo è stato già fatto nell'esercizio precedente, ove si è visto che tale limite vale 1. Da qui segue la (47).

3) Seguendo la definizione della derivata, consideriamo il rapporto incrementale della funzione $f(x) = e^x$ in un punto arbitrario x_0. Si ha:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\,\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}.$$

Con la sostituzione $x' = x - x_0$, siamo condotti a considerare la seguente espressione:

$$e^{x_0} \, \frac{e^{x'} - 1}{x'}.$$

Richiamando la (47), e poiché x' tende a 0 quando x tende a x_0, concludiamo che l'espressione suddetta ammette limite finito per $x \to x_0$, e che tale limite vale e^{x_0}. Dunque la funzione $f(x) = e^x$ è derivabile per ogni x reale, e si ha $(e^x)' = e^x$.

4) La funzione $f(x) = \log x$ non è definita per $x \leq 0$ (nel campo reale), dunque la risposta all'esercizio è semplicemente: "no, f non è derivabile in $\mathbb{R}$ perché non è nemmeno definita in tutto questo insieme". Al di là della risposta all'esercizio, è tuttavia importante conoscere la derivata di $\log x$ per $x > 0$. Per trovarla, possiamo procedere in vari modi. Vediamone due.

Procedimento A. Seguendo la definizione della derivata, consideriamo il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \log x$ in un punto $x_0 > 0$. Sfruttando le proprietà dei logaritmi, e con la sostituzione $x' = x - x_0$, troviamo:

$$\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \log \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x - x_0}} = \log \left(1 + \frac{x'}{x_0}\right)^{\frac{1}{x'}}.$$

Ora, ponendo $x'/x_0 = 1/t$, l'espressione precedente si può riscrivere come segue:

$$= \log \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{1}{x_0}}. \tag{48}$$

Quando x tende a x_0, la variabile $x' = x - x_0$ tende a 0, ed il valore assoluto $|t|$ tende a $+\infty$. Sapendo che la funzione elevamento a potenza $g(x) = x^{1/x_0}$ è continua, deduciamo che l'argomento del logaritmo tende a e^{1/x_0}. Sapendo che la funzione $\log x$ è continua, deduciamo che tutta l'espressione (48) tende a $\log(e^{1/x_0}) = 1/x_0$. Dunque $(\log x)' = 1/x$.

Procedimento B. Con la sostituzione $y = \log x$, e indicando con y_0 la quantità $y_0 = \log x_0$, si trova:

$$\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{e^y - e^{y_0}}.$$

Quando x tende a x_0, la variabile $y = \log x$ tende a y_0 per la continuità della funzione logaritmica. Il secondo membro tende, per quanto visto in precedenza, a e^{-y_0}. Dunque $(\log x)' = 1/x$.

5) Dobbiamo verificare che $\lim_{x \to 0} e^x = e^0$. Consideriamo, per incominciare, il caso $x > 0$. Poniamo $n = [1/x]$ (la *parte intera* di $1/x$). Per la monotonia della funzione esponenziale, e poiché $n \leq 1/x$, si ha $1 < e^x \leq e^{1/n}$ per $x \leq 1$. Resta da dimostrare che $e^{1/n} \to 1$ per $n \to +\infty$. Per la monotonia della funzione esponenziale, $e^{1/n}$ è una successione strettamente decrescente. Poiché $1 < e^{1/n} \leq e$ per ogni $n \geq 1$, la successione $e^{1/n}$ è limitata. Per la completezza di $\mathbb{R}$, esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n \to +\infty} e^{1/n} = \ell$. Poiché $1 < e^{1/n}$ per ogni n, si ha $\ell \geq 1$. Poiché $\ell < e^{1/n}$ per ogni n, si ha $\ell^n < e$ per ogni n. Dunque $\ell = 1$ e la funzione esponenziale è continua da destra. Per studiare il caso $x < 0$, poniamo $x = -y$ con $y > 0$. Per quanto appena visto, si trova che $e^x = 1/e^y \to 1$ quando x tende a 0^-, e l'esercizio è concluso.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Caduta di un grave

Esercizi

Studiamo la caduta di un punto materiale, libero di muoversi lungo l'asse verticale y, soggetto alla sola forza peso, posto inizialmente ad un'altezza $y_0 > 0$ dal suolo, e lasciato cadere all'istante $t_0 = 0$ con velocità iniziale nulla. Supponiamo costante l'accelerazione di gravità, e supponiamo inoltre che l'urto con il suolo (posto a quota $y = 0$) sia perfettamente elastico e di durata nulla.

1) Determinare l'istante t_1 in cui il grave tocca terra per la prima volta.

2) Determinare la legge oraria del moto $y = f(t)$ per $t \in (0, t_1)$.

3) Verificare che la funzione $f_1(t) = f(t - 2t_1)$ soddisfa l'equazione differenziale $f_1'' = -g$.

4) Verificare che la massima altezza raggiunta da un punto materiale che si muova lungo l'asse y con la legge oraria $y = f_1(t)$ è la stessa del punto il cui moto è descritto dalla legge $y(t) = f(t)$.

5) Disegnare il grafico della funzione

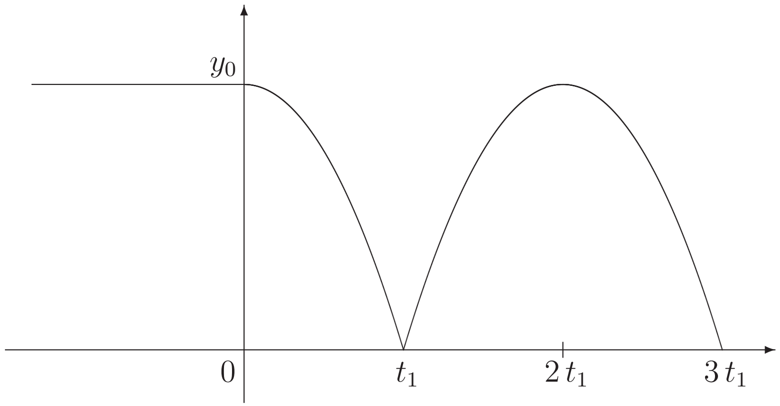
$$t \mapsto \begin{cases} y_0, & \text{se } t < 0; \\ f(t), & \text{se } 0 \le t < t_1; \\ f(2\,t_1 - t), & \text{se } t_1 \le t < 2\,t_1; \\ f_1(t), & \text{se } 2\,t_1 \le t < 3\,t_1. \end{cases}$$

Svolgimento. 1-2) Durante la caduta, la posizione $y(t)$ è data da $f(t) = y_0 - \frac{1}{2}\,g\,t^2$. L'urto col suolo avviene all'istante t_1 tale che $y_0 - \frac{1}{2}\,g\,t_1^2 = 0$, e cioè $t_1 = \sqrt{2\,y_0/g}$.

3) Si ha $f_1(t) = y_0 - \frac{1}{2}\,g\,(t - 2\,t_1)^2$, quindi $f_1'(t) = -g\,(t - 2\,t_1)$, e $f_1'' = -g$.

4) Osserviamo che $f(t)$ è data dalla differenza tra la costante y_0 e la quantità non negativa $\frac{1}{2}\,g\,t^2$, dunque il suo valore massimo è y_0 (e viene raggiunto per $t = 0$). Per lo stesso motivo, il massimo di $f_1(t)$ è ancora y_0 (e viene raggiunto per $t = 2\,t_1$).

5) Questo è il grafico richiesto:



Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Altre derivate

Esercizi

1) Dire se la funzione $f(x) = x^\alpha$, dove α è un parametro reale, è derivabile per ogni $x > 0$, ed in caso affermativo trovarne la derivata. Suggerimento: scrivere $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ed usare la regola di derivazione delle funzioni composte.

2) Trovare la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$.

3) *Regola di derivazione della funzione inversa.* Supponiamo che f e g siano due funzioni derivabili legate dalla relazione

$$f(g(x)) = x \text{ per ogni } x \in (a, b). \tag{49}$$

Esprimere g' usando f'. Suggerimento: derivare la (49) usando la regola di derivazione della funzione composta.

4) Supponendo che la funzione $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ sia derivabile per $x \in (-1, 1)$ (come in effetti è), trovarne la derivata usando il risultato dell'esercizio precedente.

5) Tracciare il grafico della seguente funzione:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x \in (-1, 1); \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases}$$

6) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, dire se la funzione h definita sopra è derivabile, ed in caso affermativo trovarne la derivata.

Svolgimento. 1) Posto $g(x) = \alpha \log x$ e $f(y) = e^y$, la funzione x^α si può scrivere come segue: $x^\alpha = f(g(x))$. Usando la regola di derivazione delle funzioni composte, si trova: $(x^\alpha)' = e^{\alpha \log x}\, \alpha\, \frac{1}{x} = x^\alpha\, \alpha\, \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$.

2) Dall'esercizio precedente, e siccome $\sqrt{x} = x^{1/2}$, si deduce che $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, per $x > 0$. Resta da studiare l'eventuale derivabilità nel punto $x_0 = 0$. Il rapporto incrementale in tale punto è:

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \text{ per } x \to 0^+,$$

dunque la funzione $\sqrt{x}$ non è derivabile per $x = 0$.

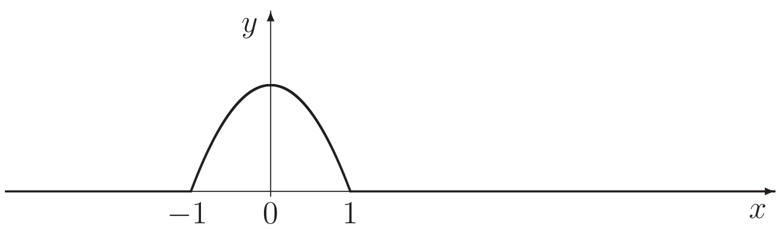
3) Derivando la (12) si trova: $f'(g(x))\, g'(x) = 1$, quindi

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

4) Posto $f(y) = \operatorname{sen} y$, si ha $f(g(x)) = x$ per $x \in (-1, 1)$. Usando la (13), si trova:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\cos g(x)} = \frac{1}{\cos \operatorname{arcsen} x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

5) Questo è il grafico della funzione h:



6) Per $x \in (-1, 1)$, risulta $h(x) = 1 - x^2$, dunque h è derivabile e si ha $h'(x) = -2x$. Inoltre, per $x \in (-\infty,$

$-1) \cup (1, +\infty)$ risulta $h(x) = 0$, dunque h è derivabile e si ha $h'(x) = 0$. Restano da studiare i punti $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Il rapporto incrementale di h in x_1 è:

$$\frac{h(x)}{x-1}$$

Per ogni $x > x_1$, tale rapporto è nullo perché $h(x)$ è nulla. Quindi, è nullo anche il limite del rapporto incrementale per $x \to x_1^+$. Invece, se $x \in (-1, 1)$, si ha:

$$\frac{h(x)}{x-1} = \frac{1-x^2}{x-1} = -(1+x) \underset{x \to x_1^-}{\longrightarrow} -2.$$

Poiché il limite destro e quello sinistro del rapporto incrementale sono diversi tra loro, la funzione h non è derivabile nel punto $x_1 = 1$. Alla stessa conclusione si perviene ragionando in modo analogo nel punto $x_0 = -1$.

Esercizi

1) Dire in quali punti le seguenti funzioni sono derivabili, e scrivere le loro derivate: $\sqrt{x}$, x^2, x^3, $1/x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\sqrt{1-x}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{sen} x^2$, $\cos x^2$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, e^{2x-3}, $\operatorname{sen}(2x+1)$, $\sqrt[3]{x}$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\log x$.

2) Trovare (se esiste) l'equazione della retta tangente al grafico delle suddette funzioni nel punto di ascissa 0.

3) Trovare (se esiste) la retta tangente ad un quadrato in uno dei quattro vertici.

4) Indicato con $|x|$ il *valore assoluto* di x, e cioè la quantità
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
stabilire se i limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ sono uguali fra loro o no.

