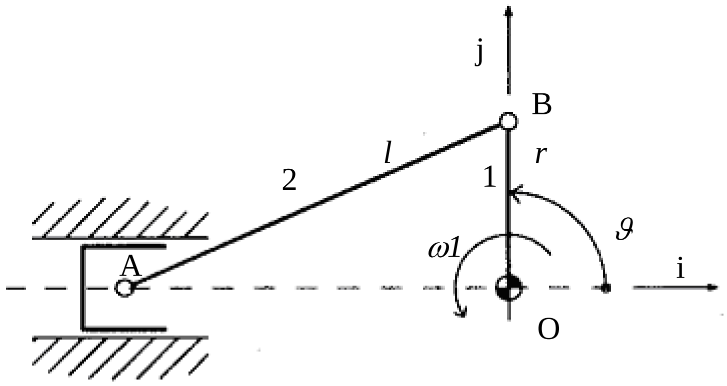
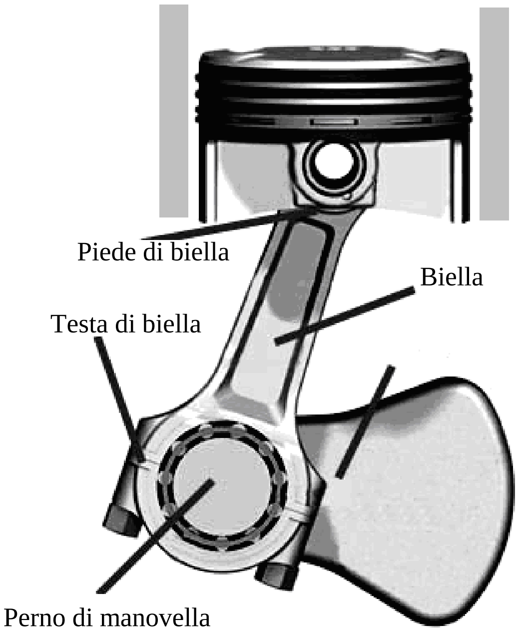




Siti interessanti sul meccanismo biella-manovella:
http://it.wikipedia.org/wiki/Meccanismo_biella-manovella
http://www.istitutopesenti.it/dipartimenti/meccanica/Meccanica/BIELLA.pdf
http://www.dimeg.unipd.it/didattica/67/Meccspinta_web.pdf

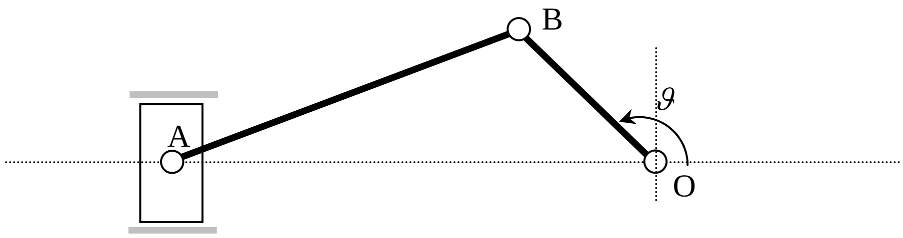
Nel meccanismo raffigurato la manovella *OB* ruota in senso antiorario alla velocità costante $\omega 1$. La manovella (1) ha un angolo θ rispetto all'orizzontale, come indicato in figura.

Dati:
$\omega 1$=100 rad/s velocità angolare della manovella (1);
$l = 250\ mm$ (lunghezza della biella 2);
$r = 100\ mm$ (lunghezza della manovella 1).

Determinare, negli istanti in cui $\vartheta = 135°$; $\vartheta = 90°$; $\vartheta = 180°$:

1. la velocità del punto B;
2. la velocità del punto A;
3. l'accelerazione del punto B;
4. l'accelerazione del punto A.

