

Appunti di Meccanica delle Vibrazioni sistemi ad un grado di libertà

Università degli Studi di Cagliari



Anno accademico 2013-2014.

Premessa

*Questi appunti sono stati raccolti dagli studenti del corso di
Cinematica e Dinamica dei Sistemi Meccanici,
dettati dal prof. Andrea Manuello Bertetto
nell'anno accademico 2013-14.*

Indice

	Pag.
Sistema libero non smorzato ad un grado di libertà	7
<i>Applicazione sperimentale</i>	10
<i>Esempio di sistema oscillante ad un grado di libertà</i>	11
Vibrazioni in sistemi liberi smorzati ad un grado di libertà	18
<i>Comportamento del sistema a seconda del valore di ζ</i>	20
<i>Decremento logaritmico</i>	22
<i>Esperimento: moto di massa sospesa con molla e smorzatore</i>	24
Oscillazioni forzate	28
<i>Oscillazioni forzate in risonanza</i>	32
<i>Trasmissibilità</i>	36
<i>Accelerometro e sismografo</i>	41
Riferimenti bibliografici	47

1. Sistema libero non smorzato ad un grado di libertà

Condizione necessaria perché un sistema fisico sia in grado di manifestare oscillazioni è che sia dotato di elasticità e di massa.

Un schema semplificato di sistema meccanico in grado di manifestare oscillazioni è rappresentato in figura 1.1a, dove sono rappresentate una molla ed una massa.

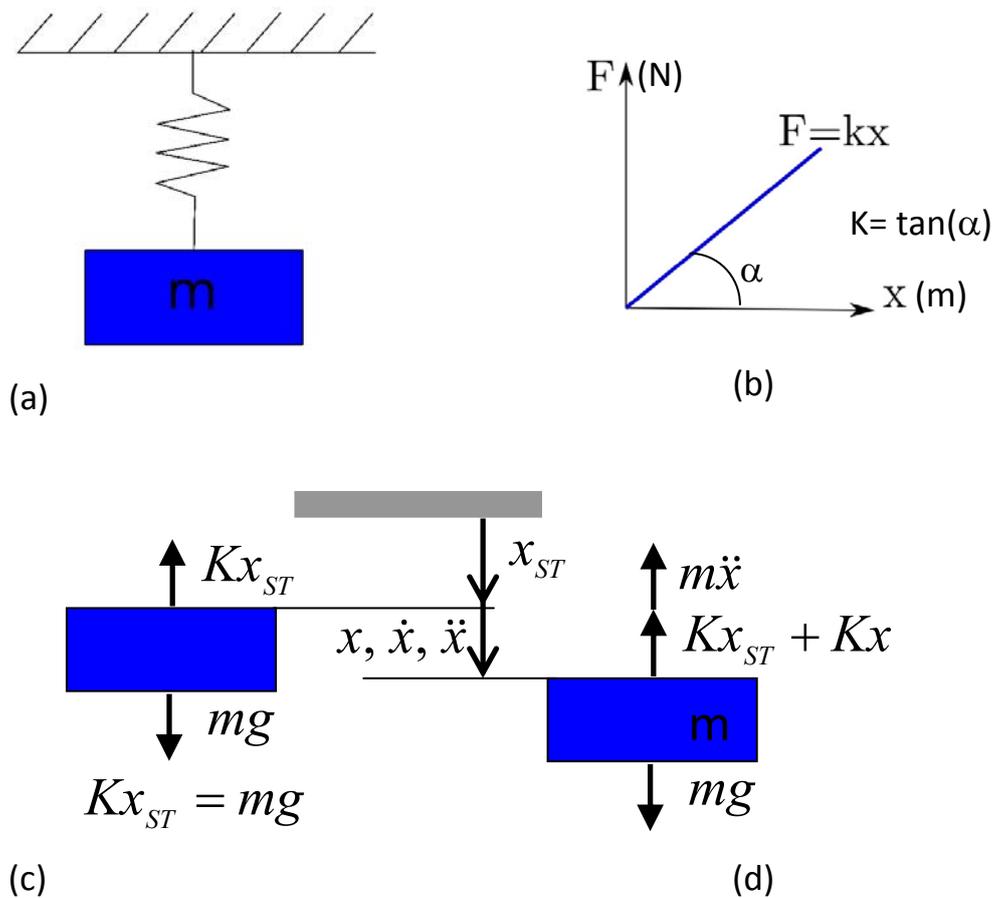


fig. 1.1 Sistema oscillante ad un grado di libertà (a), caratteristica lineare di una molla (b), diagramma di corpo libero della massa (d), (e).

La molla è un elemento in grado di deformarsi, in modo elastico, sotto l'azione di un carico. La sua caratteristica forza-schiacciamento potrebbe essere lineare o non lineare. Nel caso di caratteristica lineare del tipo di quella in figura 1.1b, si definisce una caratteristica costante K della molla che nel sistema internazionale si misura in N/m.