5) Studiando il limite del rapporto incrementale, stabilire se le funzioni $f(x) = |x|$ e $g(x) = x\,|x|$ sono derivabili per $x = 0$, ed in caso affermativo determinare l'equazione della retta tangente.

6) Se moltiplico tra loro due funzioni che non sono derivabili, il prodotto sarà derivabile?

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. sulle derivate 3

Esercizi

1) A. Scrivere la definizione della derivata. B. Dopo averla scritta, confrontare tale definizione con quella riportata su di un testo e/o sugli appunti di lezione, e rilevare le eventuali differenze.

2) (∗) Utilizzando la definizione della derivata, determinare il comportamento delle seguenti funzioni vicino all'origine (tangente orizzontale, cuspide, flesso a tangente verticale. . .): $x^{1/3}$; $x^{4/3}$; $x^{2/3}$; $x^{5/3}$; $x^{1/2}$; $x^{3/2}$.

3) (∗) Posto $f(x) = x \log x$, e $g(x) = e^{-1/x}$ per $x > 0$, prolungare le funzioni f e g per continuità in $x = 0$, e calcolarne le derivate destre in tale punto.

4) Stabilire se le funzioni $f(t) = \arccos \cos t$ e $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{|\operatorname{sen} t|}$ sono periodiche.

5) Tracciare il grafico della funzione f dell'esercizio precedente. Suggerimento: sfruttare la definizione di $\arccos x$ per semplificare l'espressione di f.

6) Tracciare il grafico della funzione g dell'esercizio 4. Suggerimento: sfruttare la definizione di $|x|$ per semplificare l'espressione di g.

(∗) M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa.
Analisi Matematica 1. Zanichelli (pag. 160).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Il differenziale

Il differenziale

Dalla definizione della derivata, e tenendo conto del significato del simbolo o (o piccolo), deduciamo che una funzione f è derivabile in un punto x_0 se e solo se esiste un numero reale m tale che

$$f(x) - f(x_0) = m\,(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{50}$$

Consideriamo dunque una funzione f, derivabile in un punto x_0, e indichiamo con $y(x)$ la funzione il cui grafico è la retta tangente al grafico di f in x_0: $y(x) = m\,(x - x_0) + f(x_0)$, dove $m = f'(x_0)$. Poiché vale l'uguaglianza $y(x_0) = f(x_0)$, l'incremento $y(x) - y(x_0)$ si può scrivere come segue: $y(x) - y(x_0) = m\,(x - x_0)$. Perciò, la (50) diventa:

$$f(x) - f(x_0) = y(x) - y(x_0) + o(x - x_0).$$

Questa formula dice che l'incremento di f è uguale all'incemento di y più un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - x_0$. L'incremento di y si chiama *differenziale* di f, e si indica con df. Più precisamente, si pone:

$$df_{x_0}(x - x_0) = y(x) - y(x_0).$$

In tal modo, la (50) diventa:

$$f(x) - f(x_0) = df_{x_0}(x - x_0) + o(x - x_0),$$

che esprime il fatto che l'incremento di f è uguale al differenziale di f più un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - x_0$.

Esercizi

Conveniamo di scrivere $f(x) \approx g(x)$ per x vicino a x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

1) Determinare due numeri reali m e q tali che $\operatorname{sen} x \approx mx + q$ per x vicino a 0.

2) Ripetere l'esercizio precedente sostituendo al posto di $\operatorname{sen} x$ le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} &\cos x \\ &\log(1+x) \quad \text{(logaritmo naturale di } 1+x) \\ &e^x \\ &\sqrt{1+x} \end{aligned}$$

3) Dire se è corretto scrivere: $\cos x \approx 1 - x^2/2$ per x vicino a 0.

4) Supponiamo di avere tre funzioni f, g e h, e di sapere che $f(x) \approx g(x)$ e $g(x) \approx h(x)$ per x vicino ad un certo x_0. Possiamo dedurne che $f(x) \approx h(x)$?

5) Posto $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x + 10^{-6}/x$, calcoliamo $f(x)$ e $g(x)$ per $x = 1{,}00$, $x = 0{,}10$, $x = 0{,}01$, arrotondando il risultato alla seconda cifra decimale. Osservando i risultati ottenuti, possiamo concludere che $\operatorname{sen} x \approx x$ e $g(x) \approx x$ per x vicino a zero?

Monotonia

Definizione (funzione strettamente crescente). Una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice *strettamente crescente* se per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$, tali che $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

Esempio 15. La funzione $y = x^2$ è strettamente crescente sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Osservando la definizione, concludiamo che una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ non è strettamente crescente quando esistono almeno due valori $x_1, x_2 \in (a,b)$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Esempio 16. La funzione $y = x^2$ non è strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

La proprietà di monotonia (crescenza o decrescenza) di una funzione è legata al segno della derivata prima. In particolare, si ha:

Legame tra monotonia e derivata. Se una funzione $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in (a,b), e se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ allora f è strettamente crescente.

La proprietà di stretta crescenza di una funzione non si deve identificare con la positività della derivata prima, come mostra il seguente esempio:

Esempio 17. La funzione $f(x) = 2x + |x|$ è strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, e non è derivabile per $x = 0$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. su monotonia

Esercizi

La *parte positiva* e la *parte negativa* di x si indicano con x^+ e x^-, e sono definite come segue:

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1) Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$x^+, \qquad |x|\,x, \qquad x^3, \qquad x^-, \qquad x^+ + x^-, \qquad x^+ - x^-.$$

2) Stabilire quali, tra le funzioni precedenti, sono derivabili nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$.

3) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^3$ nel punto di ascissa $x = 0$.

4) a. Determinare il più grande intervallo aperto contenente l'origine e tale che la funzione $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ sia strettamente crescente in tale intervallo. b. Determinare il più grande intervallo aperto contenente l'origine e tale che $f_1'(x) > 0$ in tale intervallo.

5) Ripetere l'esercizio precedente, se possibile, usando al posto di $f_1(x)$ le seguenti funzioni: $|x|\,x$, x^3, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^x, $\log(1 + x)$ (logaritmo naturale di $1 + x$).

6) Dico che se una funzione $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile e strettamente crescente nell'intervallo (a, b), allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$: dimostrare o confutare questa affermazione.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. base

Esercizi

1) Trovare tutti i numeri reali che differiscono da $\pi/2$ per un multiplo di π.

2) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni: $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $y = e^{\log x}$, $y = \log e^x$.

3) Tracciare il grafico della funzione $y = \operatorname{arctg} x$.

4) Trovare il differenziale delle seguenti funzioni nel punto $x_0 = 0$: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = \log(1 + x)$.

5) Consideriamo una funzione f avente per dominio un intervallo (a, b) e a valori reali. Consideriamo, inoltre, un punto $x_0 \in (a, b)$. Dimostrare che f è derivabile in x_0 se e solo se esiste un polinomio di primo grado $y(x) = mx + q$ tale che $f(x) = y(x) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Ottimizzazione

Ottimizzazione

I problemi di ottimizzazione consistono nel trovare il più piccolo (o il più grande) valore possibile per una data funzione, detta *funzione obiettivo*. Essi sono importanti per il significato che la funzione obiettivo ha, di volta in volta, e corrispondono alla volontà di tovare *la migliore soluzione possibile* ad un dato problema.

Esempio 18. Un problema isoperimetrico. Consideriamo un generico cilindro circolare retto, ed indichiamo con r il raggio di base e con h l'altezza. Ci proponiamo di determinare r e h in modo tale che la superficie totale del cilindro sia la più piccola possibile, fermo restando il volume.

Tale problema si può interpretare come la ricerca delle dimensioni ottimali da dare ad un contenitore (il cilindro) in modo tale da rendere minima la quantità di materiale necessaria per costruirlo (proporzionale alla superficie) lasciandone inalterata la capacità.

Soluzione. Assegnato il valore del volume V, il raggio r e l'altezza h sono legati dalla relazione $\pi\, r^2\, h = V$. Dunque possiamo esprimere h in funzione di r, come segue: $h(r) = V/(\pi\, r^2)$. La superficie totale del cilindro A è data da

$$A(r) = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h(r) = 2\,\pi\, r^2 + \frac{2\,V}{r}.$$

Conoscendo l'andamento delle funzioni $2\,\pi\, r^2$ e $2\,V/r$, possiamo già avere un idea dell'aspetto del grafico della funzione $A(r)$. Per maggiore precisione, usando il calcolo differenziale, troviamo:

$$A'(r) = 4\,\pi\, r - \frac{2\,V}{r^2}.$$

Studiamo il segno della derivata prima, perché esso è legato alla monotonia della funzione $A(r)$. La disuguaglianza $4\,\pi\, r - 2\,V/r^2 > 0$ equivale a $r^3 > V/(2\,\pi)$, ovvero $r > r_0$, dove r_0 è dato da

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\,\pi}}\,.$$

Per il legame che sussiste fra il segno della derivata prima e la monotonia della funzione, possiamo concludere che $A(r)$ è strettamente crescente nell'intervallo $(r_0, +\infty)$, e strettamente decrescente nell'intervallo $(0, r_0)$ ($A(r)$ non è definita per $r \le 0$). Dunque il più piccolo valore di $A(r)$ è quello assunto per $r = r_0$. In corrispondenza, si trova $h(r_0) = \sqrt[3]{4\,V/\pi}$ e $A(r_0) = 3\,\sqrt[3]{2\,\pi\, V^2}$. Si noti che $2\,r_0 = h(r_0)$.

Avendo in mente almeno l'esempio precedente, passiamo a considerare la definizione di *minimo* di una funzione, che vale molto più in generale:

Definizione (minimo assoluto di una funzione). Dato un insieme arbitrario X, consideriamo una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$. Se esiste un $x_0 \in X$ tale che

$$f(x_0) \le f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

allora: si dice che f ammette minimo assoluto in X, il punto x_0 si dice *punto di minimo assoluto* per f in X, e si scrive

$$\min_{x \in X} f(x) = f(x_0).$$

La definizione di *massimo* è del tutto analoga:

Definizione (massimo assoluto di una funzione). Dato un insieme arbitrario X, consideriamo una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$. Se esiste un $x_0 \in X$ tale che

$$f(x_0) \ge f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

allora: si dice che f ammette massimo assoluto in X, il punto x_0 si dice *punto di massimo assoluto* per f in X, e si scrive

$$\max_{x\in X} f(x) = f(x_0).$$

In pratica, nel corso di Analisi Matematica I, l'insieme arbitrario X è quasi sempre un intervallo. Talvolta, X è l'unione di un numero finito di intervalli disgiunti, come per esempio il dominio della funzione $1/\log x$. Raramente, X è l'unione di infiniti intervalli disgiunti, come il dominio di $\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

Al di fuori del corso, gli elementi dell'insieme X possono anche non essere numeri, ad esempio possono essere vettori a due o più componenti, oppure funzioni.

L'errore più frequente nello studio dei concetti di massimo e minimo consiste nel confonderli con il concetto di *punto critico*, cioè punto dove si annulla la derivata prima. La seguente discussione è volta a chiarire la questione.

Un classico teorema, attribuito al giurista Pierre de Fermat, afferma che se X è un intervallo sulla retta reale, e se f è derivabile ed assume il minimo in un punto x_0 *interno* a tale intervallo, allora la sua derivata deve annullarsi:

Teorema 2. (Fermat). *Se $f\colon (x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ ha un minimo assoluto o un massimo assoluto in x_0, e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Per l'ipotesi di derivabilità di f, e poiché x_0 è un *punto interno* al dominio di f, si ha:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Nel caso in cui x_0 è un punto di minimo assoluto, il rapporto incrementale al primo membro è maggiore o uguale a 0. Per il teorema della permanenza del segno, ne segue che $f'(x_0) \ge 0$. Ragionando in modo analogo sul rapporto incrementale all'ultimo membro, si trova che $f'(x_0) \le 0$. Dunque $f'(x_0) = 0$, come volevasi dimostrare. La conclusione segue in modo simile nel caso in cui x_0 è un punto di massimo assoluto. □

L'importanza e la notorietà del teorema di Fermat non sono ragioni sufficienti per *identificare* il concetto di massimo o quello di minimo con quello di punto critico. Può infatti avvenire che la derivata *non esista* in un punto di minimo (o di massimo), come mostra il seguente esempio.