CASO per ϑ=135°



Calcolo delle velocità
Dal disegno dei vettori velocità del punto A s vede come la velocità
Considerando i punti O e B appartenenti al corpo rigido manovella, applicando a B la formula

fondamentale della cinematica ed osservando che O è fisso

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B/O} = \vec{v}_{B/O} \quad (\text{essendo}\, \vec{v}_O = 0)$$

$\boldsymbol{v_B}$ ha direzione perpendicolare a O , verso coerente con il verso di $\omega 1$ e modulo pari a $v_B = \omega_1 r = 10$ m/s, il vettore sarà espresso da $\vec{v}_B = -7.1\vec{i} - 7.1\vec{j}$

Considerando ora il corpo rigido biella ed i punti A e B, appartenenti al corpo rigido biella, si applica la formula fondamentale della cinematica (formula di Galileo). Nella tabella sotto si riportano i vettori velocità con le loro caratteristiche (modulo, direzione, verso) note ed incognite, indicando con ? quelle incognite da determinare:

velocità assoluta di B

velocità assoluta di A

velocità di A vista da un osservatore solidale a B

$\vec{v}_A$	$=$	$\vec{v}_B$	$+$	$\vec{v}_{A/B}$	
v_A ?		$\omega_1 r$		$\omega_2 l$?	M
$//\, AO$		$\perp OB$		$\perp AB$	D
?		$\swarrow$		?	V

La velocità di A osservata da B è la velocità di un punto animato da moto circolare poiché la distanza AB non cambia, essendo A e B appartenenti allo stesso corpo rigido biella.

L'equazione vettoriale è rappresentata dal grafo delle velocità in figura 1 da cui si determinano i versi di $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_{A/B}$ e se ne calcolano i moduli:

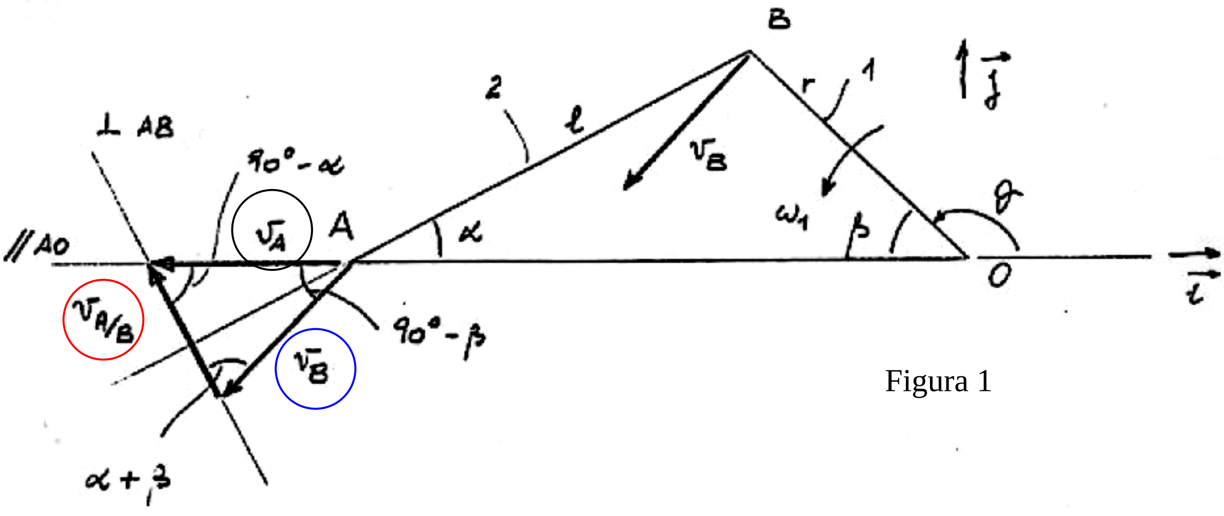


Figura 1

I vettori cerchiati in rosso sono incogniti, quelli in blu sono noti.

