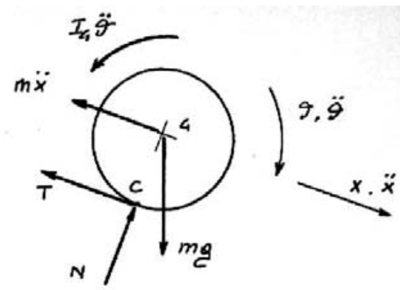
Un rullo cilindrico omogeneo viene lasciato libero di muoversi partendo da una condizione di quiete su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale.
Sono dati: $r = 0.2\ m$ (raggio del rullo); $m = 10\ kg$ (massa del rullo); $f_a = 0.3$ (coefficiente di aderenza); $f = 0.25$ (coefficiente di attrito).

Determinare, per $\alpha = 20°$ e $\alpha = 45°$:
1. accelerazione del baricentro G del rullo;
2. accelerazione angolare del rullo;
3. tempo impiegato dal rullo a percorrere un tratto di piano inclinato lungo *100 m* ed il numero di giri effettuato in tale periodo.

Il rullo viene lasciato libero ed inizia a muoversi con una accelerazione.

Il diagramma di corpo libero del rullo è disegnato in figura 1: l'equilibrio del rullo è espresso dalle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione ortogonale e parallela al piano ed alla rotazione:



$$
\begin{aligned}
&N - mg\cos\alpha = 0 \\
&mg\sin\alpha - m\ddot{x} - T = 0 \\
&mg\sin\alpha \cdot r - m\ddot{x}r - I_G\ddot{\vartheta} = 0
\end{aligned}
$$

essendo r il raggio del rullo e I_G il momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico del rullo ortogonale al piano (questo asse è anche uno degli assi principali d'inerzia del rullo) che vale:

$$I_G = m\frac{r^2}{2}$$

A priori non è dato sapere se il rullo nel suo moto in discesa sul piano rotoli uniamente o rotolando strisci anche. Si fa dunque un'ipotesi che andrapoi verificata: si ipotizza rotolamento senza strisciamento. In questo caso si può scrivere: $\ddot{x} = r\ddot{\vartheta}$

Il sistema di equazioni risulta:

$$
\begin{aligned}
&N - mg\cos\alpha = 0 \\
&mg\sin\alpha - m\ddot{x} - T = 0 \\
&mg\sin\alpha \cdot r - m\ddot{x}r - I_G\ddot{\vartheta} = 0 \\
&\ddot{x} = r\ddot{\vartheta}
\end{aligned}
$$

Risolvendo il sistema di equazioni unitamente alla condizione di rotolamento puro si ha che

$$\frac{T}{N} = \frac{\tan\alpha}{3}$$

ora si deve verificare la validità dell'ipotesi di rotolamento puro con la condizione di aderenza $T \le f_a N$ nei due casi di inclinazione del piano dati: α = *20°* e α = *45°*.

- Per α = *20°* vale $\frac{T}{N} = \frac{\tan\alpha}{3} = 0.12 < f_a$

dunque la condizione di aderenza è verificata e dal sistema di equazioni di equilibrio e di rotolamento puro si ha:

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\alpha = 2.24 \ \ {}^{m}/_{s^2}$$
$$\ddot{\vartheta} = \frac{\ddot{x}}{r} = 11.18 \ \ {}^{rad}/_{s^2}$$

le accelerazioni sono costanti, quindi le leggi di spostamento linerae ed angolare sono quelle di moto uniformemente accelerato:

$x = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$ e $\vartheta = \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}t^2$

Il tempo t* necessario affinché il rullo percorra uno spazio S è: $t^* = \sqrt{\frac{2s}{\ddot{x}}}$ = 9,46 s e la rotazione complessiva sarà: $\vartheta^* = \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}t^{*2}$ = 500 rad

- Per α = *45°* vale $\frac{T}{N} = \frac{\tan\alpha}{3} = 0.33 > f_a$

dunque la condizione di aderenza non è verificata e dal sistema di equazioni risolutivo deve essere eliminata l'equazione di rotolamento puro che sarà sostituita dal rapporto tra forza di attrito di strisciamento T e forza normale N tra rullo e piano, si ha:

Il sistema di equazioni risulta:

$$N - mg\cos\alpha = 0$$
$$mg\sin\alpha - m\ddot{x} - T = 0$$
$$mg\sin\alpha \cdot r - m\ddot{x}r - I_G\ddot{\vartheta} = 0$$
$$\cancel{\ddot{x} = r\ddot{\vartheta}}$$
$$T = fN$$

si ricava:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 5.20 \ \ {}^{m}/_{s^2}$$
$$\ddot{\vartheta} = \frac{2gf\cos\alpha}{r} = 17.34 \ \ {}^{rad}/_{s^2}$$

ed analogamente al caso precedente $t^* = \sqrt{\frac{2s}{\ddot{x}}}$ = 6,20s e $\vartheta^* = \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}t^{*2}$ = 333 rad