Esempio 19. La funzione $y = |x|$ ha minimo assoluto per $x_0 = 0$, perché $|0| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma tale funzione non è derivabile in $x_0 = 0$.

Può anche avvenire che una funzione abbia minimo in un *estremo* del suo intervallo di definizione. Anche in questo caso il teorema di Fermat non è applicabile, come mostra il seguente esempio.

Esempio 20. L'energia potenziale di un punto materiale di massa m, soggetto ad un campo gravitazionale uniforme, e libero di muoversi al disopra di un dato piano orizzontale, è espressa dal prodotto $m\,g\,h$, dove g è l'accelerazione di gravità e h la distanza dal piano suddetto. La funzione $f(h) = m\,g\,h$, definita sull'intervallo $[\,0, +\infty)$, oppure sull'intervallo $[\,0, b\,]$, dove b è un valore della quota al di sopra del quale il campo gravitazionale non può più considerarsi uniforme, assume il minimo per $h = 0$. Tuttavia, la derivata destra $f'(0^+)$ vale $m\,g$ e non 0.

La questione dell'*esistenza* di un punto di massimo e di un punto di minimo assoluto è affrontata da un fondamentale teorema, la cui dimostrazione si può trovare sui testi di Analisi esistenti:

Teorema 3. (Weierstrass). *Se f ha per dominio un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, ed è continua in tutti i punti di tale intervallo, allora esistono almeno un punto di massimo assoluto ed uno di minimo assoluto.*

I teoremi di Fermat e di Weierstrass, oltre a fornire degli strumenti per la ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo di una funzione, e quindi per la soluzione dei problemi di ottimizzazione, sono anche la chiave per dimostrare un altro classico teorema, dalle importanti conseguenze:

Teorema 4. (Rolle). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e continua agli estremi, e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $\xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché, per ipotesi, f è derivabile in (a,b), essa è anche continua in (a,b). Ancora per ipotesi, f è continua anche agli estremi di tale intervallo. Dunque ammette massimo e minimo assoluti (per il teorema di Weierstrass). Se almeno uno tra il massimo ed il minimo di f è assunto in un punto interno ξ, allora $f'(\xi) = 0$ per il teorema di Fermat. Se, invece, sia il massimo che il minimo di f sono assunti agli estremi, allora, siccome $f(a) = f(b)$, f è costante e $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in (a,b)$. □

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Eserc. ottimizzazione

Esercizi

1) Supponiamo di voler costruire un tubo di lunghezza ℓ, la cui sezione sia di forma rettangolare ed abbia un'area assegnata A, utilizzando la minore quantità possibile di materiale. Determinare le dimensioni x e y della sezione del tubo.

2) Determinare gli eventuali punti di massimo e gli eventuali punti di minimo assoluto della funzione $y = x^2$ (non è necessario usare il calcolo differenziale).

3) Determinare gli eventuali punti di massimo e gli eventuali punti di minimo assoluto della funzione

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},$$

dove μ e σ sono due parametri reali, con $\sigma > 0$ (non è necessario usare il calcolo differenziale).

4) Consideriamo un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, ed una generica funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(a).$$

Supponiamo, inoltre, che f sia dotata di derivata destra $f'_+(a)$. Dimostrare che $f'_+(a) \geq 0$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
T. Lagrange, Cauchy

Esercizi

1) Consideriamo un generico intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, ed una generica funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia derivabile nell'intervallo aperto (a,b), e continua agli estremi. Dimostrare che esiste almeno un punto $\xi \in (a,b)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(teorema del valor medio di Lagrange). Suggerimento: verificare che la funzione $\varphi(x) = (b-a)\, f(x) - (f(b) - f(a))\, x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

2) Interpretare geometricamente il teorema di Lagrange.

3) Dimostrare che se una funzione f è derivabile in un intervallo (a,b), e se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora f è strettamente crescente. Suggerimento: usare il teorema di Lagrange.

4) Consideriamo due funzioni f e g, continue in un intervallo $[a,b]$, e derivabili in (a,b). Supponiamo che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Dimostrare che (teorema di Cauchy) esiste almeno un $\xi \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Suggerimento: usare la funzione $\psi(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x)$.

Convessità

Una delle più notevoli proprietà qualitative di una funzione è la convessità, che si può definire come segue:

Definizione (funzione convessa). Una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ ed ogni $t \in (0,1)$ si ha

$$f(t\,x_1 + (1-t)\,x_2) \le t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2).$$

La definizione appena data esprime il fatto che *nessun punto* del segmento che congiunge due punti qualunque $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ del grafico di f si trova *al di sotto* del punto del grafico di f avente la stessa ascissa. In modo del tutto analogo si definisce la *concavità*:

Definizione (funzione concava). Una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice *concava* se per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ ed ogni $t \in (0,1)$ si ha

$$f(t\,x_1 + (1-t)\,x_2) \ge t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2).$$

Se una funzione f è derivabile due volte, la sua eventuale convessità è legata al segno della derivata seconda:

Legame con la derivata seconda. Supponiamo che $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sia derivabile due volte in tutto l'intervallo (a, b). Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa (rispettivamente, concava) è che $f''(x) \ge 0$ (rispettivamente, $f''(x) \le 0$) per ogni $x \in (a,b)$.

Osservazione. Poiché f'' è la derivata di f', e tenendo presente il legame tra derivata e monotonia, si conclude che la condizione

$$f''(x) \ge 0 \text{ per ogni } x \in (a,b)$$

equivale alla non-decrescenza di f'. Similmente, la condizione

$$f''(x) \le 0 \text{ per ogni } x \in (a,b)$$

equivale alla non-crescenza di f'.

È bene tener presente che una funzione può benissimo essere convessa, o concava, senza che ne esista la derivata seconda in qualche punto. Questa circostanza è evidenziata dal seguente esempio.

Esempio 21. La funzione $y = |x|$ è convessa, pur non essendo derivabile nel punto $x = 0$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Studio del grafico

Studio del grafico

A conclusione della trattazione di alcune proprietà qualitative delle funzioni, studiamo il grafico della funzione $y = x^2$. È ben noto che tale funzione ha per grafico una parabola avente per asse l'asse y, il vertice nell'origine, e la concavità rivolta verso l'alto. Pertanto, si ha la possibilità di mettere alla prova le nozioni teoriche sin qui sviluppate.

Studio del grafico di $y = x^2$.

0) Il dominio è $\mathbb{R}$. Questa informazione va resa sul grafico evitando di dare l'impressione che esso, da un certo punto in poi, salga verticalmente, parallelo all'asse y.
1) Simmetria nella variabile x: si ha $x^2 = (-x)^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
2) Non-negatività: risulta $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque il grafico giace nel semipiano $y \geq 0$.
3) L'uguaglianza $x^2 = 0$ vale se e solo se $x = 0$: questo, unitamente alla definizione di minimo assoluto ed all'osservazione precedente, consente di dire che la funzione $y = x^2$ ha un minimo assoluto per $x = 0$.
4) Monotonia. Prendiamo x_1 e x_2 in modo tale da soddisfare la condizione $0 < x_1 < x_2$. Poiché una disuguaglianza si conserva moltiplicando ambo i membri per una quantità positiva, si ha $x_1^2 < x_1 x_2$ e $x_1 x_2 < x_2^2$. Per la proprietà transitiva si ricava quindi $x_1^2 < x_2^2$, e perciò x^2 è strettamente crescente sull'intervallo $(0, +\infty)$.

   Se, invece, $x_1 < x_2 < 0$, si trova $x_1^2 > x_2^2$, e perciò x^2 è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$.
5) Si ha $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. Infatti, fissato un $M \in \mathbb{R}^+$ grande a piacere, se $x > \sqrt{M}$ allora $x^2 > M$. In maniera analoga si dimostra che $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, come del resto segue dalla simmetria della funzione $y = x^2$.
6) La derivata esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è data da $(x^2)' = 2x$. Essa si annulla per $x = 0$. Dunque il grafico ammette tangente in ogni punto, e la tangente nell'origine è orizzontale.
7) Convessità: la derivata seconda esiste in ogni punto, e si ha $(x^2)'' = 2 > 0$. Dunque la funzione $y = x^2$ è convessa.
8) Massimi e minimi: poiché $y(0) = 0$, e poiché $y(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la definizione di minimo assoluto è soddisfatta, e possiamo scrivere $\min_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0$.

   Non vi sono altri estremi all'infuori di quello appena individuato. Ciò si può dedurre dalla proprietà di monotonia, esaminata prima, oppure facendo appello al teorema di Fermat, e tenendo conto del fatto che l'unico punto critico è $x_0 = 0$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. su convessità

Esercizi

1) Indicato con M un generico numero reale positivo, trovare un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 > M$ per ogni $x < x_0$ (se si risolve questo esercizio, si può scrivere $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$).

2) Trovare una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che ogni punto del suo grafico disti dal punto $(0, 1/4)$ tanto quanto dista dalla retta $y = -1/4$.

3) Verificare che la funzione $f(x) = mx + q$ soddisfa la definizione di funzione convessa per ogni $m, q \in \mathbb{R}$.

4) Presi due punti generici $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, determinare la legge oraria $x = x(t)$ del moto di un punto che si muove lungo l'asse x con velocità costante, ed in modo tale che $x(0) = x_2$, $x(1) = x_1$.

5) Data una funzione generica $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, e fissati due punti distinti $x_1, x_2 \in (a, b)$, trovare l'equazione della retta r passante per i due punti del grafico di f aventi ascissa rispettivamente uguale a x_1 e x_2.

6) Determinare la legge oraria del moto di un punto che si muove di moto uniforme lungo la retta r dell'esercizio precedente, e la cui ascissa è x_2 all'istante $t = 0$, e x_1 all'istante $t = 1$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Esercizi di riepilogo

Esercizi

1) Tracciare il grafico delle seguenti funzioni: $x + \log x$, $\sqrt{x^2 + 5x + 4}$, $x + \frac{2}{x}$, x^{99}, $e^{\cos x}$, $1 - |x - 2|$.

2) Determinare gli eventuali punti di massimo assoluto, e gli eventuali punti di minimo assoluto delle funzioni dell'esercizio precedente.

3) Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2 + 5x + 4} < 2 - \dfrac{x}{2}$

4) Determinare la base x e l'altezza y di un rettangolo in modo tale che la sua area sia $A = 4$ ed il suo perimetro sia il più grande possibile.

Moto uniforme

Studiamo il moto di un punto materiale il cui vettore velocità $\boldsymbol{v}$ sia costante. Più precisamente, determiniamo la legge oraria del moto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, dove $\boldsymbol{x}$ è il vettore di $\mathbb{R}^3$ che rappresenta la posizione del punto mobile, e t è la variabile temporale. Richiamiamo la definizione di funzione costante:

Definizione (funzione costante). Una funzione $\boldsymbol{x}(t)$, dove $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, e $t \in (a,b)$, si dice *costante* se esiste un vettore $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{per ogni } t \in (a,b).$$

Come vedremo tra poco, le funzioni costanti su di un intervallo si possono caratterizzare mediante la loro derivata. La derivata di una funzione a valori vettoriali $\boldsymbol{x}(t)$ si definisce come segue:

Definizione della derivata. Una funzione $\boldsymbol{x}(t)$, dove $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, e $t \in (a,b)$, si dice *derivabile* in un punto $t_0 \in (a,b)$ se esiste un vettore di $\mathbb{R}^N$, denotato con $\boldsymbol{x}'(t_0)$, tale che

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)}{t - t_0} = \boldsymbol{x}'(t_0). \tag{51}$$

In tal caso, il vettore $\boldsymbol{x}'(t_0)$ si chiama *derivata* di $\boldsymbol{x}(t)$ per $t = t_0$.