essendo ϑ=135°

$$\beta = 45^\circ$$

$$\frac{\sin\beta}{l} = \frac{\sin\alpha}{r} \Rightarrow \alpha = 16.43^\circ$$

con il teorema dei seni sul triangolo OBA

$$\frac{v_B}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{v_A}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{v_{A/B}}{\sin(90^\circ - \beta)} \Rightarrow \begin{cases} v_A = 9.16 \ m/s \\ v_{A/B} = 7.37 \ m/s \end{cases}$$

con il teorema dei seni sul triangolo delle velocità

Si calcola, infine:

$$\vec{v}_A = -9.16\vec{i} \ \ {}^{m}\!/_{s}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{A/B}}{l} = 29.48 \ \ {}^{rad}\!/_{s}$$

con verso orario di ω_2, dedotto dal verso di $v_{A/B}$ in figura 2.

Calcolo delle accelerazioni

Derivando l'espressione della velocità del punto B, si ha quella della accelerazione, espressa dal teorema di Rivals:

accelerazione assoluta di B

accelerazione assoluta di O

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \underbrace{\vec{a}_{B/O_n} + \vec{a}_{B/O_t}} = \vec{a}_{B/O_n}$$

componente normale della accelerazione di B osservata da O

componente tangenziale della accelerazione di B osservata da O

accelerazione di B osservata da O. Questa accelerazione è quella di un punto animato da moto circolare, poiché la distanza OB non cambia, essendo O e B appartenenti allo stesso corpo rigido manovella.

Si osservi che l'accelerazione $\vec{a}_O$ è nulla poiché O è fermo e l'accelerazione $a_{B/O_t} = \dot{\omega}_1 r = 0$ è nulla poiché la manovella ha accelerazione angolare nulla essendo ω_1 costante.

Dunque,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/O_n}$$

con direzione parallela a OB, verso da B verso O e modulo $\omega_1^{\,2} r = 1000 \ \ {}^{m}\!/_{s^2}$

Infine:

$$\vec{a}_B = 707\vec{i} - 707\vec{j} \ \ {}^{m}\!/_{s^2}$$

Analogamente, applicando il teorema di Rivals al punto A, con A e B appartenenti al corpo rigido biella:

accelerazione assoluta di A

accelerazione assoluta di B

componente tangenziale della accelerazione di B osservata da

componente normale della accelerazione di A osservata da B.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \underbrace{\vec{a}_{A/B\,t} + \vec{a}_{A/B\,n}}$$

$\vec{a}_A$	$\vec{a}_B$	$\vec{a}_{A/B\,t}$	$\vec{a}_{A/B\,n}$	
a_A ?	$\omega_1^2 r$	$\dot{\omega}_2 l$?	$\omega_2^2 l$	M
$// AO$	$// OB$	$\perp AB$	$// AB$	D
?	$B \rightarrow O$	?	$A \rightarrow B$	V

accelerazione di A osservata da B. Questa accelerazione è quella di un punto animato da moto circolare, poiché la distanza AB non cambia, essendo A e B appartenenti allo stesso corpo rigido manovella

In base alla informazioni nella tabella precedente, si costruisce il poligono dei vettori accelerazione, dalla costruzione si deducono i versi e i moduli dei vettori di cui si conoscono solo le direzioni, in base alla equazione vettoriale $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B\,t} + \vec{a}_{A/B\,n}$:

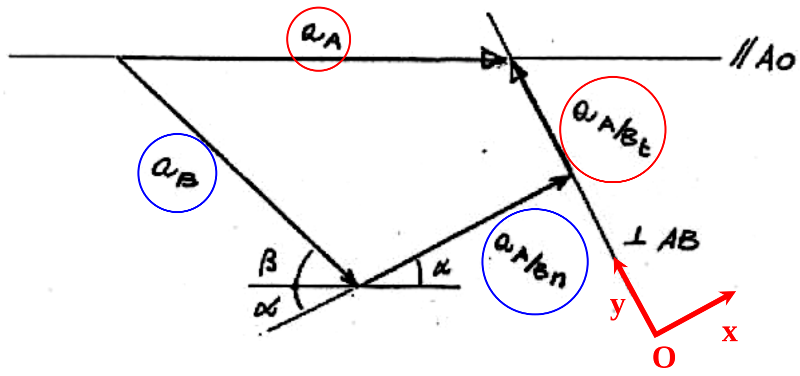


Figura 2

I vettori cerchiati in rosso sono incogniti, quelli in blu sono noti.
Per trovare I moduli dei vettori incogniti, si sceglie di proiettare i vettori stessi lungo il sistema di riferimento (**O,x,y**) che ha assi paralleli e ortogonali ad AB. In questo modo si esprimono le componenti dei vettori e si utilizza l'equazione vettoriale. Questa scelta di sistema di riferimento permette di scrivere equazioni di facile soluzione, disaccoppiando le incognite:

$$a_A \cos\alpha = a_B \cos(\alpha+\beta) + a_{A/B\,n}$$ proiettando lungo x (parallelamente ad AB)

$$a_B \sin(\alpha+\beta) = a_A \sin\alpha + a_{A/B\,t}$$ proiettando lungo y (ortogonalmente ad AB)

dalla prima equazione si ha

$$a_A = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\omega_1^2 r \cos(\alpha+\beta) + \omega_2^2 l\right] = 725.1 \ m/s^2$$

$$\vec{a}_A = 725.1\vec{i} \ m/s^2$$

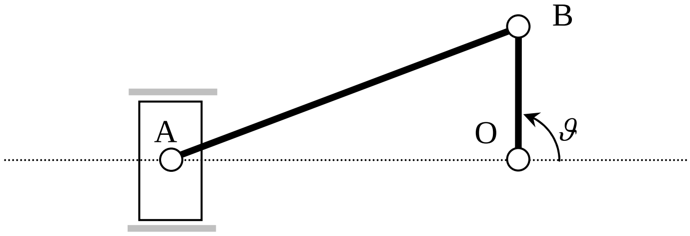
dalla seconda equazione si ha

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{l} a_{A/B\,t} = \frac{1}{l}\left[\omega_1^{\,2} r \sin(\alpha+\beta) - a_A \sin\alpha\right] = 2692.6 \ \mathrm{rad}/s^2$$

con verso orario dedotto dal verso di $\vec{a}_{A/B\,t}$ in figura 2.

Procedendo in modo analogo si risolvono i casi con $\vartheta = 90°$ e $\vartheta = 180°$.

CASO per $\vartheta = 90°$



Analogamente al caso precedente, applicando la formula di Galileo (formula fondamentale della cinematica, prima alla manovella tra i punti O e B e, poi, alla biella tra i punti A e B si può scrivere:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B/O} = \vec{v}_{B/O} = -\omega_1 r \vec{i} = -10\vec{i} \ \ m/s$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \vec{v}_A & = \vec{v}_B & + \vec{v}_{A/B} & \\ v_A\,? & \omega_1 r & \omega_2 l\ ? & M \\ //\,AO & \perp OB & \perp AB & D \\ ? & \leftarrow & ? & V \end{array}$$

La rappresentazione grafica di quest'ultima equazione è data in figura 3.