Si noti che la definizione della derivata non può essere ridotta alla sola formula (51), ma richiede l'*esistenza* del limite che vi figura. Un'altra possibile definizione è la seguente:

Definizione della derivata. Una funzione $\boldsymbol{x}(t)$, dove $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, e $t \in (a,b)$, si dice *derivabile* in un punto $t_0 \in (a,b)$ se le componenti $x_1(t), \dots, x_N(t)$ di $\boldsymbol{x}(t)$ sono tutte derivabili per $t = t_0$ nel senso della definizione di pagina 40. In tal caso, si dice *derivata* di $\boldsymbol{x}(t)$ per $t = t_0$ il vettore $\boldsymbol{x}'(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_N'(t_0))$.

Le due precedenti definizioni sono equivalenti nel senso che una funzione $\boldsymbol{x}(t)$ ne soddisfa una se e solo se soddisfa l'altra. Ciò è dovuto al fatto che *il limite di una funzione a valori in $\mathbb{R}^N$ è (se esiste) il vettore le cui componenti sono i limiti delle componenti della funzione.*

A questo punto possiamo caratterizzare le funzioni costanti attraverso la loro derivata.

Lemma 1. *Una funzione $\boldsymbol{x}(t)$, dove $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, e $t \in (a,b)$, è costante se e solo se $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{0}$ per ogni $t \in (a,b)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione $\boldsymbol{x}(t)$ sia costante. Allora il rapporto incrementale

$$\frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)}{t - t_0}$$

è uguale a $\boldsymbol{0}$ per ogni $t \neq t_0$. Dunque ne esiste il limite per $t \to t_0$, e tale limite è ancora $\boldsymbol{0}$.

Viceversa, supponiamo che $\boldsymbol{x}(t)$ (sia derivabile in (a,b) ed) abbia la derivata identicamente nulla. Fissiamo un punto a piacere $t_0 \in (a,b)$. Per ogni $t \in (a,b)$ diverso da t_0, e per ogni $k = 1, \dots, N$ possiamo applicare il teorema di Lagrange alla componente $x_k(t)$ di $\boldsymbol{x}(t)$: dunque esiste un punto $\xi \in (a,b)$ tale che

$$\frac{x_k(t) - x_k(t_0)}{t - t_0} = x_k'(\xi).$$

Poiché il secondo membro è uguale a zero per ipotesi, ne segue che $x_k(t) = x_k(t_0)$. Dunque $\boldsymbol{x}(t)$ è costante, come volevasi dimostrare, ed assume identicamente il valore $\boldsymbol{x}_0 = (x_1(t_0), \dots, x_N(t_0))$. $\square$

Applicazione. Supponiamo che un punto materiale si muova in $\mathbb{R}^3$ secondo la legge oraria $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, dove $\boldsymbol{x}(t)$ è una funzione incognita che costituisce l'oggetto del nostro studio, e $t \in (a, b)$. Supponiamo che la velocità $\boldsymbol{v}$ del punto sia costante. Tale circostanza si esprime attraverso l'equazione

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{v}. \tag{52}$$

L'equazione (52), dove $\boldsymbol{v}$ rappresenta un vettore dato, e $\boldsymbol{x}(t)$ una funzione incognita, è un esempio di *equazione differenziale (vettoriale)* del primo ordine, ovvero di *sistema di equazioni differenziali (scalari)* del primo ordine. Indicate con v_1, v_2, v_3 le componenti di $\boldsymbol{v}$, esso può essere scritto come segue:

$$\begin{cases} x_1'(t) = v_1, \\ x_2'(t) = v_2, \\ x_3'(t) = v_3. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}\, t \tag{53}$$

soddisfa la (52) qualunque sia il vettore $\boldsymbol{x}_0$. Resta da vedere se ci sono altre soluzioni. A tal fine, indichiamo con $\boldsymbol{x}(t)$ una generica soluzione dell'equazione, e consideriamo la differenza $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{v}\, t$. Derivando rispetto a t si trova $(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{v}\, t)' = \boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Usando il lemma 1, segue che la differenza $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{v}\, t$ è costante, dunque non vi sono altre soluzioni oltre a quelle della forma (53).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Formula di Taylor

Formula di Taylor

Teorema 5. (Formula di Taylor con il resto di Lagrange). *Consideriamo un numero naturale n, una funzione $f(x)$ derivabile $n+1$ volte in un intervallo (a,b), e due punti $x_0, x \in (a,b)$. Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}, \quad (54)$$

dove $f^{(k)}$ denota la derivata k-esima di f, e si intende che $f^{(0)} = f$, $0^0 = 1$, $0! = 1$.

Dimostrazione. Il procedimento per la dimostrazione è indicato negli esercizi 5–9 a pagina 66. In particolare, si trova che se $x_0 < x$ allora $\xi \in (x_0, x)$. Se, invece, $x < x_0$, allora $\xi \in (x, x_0)$. Se, infine, $x = x_0$, la (54) diventa:

$$f(x_0) = f(x_0)\,0^0 + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,0^{n+1}$$

e si verifica direttamente. □

La (54) si dice *formula di Taylor con il resto di Lagrange*, ed il termine

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

si chiama *resto di Lagrange*.

Osservazione. (Il caso $n = 0$). Per $n = 0$, la (54) diventa: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)\,(x-x_0)$. Dunque il teorema 5 si riduce al teorema di Lagrange.

Osservazione. ($0! = 1$). Rinunciando all'uguaglianza $0! = 1$, la formula di Taylor si può scrivere come segue:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

L'uguaglianza $0! = 1$ si giustifica non tanto chiedendosi cosa avviene se si moltiplica lo zero per i numeri naturali precedenti (che non ci sono), ma osservando che essa consente di scrivere la formula di Taylor nella forma (54), che è più concisa di quella qui sopra.

Osservazione. ($0^0 = 1$). L'uguaglianza $0^0 = 1$ si giustifica non tanto chiedendosi cosa avviene se si moltiplica 0 per sé stesso 0 volte, ma osservando che essa consente di dire che la formula di Taylor è valida anche nel caso $x = x_0$. In tal caso, infatti, il secondo membro della (54) si riduce al solo termine $f(x_0)\,0^0/0!$. Usando le uguaglianze $0^0 = 1$ e $0! = 1$, tale termine diventa $f(x_0)$, e l'uguaglianza (54) è soddisfatta.

La formula di Taylor con il resto di Lagrange può servire per il calcolo di alcune funzioni trascendenti, come mostra il seguente esempio.

Esempio 22. Una stima con la formula di Taylor. Prendiamo $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$ (quando $x_0 = 0$, la formula (54) si dice *formula di Maclaurin*). La (54) diventa:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{f^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}\,x^{2n+3}$$

Ponendo $n = 1$ si ottiene:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}\,x^5,$$

cioè

$$\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{\cos\xi}{5!}\,x^5.$$

Per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha $|x^5| \leq 1$, e perciò:

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| \leq \frac{1}{120}.$$

Se, dunque, riteniamo accettabile un errore non superiore a $1/120$, possiamo usare il polinomio $x - x^3/6$ al posto della funzione $\operatorname{sen} x$ per $x \in [-1, 1]$. Il vantaggio è che il valore di un polinomio si ottiene mediante le quattro operazioni aritmetiche.

Serie di Taylor. Supponiamo che f possieda le derivate di tutti gli ordini in un intervallo (a, b). Fissato un punto $x_0 \in (a, b)$, la *serie di Taylor* di f si rappresenta con la seguente espressione:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

la quale, a sua volta, si definisce attraverso il seguente limite:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Se tale limite esiste ed è finito, si dice che la serie *converge*, ed il valore del limite si dice *somma della serie*. Se il limite suddetto non esiste, si dice che la serie è *indeterminata*.

Esempio 23. Serie di Maclaurin di $\operatorname{sen} x$. La serie di Maclaurin (cioè la serie di Taylor con $x_0 = 0$) della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la sua somma è $\operatorname{sen} x$. In particolare, per $x \in [-1, 1]$ la conclusione segue dal fatto che il resto di Lagrange tende a 0 per $n \to +\infty$. Questo è vero anche se $x \notin [-1, 1]$, ma la dimostrazione è meno immediata.

Esempio 24. Serie di Maclaurin di $\cos x$ e e^x. Per le funzioni $\cos x$ e e^x valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nell'esempio precedente.

Esempio 25. Serie di Maclaurin di $\log(1 + x)$. La serie di Maclaurin della funzione $f(x) = \log(1+x)$ converge per $x \in (-1, 1]$, e la sua somma è $\log(1+x)$. In particolare, per $x \in [0, 1]$ la conclusione segue dal fatto che il resto di Lagrange tende a 0 per $n \to +\infty$. Questo è vero anche se $x \in (-1, 0)$, ma la verifica è meno immediata.

Teorema 6. (Formula di Taylor con il resto di Peano). *Consideriamo un intero positivo n, e una funzione $f(x)$ derivabile $n-1$ volte in un intervallo (a, b), e dotata della derivata n-esima in un certo punto $x_0 \in (a, b)$. Allora per $x \to x_0$ si ha:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \tag{55}$$

Dimostrazione. Seguire il suggerimento dell'esercizio 1 a pagina 31. □

La formula (55) si dice *formula di Taylor con il resto di Peano*.

Osservazione. (Il caso $n = 1$). Per $n = 1$ la (55) si riduce a $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, formula che discende direttamente dalla definizione della derivata.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. Taylor 1

Esercizi

Posto $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$; $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $f^{(0)} = f$, e $f^{(k)} = df^{(k-1)}/dx$ per ogni $k \in \mathbb{Z}^+$, svolgere i seguenti esercizi.

1) Stabilire se esistono un intero n ed opportuni coefficienti a_k, $k = 0, \ldots, n$, tali che risulti $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In caso affermativo, determinare il valore di n e degli a_k.

2) Tracciare il grafico del polinomio $P_2(x)$ definito come segue:
$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k.$

3) Determinare i parametri m e q in modo tale che la retta di equazione $y(x) = mx + q$ sia tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

4) Calcolare i seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - y(x)}{x}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^2}.$

Svolgere nuovamente gli esercizi precedenti ponendo questa volta $f(x) = \cos x$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. Taylor 2

Esercizi

1) Posto $f(x) = (x+3)^2$ e $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $f^{(0)} = f$, e $f^{(k)} = df^{(k-1)}/dx$ per ogni $k \in \mathbb{Z}^+$, risolvere l'equazione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \tag{56}$$

□ L'equazione (56) non ha soluzioni reali. □ Tutti i numeri reali x soddisfano la (56). □ L'equazione (56) ha un'unica soluzione, che è $x =$

2) Posto $f(x) = \log(1 + x)$, e definita di conseguenza $f^{(k)}$ per $k \in \mathbb{N}$, possiamo dire che: □ L'equazione (56) non ha soluzioni reali. □ Tutti i numeri reali x soddisfano la (56). □ L'equazione (56) ha un'unica soluzione, che è $x =$

3) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}\,x^2 - \log(1+x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}\,x^2 - \log(1+x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Analisi Matematica I prof. Antonio Greco Eserc. Taylor 3

Esercizi

Indicato con n un generico numero naturale, e data una funzione f derivabile n volte in un intervallo (a, b) e a valori reali, fissato un punto $x_0 \in (a, b)$, il *polinomio di Taylor* $P_n(x, x_0)$ associato alla funzione f si definisce come segue:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

dove $f^{(k)}$ denota la derivata k-esima di f, e si intende che $f^{(0)} = f,\ 0^0 = 1,\ 0! = 1$.

1) Scrivere il polinomio di Taylor $P_2(x, 0)$ associato alle funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1 + x)$.

2) Confrontare i grafici delle funzioni precedenti con quelli dei corrispondenti polinomi $P_2(x, 0)$. Confrontare, in particolare, le derivate prime e le derivate seconde nel punto $x = 0$.