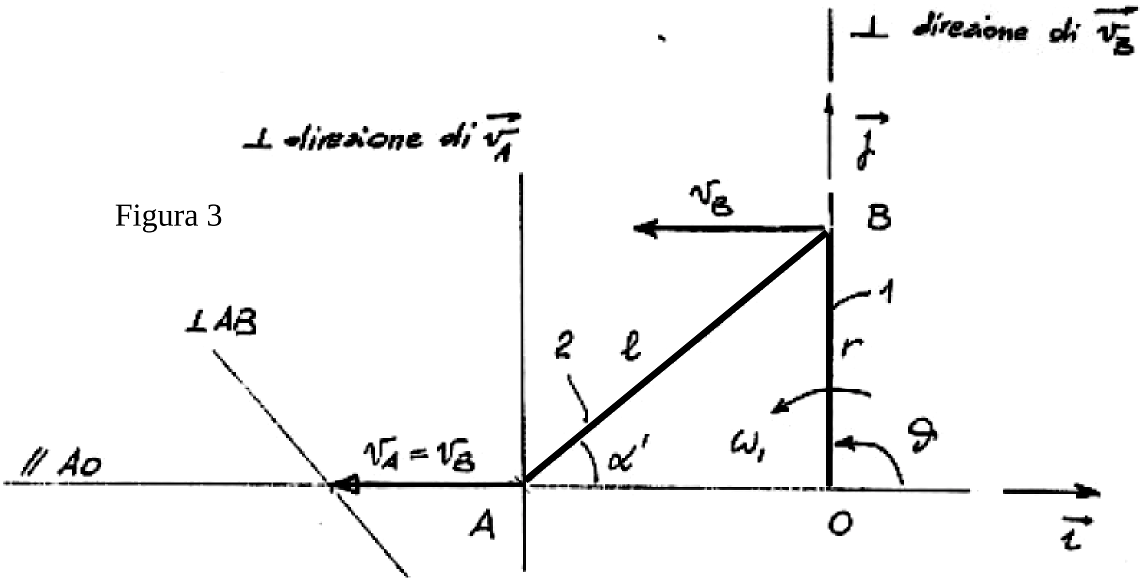


Figura 3

Dalla costruzione grafica di figura 3 si ottiene:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = -10\vec{i} \ \ m/s$$

$$\vec{v}_{A/B} = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

Questa ultima equazione evidenzia che la biella in questa particolare condizione non ruota, trasla solamente.

Il calcolo delle velocità può essere condotto anche utilizzando il centro di istantanea rotazione della biella che si trova nel punto di intersezione delle rette passanti per A e per B, perpendicolari alle direzioni delle velocità dei punti stessi. Tali rette sono parallele fra loro, quindi il centro di istantanea rotazione cade all'infinito, questo significa che il corpo (biella) non ruota.

Calcolo delle accelerazioni

Per le accelerazioni dei punti A e B, analogamente a prima, si ha:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{B/O_n} + \vec{a}_{B/O_t} = \vec{a}_{B/O_n} = -\omega_1^2 r \vec{j} = -1000\vec{j} \ \ rad/s$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B_t} + \vec{a}_{A/B_n}$$

a_A?	$\omega_1^2 r$	$\dot{\omega}_2 l$?	$\omega_2^2 l = 0$	M
// AO	// OB	$\perp AB$	-	D
?	$B \to O$	?	-	V

La rappresentazione dei vettori accelerazione nella precedente equazione è in figura 4:

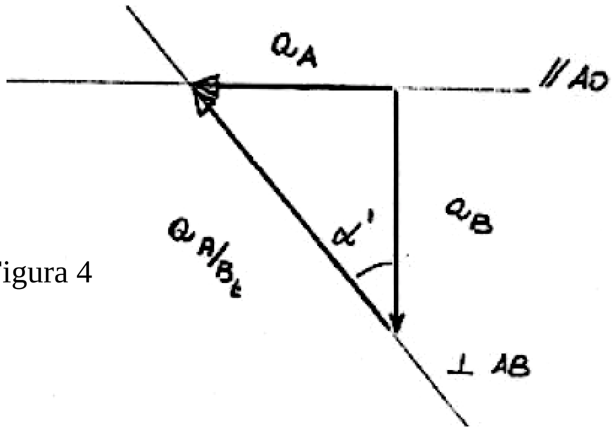


Figura 4

Dalla figura 3, si ricava α': $\sin\alpha' = \frac{r}{l} \Rightarrow \alpha' = 23.58°$

Dal triangolo di vettori di figura 4 si ottengono versi e moduli di $\vec{a}_A$ e di $\vec{a}_{A/B_t}$