Se f è derivabile $n + 1$ volte nell'intervallo (a, b), allora per ogni $x \in (x_0,\, b)$ esiste un punto $\xi \in (x_0,\, x)$ tale che $f(x) = P_n(x, x_0) + f^{(n+1)}(\xi)\,(x - x_0)^{n+1}/(n+1)!$ (formula di Taylor con il resto di Lagrange). Il termine $f^{(n+1)}(\xi)\,(x - x_0)^{n+1}/(n + 1)!$ si dice *resto di Lagrange*.

3) Scrivere il polinomio $P_4(x, 0)$ associato a $f(x) = \operatorname{sen} x$. Verificare che $0{,}32\overline{3} < P_4(1/3,\, 0) < 0{,}\overline{3}$. Verificare che il valore assoluto del resto di Lagrange è più piccolo di 0,01. Trovare la prima cifra decimale di $\operatorname{sen}(1/3)$.

4) Verificare che $|x - \operatorname{sen} x| \le |x|^3/6$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5) Scrivere l'enunciato del teorema di Cauchy procedendo come segue: a) basarsi sulla memoria; b) consultare le dispense, un libro o gli appunti di lezione; c) chiedere al tutor o al docente.

6) Consideriamo un punto $x \in (x_0, b)$. Applicando il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x) - P_n(x, x_0)$ e $(x - x_0)^{n+1}$, sull'intervallo $[x_0, x]$, si deduce che: esiste un punto $\xi_1 \in (x_0,\, x)$ tale che... (completare).

7) Supponiamo che $n > 0$. Applicando il teorema di Cauchy alle funzioni $(f(x) - P_n(x, x_0))'$ e $((x - x_0)^{n+1})'$, sull'intervallo $[x_0, \xi_1]$, si deduce che: esiste un punto $\xi_2 \in (x_0,\, \xi_1)$ tale che... (completare).

8) Supponiamo che $n > 1$. Applicando il teorema di Cauchy alle funzioni $(f(x) - P_n(x, x_0))''$ e $((x - x_0)^{n+1})''$, sull'intervallo $[x_0, \xi_2]$, si deduce che: esiste un punto $\xi_3 \in (x_0,\, \xi_2)$ tale che... (completare).

9) Consideriamo un punto $x \in (x_0, b)$. Applicando $n + 1$ volte il teorema di Cauchy, inizialmente alle funzioni $f(x) - P_n(x, x_0)$ e $(x - x_0)^{n+1}$ sull'intervallo $[x_0, x]$, poi (se $n > 0$) alle funzioni $(f(x) - P_n(x, x_0))'$ e $((x - x_0)^{n+1})'$ sull'intervallo $[x_0,\, \xi_1]$, poi (se $n > 1$) alle funzioni $(f(x) - P_n(x, x_0))''$ e $((x - x_0)^{n+1})''$ sull'intervallo $[x_0,\, \xi_2]$, eccetera, infine alle funzioni $(f(x) - P_n(x, x_0))^{(n)}$ e $((x - x_0)^{n+1})^{(n)}$ sull'intervallo $[x_0,\, \xi_n]$, si deduce che: esiste un punto $\xi \in (x_0,\, x)$ tale che... (completare).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. Taylor 4

Esercizi

1) Indicato con I l'intervallo $I = [0, \frac{1}{2}]$, svolgere i seguenti esercizi.

   (a) Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \log(1+x)$ sull'intervallo I, verificare che
$$\log \tfrac{3}{2} \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}). \tag{57}$$

   (b) Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ sull'intervallo I, verificare che
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \in (0, \tfrac{1}{2}). \tag{58}$$
   Rappresentare sulla circonferenza trigonometrica l'angolo di $\frac{1}{2}$ radianti. Trovare un altro metodo per verificare la (58).

   (c) Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\psi(x) = \cos x$ sull'intervallo I, e sfruttando la (58), verificare che
$$\cos \tfrac{1}{2} \in (\tfrac{3}{4}, 1). \tag{59}$$

   (d) Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $\varphi(x)$ sull'intervallo I, e sfruttando la (59), verificare che
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \in (\tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}). \tag{60}$$
   Stabilire se la formula (60) implica la (58).

   (e) Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $g(x) = e^x$ sull'intervallo I, verificare che $\sqrt{e} > 1{,}5$ e quindi che $e > 2{,}25$. Stabilire se questo risultato è una conseguenza della (57).

2) Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 1 associato alle funzioni f, φ, ψ e tracciarne il grafico insieme a quello della funzione generatrice. Sfruttando la corrispondente formula di Maclaurin e le relazioni (59) e (60), verificare che:
$$\log \tfrac{3}{2} \in (\tfrac{3}{8}, \tfrac{4}{9})$$
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \in (\tfrac{7}{16}, \tfrac{1}{2})$$
$$\cos \tfrac{1}{2} \in (\tfrac{7}{8}, \tfrac{29}{32})$$

3) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)\log(1+x)}{x \operatorname{tg} x}$

4) Sfruttando la formula di Maclaurin con il resto di Lagrange applicata alle funzioni f, g, φ, ψ, verificare le seguenti uguaglianze:
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2;$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e;$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \operatorname{sen} 1;$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \cos 1.$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. Taylor 5

Esercizi

1) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \log(1 + x)$.

2) Scrivere la formula di Maclaurin con il resto di Lagrange per la funzione $f(x) = \log(1 + x)$. Usare un polinomio di Maclaurin di grado generico $n > 0$.

3) Verificare che se $x \in [\,0, 1\,]$, allora il valore assoluto del resto di Lagrange dell'esercizio precedente non supera la quantità

$$\frac{1}{n+1}.$$

4) Per ogni $x \in (-1, 1\,]$ sussiste la seguente uguaglianza:

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k.$$

Verificarla almeno per $x \in [\,0, 1\,]$.

5) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

6) Scrivere la formula di Maclaurin con il resto di Lagrange per la funzione precedente. Usare un polinomio di Maclaurin di grado n generico.

7) Verificare l'uguaglianza $\sum_{k=0}^{n} x^k = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\,1\,\}$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ facendo un ragionamento induttivo.

8) Indicato con n un generico numero naturale, e considerati $n + 1$ numeri reali generici $a_0, \ldots, a_n$, con $a_n \neq 0$, definiamo il polinomio $f(x)$ ponendo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k.$$

Scrivere la formula di Maclaurin per $f(x)$ con il resto di Lagrange, usando un polinomio di Maclaurin di grado n (il grado di f).

9) Scrivere la formula di Maclaurin con il resto di Lagrange per la funzione $f(x) = e^x$, usando un polinomio di Maclaurin di grado n generico.

10) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sussiste la seguente uguaglianza:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Verificarla almeno per $x \in [\,-1, 1\,]$.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Integrale indefinito

Integr. indefinito

Si usa correntemente la parola *integrale* per fare riferimento a due diversi concetti, legati fra loro, detti più precisamente *integrale indefinito* e *integrale definito*. Consideriamo per primo l'integrale indefinito. Premettiamo la nozione di *primitiva* di una funzione:

Definizione (primitiva). Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, si dice *primitiva* di f una qualunque funzione $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ che sia derivabile in tutto l'intervallo (a,b) e tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in (a,b).$$

Esempio 26. Una primitiva della funzione $f(x) = e^x$ sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ è la funzione $F(x) = e^x$.

Definizione (integrale indefinito). Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, si chiama *integrale indefinito* di f l'insieme di tutte le primitive di f.

È notevole il fatto che l'integrale indefinito di una data funzione su di un dato intervallo si possa rappresentare a partire da una qualunque particolare primitiva:

Teorema 7. *Supponiamo che F sia una particolare primitiva di una funzione data f su di un intervallo (a,b). Allora qualunque primitiva G di f su (a,b) si può scrivere nella forma $G(x) = F(x) + C$, a patto di scegliere opportunamente la costante $C \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Si applica a $G - F$ il ragionamento fatto nella dimostrazione del lemma 1 a pagina 61. □

La circostanza espressa dal teorema precedente si esprime con la notazione

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Esempio 27. Utilizzando l'esempio 26 ed il teorema 7 si conclude che

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Osservazione. Per la validità del teorema 7, è di decisiva importanza il fatto che le funzioni considerate abbiano per dominio *un solo intervallo*. Quando il dominio di f è l'unione di due o più intervalli disgiunti, il teorema non è applicabile, come mostra il seguente esempio.

Esempio 28. La funzione

$$F(x) = \begin{cases} \log x, & \text{se } x > 0, \\ \log(-x), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

è una primitiva di $1/x$ sia sull'intervallo $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$. Si dice, brevemente, che "è una primitiva di $1/x$" senza far riferimento al dominio, né al fatto che il dominio *non è un intervallo*. Ma allora, anche la funzione $F(x) + C$ è una primitiva di $1/x$, qualunque sia $C \in \mathbb{R}$. Ma è una primitiva anche

$$G(x) = \begin{cases} \log x + C_1, & \text{se } x > 0, \\ \log(-x) + C_2, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

per qualunque valore di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Inoltre, quando $C_1 \neq C_2$, la funzione $G(x)$ differisce da $F(x) + C$ qualunque sia $C \in \mathbb{R}$. Infatti, si ha:

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} C_1, & \text{se } x > 0, \\ C_2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dunque, la notazione $F(x)+C$ *non rappresenta* l'insieme di tutte le primitive di $1/x$ sull'insieme $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Se, invece, consideriamo separatamente gli intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$, allora vale il teorema 7, e possiamo scrivere:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C \quad \text{per } x>0,$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x) + C \quad \text{per } x<0.$$

Osservazione. Visto che il teorema 7 ed il lemma 1 non sono applicabili quando il dominio della funzione f (rispettivamente, della funzione $\boldsymbol{x}$) non è un intervallo, può essere interessante chiedersi quale passaggio della dimostrazione, svolta a partire dalla pagina 61, richiede che $\boldsymbol{x}$ abbia per dominio un intervallo: è il passaggio che fa appello al teorema di Lagrange, il quale a sua volta fa proprio questa ipotesi.

Esempio 29. Usando le informazioni fin qui raccolte, ed usando la lettera n per denotare un generico numero intero, e α per un generico numero reale, possiamo scrivere:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}+C, \quad \text{per } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ e } x\in\mathbb{R},$$
$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C, \quad \text{per } x\in\mathbb{R},$$
$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}+C, \quad \text{per } n\in\mathbb{Z}^+ \text{ e } x\in\mathbb{R},$$
$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C, \quad \text{per } x\in\mathbb{R},$$
$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C, \quad \text{per } x\in\mathbb{R},$$
$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}+C, & \text{per } \alpha\neq-1,\ x>0,\\ \log x + C, & \text{per } \alpha=-1,\ x>0.\end{cases}$$

Regola di integrazione per sostituzione. Consideriamo due funzioni $F, f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ tali che $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in(a,b)$. Consideriamo inoltre una funzione $x=\varphi(t)$ (una *sostituzione*) avente per dominio un intervallo (t_1,t_2) e tale che $\varphi(t)\in(a,b)$ per ogni $t\in(t_1,t_2)$. Si possono allora considerare le funzioni composte $F(\varphi(t))$ e $f(\varphi(t))$, come faremo tra poco. Gli intervalli (a,b) e (t_1,t_2) possono anche essere illimitati. Se la funzione $\varphi(t)$ è derivabile, allora per la regola di derivazione della funzione composta possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

da cui si deduce che: 1) la funzione $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ (il secondo membro) possiede primitive, e una di esse è $F(\varphi(t))$; 2) la differenza tra la funzione composta $F(\varphi(t))$ ed una qualunque primitiva $G(t)$ della funzione $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ è costante. Ciò segue dal Lemma 1 di pag. 61 perché la differenza $F(\varphi(t))-G(t)$ ha la derivata identicamente nulla. Esiste dunque una costante C tale che

$$F(\varphi(t)) = G(t) + C \text{ per } t\in(t_1,t_2). \tag{61}$$

Questa proprietà si scrive di solito nel seguente modo:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{62}$$

Quest'ultima uguaglianza, detta *regola di integrazione per sostituzione*, esprime un legame fra due integrali nei quali *le variabili di integrazione sono diverse*: infatti, la variabile di integrazione è x al primo membro, e t al secondo. La (62) si ricorda facilmente perché essendo $x=\varphi(t)$ risulta $dx=\varphi'(t)\,dt$.