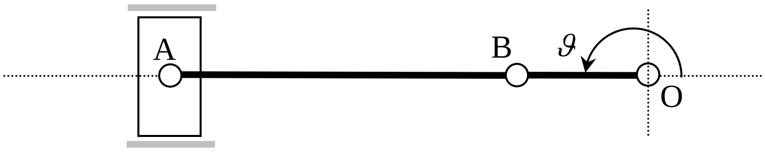
$$a_A = a_B \tan\alpha' = 436.4 \ \ m/s^2$$

$$\vec{a}_A = -436.4\vec{i} \ \ m/s^2$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{l} a_{A/B_t} = \frac{1}{l}\frac{a_B}{\cos\alpha'} = 4364.4 \ \ rad/s^2$$

Il verso di $\dot{\omega}_2$ è orario, come si evince dal verso di $\vec{a}_{A/B_t}$.

CASO per $\vartheta = 180°$



Analogamente ai casi precedenti si esprime la velocità del punto B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B/O} = \vec{v}_{B/O} = -\omega_1 r \vec{j} = -10\vec{j} \ \ m/s$$

Sul corpo rigido biella, per i punti A e B, si scrive:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

v_A?	$\omega_1 r$	$\omega_2 l$?	M
// AO	$\perp OB$	$\perp AB$	D
?	$\downarrow$	?	V

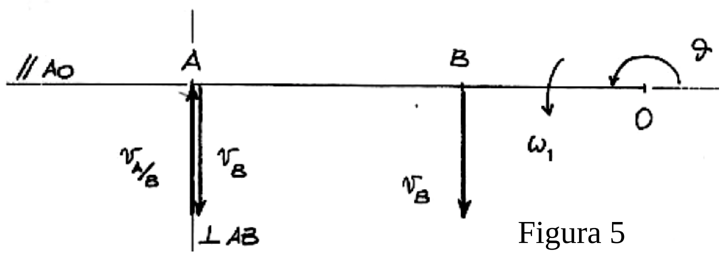


Figura 5

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_B \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{l} v_{A/B} = 40 \ \ rad/s$$

con verso orario di ω_2 , dedotto dal verso di $v_{A/B}$ in figura 5.

In questa condizione $\vec{v}_A = 0$

In questo caso il centro di istantanea rotazione del corpo biella coincide con il punto A.

Calcolo delle accelerazioni

Per l’accelerazione del punto B si ha:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{B/O\,n} + \vec{a}_{B/O\,t} = \vec{a}_{B/O\,n} = \omega_1^{\,2} r \vec{i} = 1000\vec{i} \ \ m/s^2$$

Per il punto A, applicando il teorema di Rivals tra i puni A e B a bordo del corpo rigido biella, si ha:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B\,t} + \vec{a}_{A/B\,n}$$

a_A?	$\omega_1^{\,2} r$	$\dot{\omega}_2 l$?	$\omega_2^{\,2} l$	M
// AO	// OB	$\perp AB$	// AB	D
?	$B \rightarrow O$	?	$A \rightarrow B$	V

L’equazione vettoriale precedente può essere rappresentata come in figura 6

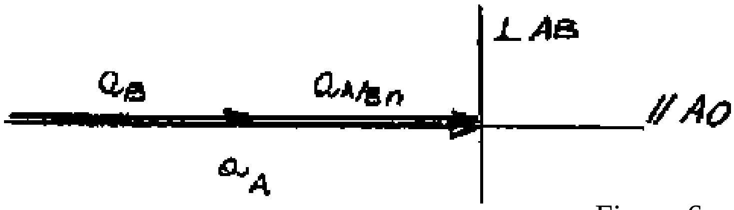


Figura 6

Dalla figura 6 si può ricavare:

$$a_A = a_B + a_{A/B_n} = \omega_1^2 r + \omega_2^2 l = 1400 \ m/s^2$$
$$\overrightarrow{a_A} = 1400\vec{i} \ m/s^2$$
$$\vec{a}_{A/B_t} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = 0$$