Esempio 30. Consideriamo l'integrale $\int \operatorname{sen} ax\,dx$, con $a\neq0$, sull'intervallo $(-\infty,+\infty)$. Effettuiamo la sostituzione $x=t/a$, con $t\in(-\infty,+\infty)$. La formula (62) diventa

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = \int (\operatorname{sen} t)\,\frac{1}{a}\,dt.$$

Il secondo membro è un integrale immediato, ed una primitiva della funzione integranda è $G(t) = -\frac{1}{a}\cos t$. La (61) dice che qualunque primitiva $F(x)$ di $\operatorname{sen} ax$ soddisfa l'uguaglianza $F(t/a) = -\frac{1}{a}\cos t + C$ per un'opportuna $C \in \mathbb{R}$. Si noti che la variabile indipendente ora è t.

Spesso, come in questo caso, si può ricavare esplicitamente $F(x)$, ma per fare ciò si utilizza una proprietà di $\varphi(t)$ che non è necessaria per la validità di (61) e (62), e non è stata richiesta finora: l'*invertibilità* di $\varphi(t)$. Poiché la funzione $x = t/a$ è invertibile, e la sua inversa è $t = ax$, arriviamo alla conclusione che qualunque primitiva $F(x)$ di $\operatorname{sen} ax$ soddisfa l'uguaglianza $F(x) = -\frac{1}{a}\cos ax + C$, per un'opportuna $C \in \mathbb{R}$, cioè in altri termini

$$\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

Questo risultato, per la verità, si trova immediatamente, ma può essere utile studiare il procedimento appena descritto per imparare la regola di integrazione per sostituzione.

Esempio 31. Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx$$

per $x \in (0, +\infty)$. Applicando la (62) con $x = e^t$ si trova

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \int t\, dt.$$

Il secondo membro dell'uguaglianza sovrastante è un integrale immediato: $\int t\, dt = t^2/2 + C$. Per la (61), ogni primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = (\log x)/x$ è tale che $F(e^t) = t^2/2 + C$. Poiché x varia in $(0, +\infty)$, la sostituzione $x = e^t$ è invertibile e la sua inversa è $t = \log x$, quindi possiamo scrivere esplicitamente $F(x) = (\log^2 x)/2 + C$, e cioè

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\log^2 x + C.$$

Questo risultato si può ottenere per altra via osservando che la funzione integranda $f(x)$ è del tipo $g(x)\, g'(x)$, dove $g(x) = \log x$, e perciò una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = g^2(x)/2$.

Osservazione. Se f non ammette primitiva, può accadere che il secondo membro della (62) abbia significato, mentre il primo membro non ne ha. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

non ammette primitiva sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$ (ciò segue dal teorema di Lagrange). Dunque, il primo membro della (62) non rappresenta nessuna funzione, a meno di non dare un senso diverso e più debole ai termini *derivata* e *primitiva*, il che esula dai limiti di questo corso. Invece, ponendo $x(t) = t^3$, il secondo membro della (62) diventa $\int f(t^3)\, 3t^2\, dt$, che si può riscrivere come $\int 3\,|t|\, t\, dt$. Quest'ultimo integrale ha senso: infatti si verifica che

$$\int 3\,|t|\, t\, dt = |t|^3 + C.$$

Integrale definito

Premesse. Sono attualmente in uso diverse definizioni dell'integrale definito, che *non sono equivalenti* fra loro.

Ad esempio, nella ricerca matematica si utilizza spesso una definizione dovuta ad Henri Lebesgue, che risale a circa un secolo fa.

Invece, nei testi universitari di Analisi 1 dei corsi di laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica, si utilizza di solito la definizione dovuta a Bernhard Riemann, che risale all'Ottocento. La definizione di Riemann è più semplice (forse) di quella di Lebesgue, e si rivela sufficiente in molte applicazioni.

In questa sede si riporta una definizione ancora più semplice di quella di Riemann, riferita a funzioni continue su di un intervallo chiuso e limitato.

Definizione (integrale definito). Consideriamo una funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Per un generico intero positivo n, e per ogni intero $k \in [0,n]$, poniamo $x_k = a + k\,(b-a)/n$. Il fatto che f sia continua su di un intervallo chiuso e limitato fa sì che i seguenti limiti esistano, siano finiti, e siano uguali fra loro:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \max_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x) \tag{63}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \min_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x). \tag{64}$$

Il comune valore dei due limiti suddetti si chiama *integrale* da a a b di $f(x)$ in dx, e si indica con l'espressione $\int_a^b f(x)\,dx$.

Equivalentemente, si può definire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\, f(\xi_k), \tag{65}$$

dove ciascun ξ_k è scelto arbitrariamente nell'intervallo $[x_{k-1},\, x_k]$.

L'esistenza dei limiti (63), (64) e (65) discende dalla continuità di f attraverso un ragionamento che faceva parte del programma di Analisi Matematica I in passato, e la cui omissione semplifica il corso. Gli studenti interessati ad approfondire l'argomento possono consultare i testi universitari che lo trattano, e/o rivolgersi al docente.

È facile dimostrare in questa sede che, ammesso che i limiti (63) e (64) esistano e siano uguali fra loro, allora anche il limite (65) esiste ed ha lo stesso valore degli altri due. Ciò è una conseguenza immediata della disuguaglianza $\min_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x) \le f(\xi_k) \le \max_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x)$ e del *teorema del confronto* dei limiti.

Interpretazione geometrica. Se $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esprime l'area del *sotto*grafico di f. Se, invece, $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a,b]$ allora $-\int_a^b f(x)\,dx$ esprime l'area del *sopra*grafico di f.

Osservazione. Non è corretto, dal punto di vista moderno, definire $\int_a^b f(x)\,dx$ come l'area del sottografico di f. Questo perché, dal punto di vista moderno, il concetto di area *non è considerato un concetto primitivo.* Oggi la nozione di area viene definita proprio a partire dall'integrale definito, o meglio, da una parte della matematica detta *teoria della misura.* Vi sono numerose altre interpretazioni ed applicazioni dell'integrale definito. Vediamone alcune.

Esempio 32. Se la funzione continua $\lambda(x)$ rappresenta la densità lineare di massa di un'asta collocata lungo l'asse x, ed avente il primo estremo per $x = a$, ed il secondo estremo in $x = b$, allora $\int_a^b \lambda(x)\,dx$ esprime la massa dell'asta.

Esempio 33. L'errore commesso nella misura di una grandezza scalare viene spesso rappresentato mediante la nozione matematica di *variabile aleatoria avente distribuzione normale*. In tal caso, la probabilità che l'errore si trovi fra due valori a e b è data da $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2}\,dx$, dove σ è un parametro positivo detto *deviazione standard*, legato all'incertezza della misura.

Esempio 34. Consideriamo un punto in moto lungo l'asse x secondo la legge oraria $x = x(t)$, e supponiamo che la funzione $x(t)$ sia dotata di derivata continua $v(t) = x'(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$. Allora la posizione $x(t)$ del punto nel generico istante $t \in [t_0, t_1]$ è data da $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(x)dx$.

Questo elenco di esempi non si propone di essere completo, ma intende dare un'idea della varietà delle applicazioni dell'integrale.

Additività dell'integrale. Un'importante proprietà dell'integrale definito è la cosiddetta *additività:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx. \tag{66}$$

Gli studenti interessati a conoscere la dimostrazione dell'uguaglianza precedente possono consultare i testi esistenti e/o rivolgersi al docente.

Definizione. Si definisce l'integrale definito anche quando gli estremi di integrazione sono uguali fra loro: in tal caso, si pone

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{67}$$

Definizione. Si definisce l'integrale definito anche quando il primo estremo di integrazione è *maggiore* del secondo: se a, b sono due numeri reali con $a < b$, si pone

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{68}$$

Osservazione. La definizione (68) è una scelta obbligata se si vuole far valere la (66) per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, e rispettare la (67). Infatti dalla (66) e dalla (67) segue che

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

da cui la (68).

Teorema 8. (Teorema della media integrale). *Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, esiste un $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

Il valore di $f(\xi)$ si dice media integrale di f su $[a,b]$.

Il teorema della media integrale è una conseguenza della *continuità* della funzione integranda. Gli studenti interessati possono cercare di intuirne la dimostrazione, ovvero consultare i testi esistenti o rivolgersi al docente.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. integr. indef. 1

Esercizi

1) Disegnare il grafico della funzione a gradino di Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2) Disegnare il grafico della funzione $y = H(-x)$.

3) Posto $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, chiamiamo *primitiva* della funzione $y = 1/x$ una qualunque funzione $F \colon \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = 1/x$ per ogni $x \in \mathbb{R}_0$. Verificare che per ogni $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la funzione

$$F(x) = \log|x| + C_1\, H(x) + C_2\, H(-x) \tag{69}$$

è una primitiva di $1/x$.

4) Trovare tutte le primitive della funzione $y = (\cos x)^{-2}$ sull'intervallo $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

5) Trovare tutte le primitive della funzione $y = |x|$ sull'intervallo $(-\infty,\ +\infty)$.

6) Indicato con μ un generico numero reale, e con σ un generico numero reale positivo, determinare il più grande intervallo (a, b) nel quale sia concava la funzione

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

7) Supponiamo che una funzione $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *non sia convessa*. Facendo riferimento alla definizione della convessità di una funzione, dimostrare che esistono tre punti $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ tali che $x_1 < x_3 < x_2$ e

$$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Suggerimento: porre $x_3 = t\, x_1 + (1 - t)\, x_2$ per opportuni x_1, x_2 e t.

8) Consideriamo una generica funzione $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, dotata di derivata seconda non negativa in ogni $x \in (a, b)$. Dimostrare che f è convessa. Suggerimento: se per assurdo f non fosse convessa, allora per il teorema di Lagrange, e per l'esercizio precedente, esisterebbero due punti ξ_1, ξ_2 tali che $\xi_1 < \xi_2$ e $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$.

9) Dimostrare che non vi sono altre primitive di $1/x$ all'infuori di quelle della forma (69).

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. integr. indef. 2

Esercizi

1) Calcolare l'area dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio r.

2) Calcolare l'area dell'esagono regolare circoscritto al cerchio di raggio r.

3) Dimostrare che $2{,}5 < \pi < 3{,}6$.

4) Indicato con g un generico numero reale, trovare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f''(x) = g$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5) Trovare tutte le primitive della funzione $y = x^2 \operatorname{sen} x$ sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Suggerimento: applicare due volte la regola di integrazione per parti.

6) Trovare tutte le primitive della funzione $y = \cos^2 x$ sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Suggerimento: osservare che

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \, (\operatorname{sen} x)' \, dx$$

ed usare la prima identità fondamentale della goniometria.

7) Indicati con a e b due generici numeri reali, con $b \neq 0$, trovare tutte le primitive della funzione $1/(a + bx)$ sull'intervallo $(-a/b, +\infty)$. Suggerimento: effettuare la sostituzione $a + bx = t$.

8) Trovare tutte le primitive della funzione $y = \sqrt{1 - x^2}$ sull'intervallo $(-1, 1)$. Suggerimento: effettuare la sostituzione $x = \operatorname{sen} \alpha$, con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

9) Consideriamo due funzioni f e g, continue in un intervallo $[a, b]$, e derivabili in (a, b). Supponiamo che $f(a) = g(a) = 0$, e che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Supponiamo, inoltre, che esista (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{70}$$

che indicheremo con L. Dimostrare che

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(regola di de l'Hôpital). Suggerimento: applicare il teorema di Cauchy sull'intervallo $[a, x]$.

10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\log(1 + x)}.$$

11) Supponiamo che il limite (70) non esista, e che tutte le altre ipotesi dell'esercizio 9 siano soddisfatte. Possiamo affermare che anche il limite di $f(x)/g(x)$ per $x \to a^+$ non esiste? Suggerimento: considerare l'esercizio precedente.

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. integr. def.

Esercizi

1) Consideriamo una generica funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Per ogni intero positivo n, ed ogni intero $k \in [0,n]$, poniamo $x_k = a + k\,(b-a)/n$, ed indichiamo con ξ_k un punto scelto arbitrariamente nell'intervallo $[x_{k-1},\, x_k]$. Verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), \qquad (71)$$

e che pertanto l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ si può definire come il valore del secondo dei due limiti (71).

2) Indicati con b e h due generici numeri reali positivi, disegnare il grafico della funzione $f(x) = h\,x/b$.

3) Calcolare i limiti (71) ponendo $a = 0$, f come nell'esercizio precedente, e ξ_k come nell'esercizio 1. Suggerimento: sfruttare la disuguaglianza

$$\min_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x) \le f(\xi_k) \le \max_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x)$$

ed il teorema del confronto dei limiti.

4) Dare un'interpretazione geometrica dei limiti calcolati nell'esercizio precedente.

5) Utilizzando la definizione dell'integrale definito di una funzione continua, dimostrare che se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, e c un numero reale, allora $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

6) Utilizzando la definizione dell'integrale definito di una funzione continua, dimostrare che se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, allora $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

7) Indichiamo con $C^0([a,b])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue aventi per dominio l'intervallo $[a,b]$, ed a valori reali. Consideriamo la funzione $I\colon C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ definita ponendo $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Dimostrare che I è un'applicazione lineare.

8) Utilizzando la definizione dell'integrale definito di una funzione continua, dimostrare che se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, e se $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

9) Utilizzando la definizione dell'integrale definito di una funzione continua, dimostrare che se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Suggerimento: osservare che $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ per ogni $x \in [a,b]$, e sfruttare l'esercizio precedente.

Teorema fond.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale lega fra loro l'integrale indefinito e l'integrale definito. I testi in circolazione ne propongono diversi enunciati: quello che segue è ispirato a [BPS].

Teorema 9. (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su* $[a,b]$, *e sia* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua su* $[a,b]$ *tale che* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in (a,b)$. *Allora:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{72}$$

Dimostrazione. Procediamo come in [BPS]. Indicato con n un generico intero positivo, consideriamo i punti $x_k = a + k\,(b-a)/n$, con $k = 0, \ldots, n$. Constatiamo che vale la seguente uguaglianza:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})). \tag{73}$$

Applichiamo ora il teorema di Lagrange alla funzione F su ciascuno degli intervalli $[x_{k-1},\, x_k]$, per $k = 1, \ldots, n$. Poiché, per ipotesi, si ha $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a,b)$, dall'uguaglianza (73) segue che

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\, f(\xi_k), \tag{74}$$

dove ξ_k è il punto dell'intervallo $[x_{k-1},\, x_k]$ la cui esistenza è asserita dal teorema di Lagrange.

Poiché le espressioni al primo ed al secondo membro della (74) sono uguali per ogni n, devono essere uguali anche i loro limiti per $n \to +\infty$, se esistono. Il limite del primo membro è $F(b) - F(a)$, perché questa espressione non dipende da n. Il limite del secondo membro è $\int_a^b f(x)\,dx$, per la definizione dell'integrale definito. Dunque vale la (72), come volevasi dimostrare. $\square$

Applicazione. Il teorema consente di calcolare agevolmente alcuni integrali. Ad esempio, poiché una primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{1}{3}\,x^3$, si trova che $\int_{-b}^b x^2\,dx = 2\,b^3/3$. Se ora b denota un numero reale positivo, ne segue, usando l'interpretazione geometrica dell'integrale definito, che l'area della figura piana T delimitata dal grafico della funzione f e dalla retta di equazione $y = b^2$ è $|T| = 2\,b^3 - \int_{-b}^b x^2\,dx = 4\,b^3/3$. In particolare, indicato con R il rettangolo di base $2b$ ed altezza b^2, si ha $|R| = 2\,b^3$ e perciò il rapporto fra l'area di T e quella di R è

$$\frac{|T|}{|R|} = \frac{2}{3}.$$

Questo risultato, che non dipende dal valore del parametro b, è stato trovato con un altro metodo da Archimede di Siracusa.

Osservazione. Il teorema fondamentale del calcolo integrale non è la soluzione di tutti i problemi di integrazione. Infatti, ad esempio, le primitive della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ esistono ma non sono elementari. Dunque, il calcolo dell'integrale

$$\int_a^b e^{-x^2}\,dx \tag{75}$$

non riesce agevolmente con il metodo descritto sopra. Per avere un idea del tipo di difficoltà, si pensi ad una persona che conosce le funzioni razionali (rapporto di due polinomi) ma non la funzione logaritmica. Volendo calcolare, con quel metodo, l'integrale $\int_a^b 1/x\,dx$ per $a, b > 0$, si troverebbe in difficoltà.

Questo esempio può sembrare bizzarro ma descrive proprio il tipo di difficoltà che nascono con l'integrale (75) quando si vuole sfruttare il teorema fondamentale del calcolo integrale. Esistono, peraltro, diversi metodi per il calcolo numerico dell'integrale (75), e vengono descritti nei corsi di Analisi numerica.

Regola di integrazione per sostituzione. Consideriamo una funzione $f(x)$ continua su di un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, ed una sua primitiva $F(x)$. Consideriamo inoltre una funzione $x = \varphi(t)$ (una *sostituzione*) avente per dominio un intervallo $[c, d]$ e tale che $\varphi(t) \in [a, b]$ per ogni $t \in [c, d]$.

Si possono allora considerare le funzioni composte $F(\varphi(t))$ e $f(\varphi(t))$, come abbiamo fatto nello studio della regola di integrazione per sostituzione per l'integrale indefinito (pag. 70). Supponiamo, come allora, che la funzione $\varphi(t)$ sia derivabile, e supponiamo inoltre che la derivata $\varphi'(t)$ sia continua, cosicché l'integrabilità della funzione $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ è garantita.

Indicata con $G(t)$ una qualunque primitiva della funzione $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, per la (61) possiamo scrivere $F(\varphi(t)) = G(t) + C$. Questa formula, se esistono due punti $t_1, t_2 \in [c, d]$ tali che $a = \varphi(t_1)$ e $b = \varphi(t_2)$, ci permette di scrivere $F(b) - F(a) = G(t_1) - G(t_2)$ e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Int. generalizzati

Può essere utile estendere la definizione dell'integrale definito anche ai seguenti due casi:

1) l'intervallo di integrazione è illimitato;

2) l'intervallo di integrazione è limitato, ma la funzione integranda tende all'infinito vicino ad uno dei due estremi.

Esempio 35. Caduta con attrito. Consideriamo il moto di un corpo puntiforme che cade verticalmente in un campo gravitazionale uniforme, sotto l'azione della forza di gravità e dell'attrito dell'aria. È noto dalla Fisica che, se la velocità del corpo all'istante $t = 0$ è nulla, allora l'accelerazione $a(t)$ del corpo è data da $a(t) = g\,e^{-ct}$, dove g è l'accelerazione di gravità e c un'opportuna costante positiva. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la velocità $v(t)$ può essere espressa come segue:

$$v(t) = \int_0^t g\,e^{-ct}\,dt.$$

Ancora il teorema fondamentale consente di scrivere $v(t) = g\,(1 - e^{-ct})/c$, e da ciò si deduce che

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{g}{c}.$$

Osservazione. In pratica non è possibile attendere che la variabile temporale tenda all'infinito. Tuttavia, trascorso un intervallo di tempo che è effettivamente possibile attendere, il valore di $v(t)$ diventa indistinguibile, per gli strumenti di misura, dal suo limite g/c. Per esempio, se $g = 9{,}81$ m/s^2 e $c = 1$ s^{-1}, si trova $v(15) = 9{,}809997$ m/s e $g/c = 9{,}81$ m/s.

L'esempio 35 mostra un caso in cui può avere interesse il limite di un integrale al tendere all'infinito del suo secondo estremo. In generale, l'*integrale generalizzato* si definisce come segue.

Definizione. (Integrale generalizzato) Sia f una funzione continua sull'intervallo $[\,a,\,+\infty)$ ed a valori reali. Se esiste il limite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

allora si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esempio 36. Un integrale generalizzato. In base alla definizione precedente, ed ai calcoli svolti nell'esempio 35, possiamo scrivere:

$$\int_0^{+\infty} g\,e^{-ct}\,dt = \frac{g}{c}.$$

Similmente, si può considerare il limite di un integrale al tendere del suo primo estremo a $-\infty$. Ciò conduce alla seguente definizione.

Definizione. (Integrale generalizzato) Sia f una funzione continua sull'intervallo $(-\infty, b\,]$ ed a valori reali. Se esiste il limite

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

allora si pone:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se, invece, l'intervallo di integrazione è limitato, ma la funzione integranda tende all'infinito vicino ad uno degli estremi, allora si danno le seguenti definizioni.

Definizione. (Integrale generalizzato) Sia f una funzione continua sull'intervallo $(a, b\,]$ ed a valori reali. Se esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

allora si pone:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Definizione. (Integrale generalizzato) Sia f una funzione continua sull'intervallo $[a, b)$ ed a valori reali. Se esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

allora si pone:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Esempio 37. Integrale generalizzato di $\mathbf{1/x}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\log\varepsilon) = +\infty.$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Eserc. int. generalizz.

Esercizi

1) Indicato con α un generico numero reale positivo, calcolare i seguenti integrali generalizzati: $\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$, $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$.

2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \log x\,dx$. Suggerimento: osservare che $\int \log x\,dx = \int x' \log x\,dx$ ed applicare la regola di integrazione per parti.

3) Verificare che la funzione $y = e^x$ è convessa (studiando la derivata seconda). Dedurne che $1+x \le e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4) Consideriamo due generiche funzioni $f, g\colon [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dotate di derivate continue in $[\,a, +\infty)$. Supponendo che $f(a) \le g(a)$, e che $f'(x) \le g'(x)$ per ogni $x \ge a$, verificare che $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \ge a$. Suggerimento: usare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

5) Posto $a = 0$, $f(x) = 1 + x$, $g(x) = e^x$, ed usando il risultato dell'esercizio precedente, dedurre nuovamente che $1 + x \le e^x$ per ogni $x \ge 0$.

6) Procedendo in modo analogo all'esercizio precedente, verificare che $1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 \le e^x$ per ogni $x \ge 0$.

7) Giustificare la disuguaglianza $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \le e^x$
per ogni $x \ge 0$ ed ogni n intero positivo.

8) Indicato con α un generico numero reale positivo, e con $[\alpha]$ la parte intera di α, osservare che $\displaystyle\frac{x^{[\alpha]+1}}{([\alpha]+1)!} \le \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \frac{x^k}{k!}$ per ogni $x \ge 0$. Usare questa osservazione per calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \frac{x^k}{k!}$.

9) Indicato con α un generico numero reale positivo, calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}. \tag{76}$$
Suggerimento: porre $n = [\alpha] + 1$ ed usare i risultati dei due esercizi precedenti.

10) Usando la (76), calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\, e^{-x}$.

11) Indicato con β un generico numero reale positivo, calcolare il limite
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y^\beta}. \tag{77}$$
Suggerim.: porre $\alpha = 1/\beta$, $x = \log y$ ed usare la (76).

12) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{z\to0^+} z^\beta \log z$.
Suggerimento: porre $y = 1/z$ nella (77).

13) Calcolare l'integrale generalizzato $\int_0^1 \log x\,dx$.

14) Indicata con f una generica funzione continua su di un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, dimostrare che $\int_a^b f(x)\,dx = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Suggerimento: usare l'additività dell'integrale e la disuguaglianza
$$\min_{[a,b]} f \le f(x) \le \max_{[a,b]} f.$$

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Appendice

Circ. osculatrice

Per soddisfare la curiosità di alcuni studenti, determiniamo la *circonferenza osculatrice* al grafico di una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in un certo punto $x_0 \in (a,b)$, supponendo che la derivata seconda f'' (esista e) sia continua e positiva in (a,b).

Consideriamo tre punti $x_1 < x_2 < x_3 \in (a,b)$. Poiché $f'' > 0$ in (a,b), i punti corrispondenti sul grafico non sono allineati, e perciò esiste una (ed una sola) circonferenza che vi passa attraverso. Ci proponiamo di determinare le coordinate (x_C, y_C) del centro C di tale circonferenza. A tal fine, considerati i segmenti i cui estremi sono, rispettivamente, i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, ed i punti $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$, mettiamo a sistema le equazioni degli assi di tali segmenti, che sono:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m_1}\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{y_1+y_2}{2} \\ y = -\frac{1}{m_2}\left(x - \frac{x_2+x_3}{2}\right) + \frac{y_2+y_3}{2} \end{cases}$$

dove $m_1 = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$ e $m_2 = (f(x_3) - f(x_2))/(x_3 - x_2)$. Nel far questo supponiamo, per il momento, che $m_1, m_2 \neq 0$. La soluzione del suddetto sistema è:

$$\begin{cases} x_C = \frac{m_1\, m_2}{2}\, \frac{y_3-y_1}{m_1-m_2} + \frac{m_1}{2}\, \frac{x_3-x_1}{m_1-m_2} + \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_C = -\frac{m_2}{2}\, \frac{y_3-y_1}{m_1-m_2} - \frac{1}{2}\, \frac{x_3-x_1}{m_1-m_2} + \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

Si verifica direttamente che le formule così trovate continuano a valere anche nel caso in cui $m_1 = 0$ e/o $m_2 = 0$.

Il centro della *circonferenza osculatrice* è il punto limite di (x_C, y_C) quando $x_1, x_2, x_3 \to x_0$. Per determinarlo, è sufficiente trovare il limite del rapporto $(m_1 - m_2)/(x_3 - x_1)$. A tal fine, usiamo due volte la formula di Taylor con il resto di Lagrange:

$$\begin{cases} f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)\,(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)\,(x_2 - x_1)^2 \\ f(x_2) = f(x_3) - f'(x_3)\,(x_3 - x_2) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)\,(x_3 - x_2)^2 \end{cases}$$

dove $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ e $\xi_2 \in (x_2, x_3)$. Sfruttando tali formule, troviamo:

$$\frac{m_1 - m_2}{x_3 - x_1} = -f''(\xi) + \tfrac{1}{2}\,[\lambda\, f''(\xi_1) + (1-\lambda)\, f''(\xi_2)]$$

dove $\xi \in (x_1, x_3)$ e $\lambda = (x_2 - x_1)/(x_3 - x_1)$. Poiché $\lambda \in (0,1)$, l'espressione $\lambda\, f''(\xi_1) + (1-\lambda)\, f''(\xi_2)$ è una *combinazione convessa* tra $f''(\xi_1)$ e $f''(\xi_2)$, e perciò il suo valore non supera il massimo tra questi ultimi due, né va al di sotto del minimo dei due. Sfruttando la continuità di f'', troviamo infine:

$$x_C \to x_0 - \tfrac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\, f'(x_0), \qquad y_C \to y_0 + \tfrac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Per concludere, troviamo il raggio r della circonferenza osculatrice, detto *raggio di curvatura* del grafico di f nel punto x_0. Poiché $r^2 = (x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2$, si ha $r = (1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}/f''(x_0)$. Si definisce *curvatura* del grafico di f nel punto x_0 la quantità κ definita come segue:

$$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}}.$$

La curvatura è ben definita anche quando $f''(x_0) = 0$ (e in tal caso è nulla).

Alfabeto greco

α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
ϑ	Θ	teta
ι	I	iota
κ	K	cappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi
ν	N	ni
ξ	Ξ	csi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	ro
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
φ	Φ	fi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Analisi Matematica I
prof. Antonio Greco
Appendice

Domande orali

Riporto qui di seguito una selezione delle domande rivolte agli studenti di Analisi Matematica I, in sede di esame, nel periodo dal 13 giugno 2006 al 31 maggio 2010.

Successioni e serie numeriche

1) Dare la definizione del numero di Nepero.

2) Scrivere la formula di Newton per lo sviluppo della potenza ennesima del binomio.

3) Determinare tre numeri reali a, b, c tali che $(1+x)^{100} = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$.

4) Illustrare la nozione di serie numerica.

5) Spiegare che cosa si intende per *carattere* di una serie.

6) Dare una motivazione per lo studio delle serie.

7) Spiegare che cos'è la serie armonica, e determinarne la somma.

8) Indicato con la lettera e il numero di Nepero, stabilire se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}$ è convergente, ed in caso affermativo determinarne la somma.

9) Stabilire se la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$ è convergente, ed in caso affermativo determinarne la somma.

10) Studiare la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^k}$ con x parametro reale.

11) Stabilire se esiste un intero n tale che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \geq 1$, ed in caso affermativo determinarlo.

12) Determinare il carattere della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{10}\,k}$.

13) Determinare il carattere della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$.

14) Stabilire se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ è convergente, ed in caso affermativo determinarne la somma.

15) Stabilire se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ è convergente, ed in caso affermativo determinarne la somma.

16) Spiegare che cos'è il polinomio di Taylor associato ad una funzione data.

17) Spiegare come si può utilizzare la formula di Taylor per il calcolo numerico di una funzione trascendente.

18) Scrivere la serie di Maclaurin della funzione $f(x) = (1-x)^{-1}$.

19) Scrivere il polinomio di Maclaurin della funzione $y = \ln(1+x)$.

20) Trovare il polinomio di Maclaurin di primo grado associato alla funzione $y = \operatorname{sen} x$.

21) Trovare il polinomio di Maclaurin di secondo grado associato alla funzione $y = \cos x$.

22) Utilizzando il polinomio di Maclaurin di ordine 4 associato alla funzione $y = \operatorname{sen} x$, trovare la prima cifra decimale di $\operatorname{sen}(1/3)$.

Limiti di funzioni e continuità

23) Che cosa si intende quando si dice che il limite di $f(x)$, per x che tende a $+\infty$, è $+\infty$?

24) Calcolare il limite di $x - \operatorname{sen} x$ per x che tende a $+\infty$.

25) Calcolare il limite di $\operatorname{sen} x$ per x che tende a $+\infty$.

26) Calcolare il limite di $e^{\operatorname{sen} x}$ per x che tende a $+\infty$.

27) Definire il concetto di continuità di una funzione.

28) Trovare i punti di continuità della funzione $y = x - \operatorname{sen} x$.

Calcolo differenziale

29) Dare la definizione della derivata.

30) Stabilire se la funzione $y = \sqrt{2 - x^2}$ è derivabile nel punto $x_0 = -\sqrt{2}$.

31) Determinare due costanti a e b tali che risulti $e^x = a + bx + o(x)$ per $x \to 0$.

32) Dare la definizione di primitiva di una funzione data.

33) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

34) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

35) Fare un esempio di funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a) = f(b)$ e priva di massimi.

36) Caratterizzare i punti di massimo e di minimo di una funzione attraverso le sue derivate.

Studi di funzione

37) Definire la funzione logaritmica.

38) Determinare il periodo della funzione $y = \operatorname{sen} x$.

39) Determinare il periodo della funzione $y = \cos^2 x$ e tracciare il grafico di tale funzione.

40) Tracciare il grafico della funzione $y = |\cos x|$.

41) Studiare il grafico della funzione $y = |x|\, x$.

42) Studiare il grafico della funzione $y = 1 - |x - 2|$.

43) Studiare il grafico della funzione $y = x - \operatorname{sen} x$.

44) Studiare il grafico della funzione $y = x^3 - x$.

45) Studiare il grafico della funzione $y = x - x^3$.

46) Tracciare il graficodella funzione $f_1(x) = (1+x)^{100}$ e confrontarlo con quello della funzione $f_2(x) = (1+x)^2$.

47) Studiare il grafico della funzione $y = \sqrt{1 - x^2}$.

48) Studiare il grafico della funzione $y = \sqrt{2 + x^2}$.

49) Studiare il grafico della funzione $y = \sqrt{2 - x^2}$.

50) Studiare il grafico della funzione $y = \sqrt{4 - x^2}$.

51) Studiare il grafico della funzione $y = \sqrt{9 - x^2}$.

52) Studiare il grafico della funzione $y = x + 1/x$.

53) Studiare il grafico della funzione $y = x^{100}$ e confrontarlo con quello della funzione $y = x^2$.

54) Studiare il grafico della funzione $y = \ln(1 + x)$.

55) Studiare il grafico della funzione $y = x \ln x$.

56) Studiare il grafico della funzione $y = x \ln(x^2)$.

57) Studiare il grafico della funzione $y = (\ln x)/x$.

58) Studiare il grafico della funzione $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

59) Studiare il grafico della funzione $y = x\, e^x$.

Calcolo integrale

60) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

61) Calcolare l'integrale indefinito della funzione $y = \sqrt{1 - x^2}$.

62) Calcolare l'integrale indefinito della funzione $y = (\ln x)/x$.

63) Calcolare l'integrale indefinito della funzione $y = (\cos x)\, e^{\operatorname{sen} x}$.

64) Calcolare l'integrale indefinito della funzione $y = x - \operatorname{sen} x$.

65) Trovare una primitiva della funzione $y = \cos^2 x$.

66) Dare la definizione dell'integrale di Riemann.

67) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = x/(1+x^2)$ sull'intervallo $[-1,\, 1]$.

68) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = 2x/(1 + x^2)$ sull'intervallo $[-1,\, 1]$.

69) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = \sqrt{1 - x^2}$ sull'intervallo $[-1,\, 1]$.

70) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = \sqrt{9 - x^2}$ sull'intervallo $[-3,\, 3]$.

71) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = x - \operatorname{sen} x$ sull'intervallo $[0, \pi]$.

72) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = x - \operatorname{sen} x$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

73) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = x - \operatorname{sen} x$ sull'intervallo $[-b, b]$, dove b è un numero reale positivo.

74) Calcolare l'integrale definito della funzione $y = (x \ln x)^{-1}$ sull'intervallo $[2, 3]$.

75) Illustrare l'interpretazione geometrica dell'integrale definito.

76) Trovare l'area del sottografico della funzione $y = x^3 - x$ sull'intervallo $[-1, 0]$.

77) Trovare l'area della parte di piano delimitata dal grafico della funzione $y = x + 1/x$ e dalla retta $y = -3$.

78) Calcolare l'integrale generalizzato (detto anche integrale improprio) della funzione $y = x/(1 + x^2)$ sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Bibliografia

[1] **Testo adottato:**
M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini.
Analisi matematica - Dal calcolo all'analisi.
Apogeo Education - Maggioli Editore.

[2] **Esercizi:**
P. Marcellini, C. Sbordone.
Esercitazioni di matematica.
Volume 1, parte prima e parte seconda.
Zanichelli/Liguori.

Testi di consultazione:

[3] T. M. Apostol. Calcolo. Volume 1. Boringhieri.

[4] R. Courant. Differential and integral calculus. Volume 1. Interscience/Wiley.

[5] R. Courant, H. Robbins. Che cos' la matematica? Boringhieri.

[6] E. Giusti. Analisi matematica. Volume 1. Boringhieri.

[7] M. Kline. Storia del pensiero matematico. Einaudi.

[8] C. D. Pagani, S. Salsa. Analisi matematica. Volume 1. Zanichelli.

[9] W. Rudin. Principi di analisi matematica. McGraw-Hill.

Indice analitico