In figura 1.1c è rappresentato il diagramma di corpo libero della massa in condizioni statiche. Si noti come le azioni statiche di peso e molla siano auto-equilibrate. Iniziamo con l'isolare la massa. Il diagramma di corpo libero in condizioni dinamiche di figura 1.1d porta alla scrittura dell'equazione di equilibrio dinamico, secondo il principio di d'Alembert, ricordando come peso e forza elastica statica siano auto equilibrate. Questa equazione è una equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti.

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)x = 0$$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ equazione normalizzata dove si definisce come pulsazione naturale

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

La soluzione sarà del tipo:

$$x = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

In assenza di smorzamento:

$$x = e^{\lambda t}$$

Sostituendo si avrà:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_n^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega_n^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega_n$$

La soluzione sarà: $x = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$

Con Eulero

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \operatorname{sen} \alpha$$

si esprime la soluzione in forma esponenziale con funzioni trigonometriche:

Sostituendo si ha:

$$x = (a + b) \cos \omega_n t + i (a - b) \operatorname{sen} \omega_n t$$

si ritrova la stessa soluzione ottenuta precedenza:

$$x = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t$$

con i valori opportuni per A e per B.

Un altro modo di scrivere questa stessa soluzione è:

$$x = x_0 \operatorname{sen} (\omega_n t + \varphi_0)$$

utilizzando l'espressione del seno di somma di due angoli:

$$x = x_0 [\operatorname{sen} \omega_n t \cos \varphi_0 + \cos \omega_n t \operatorname{sen} \varphi_0]$$

ponendo

$$A = x_0 \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$B = x_0 \cos \varphi_0$$

si ha nuovamente la soluzione nella forma $x = x_0 \operatorname{sen} (\omega_n t + \varphi_0)$.

Una funzione periodica è caratterizzata dalla sua ripetitività ogni intervallo di tempo detto periodo T:

$$f(t + T) = f(t)$$

La funzione seno è periodica con periodo 2π , quindi:

$$[\omega_n(t + T) + \varphi_0] - [\omega_n t + \varphi_0] = 2\pi$$

$$\omega_n t + \omega_n T - \omega_n t = 2\pi$$

Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$, la frequenza è definita come l'inverso del periodo: $f = \frac{1}{T}$

Se si vuole avere una risposta del sistema con alta frequenza, bisogna che la pulsazione ω_n sia grande, il che ci dà un piccolo periodo T e una grande frequenza f.

Per ottenere questo si può ridurre la massa oppure aumentare la rigidità, essendo la pulsazione naturale espressa come rapporto di queste due grandezze sotto radice:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2. Applicazione sperimentale

Si realizza un semplice esperimento con una massa di 1,90kg sospesa ad una molla. Lo schema dell'esperimento è dato in figura 2.1:

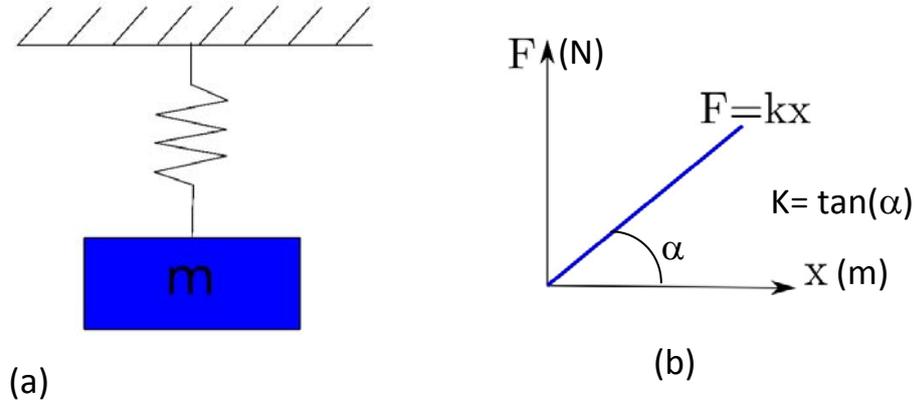


fig. 2.1 sistema oscillante ad un grado di libertà

Non conoscendo la caratteristica della molla, la si misura imponendo carichi noti e misurando l'allungamento della molla. In questo modo si traccia il diagramma della caratteristica della molla. Nel nostro caso la molla è lineare.

Si carica la molla con una forza di 18,63N, corrispondente al peso della massa che si ha a disposizione, e si misura una deformazione di 40mm, la caratteristica della molla sarà:

$$K = \frac{18,63}{0,04} = 465,9 \frac{N}{m} \cong 466 \frac{N}{m}$$

La pulsazione naturale risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{466}{1,9}} = 15,6 \frac{rad}{s}$$

Il periodo sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,4 s$$

Al fine di avere una conferma dei valori calcolati, si perturba il sistema dalla sua condizione di equilibrio statico e si conta un numero intero di oscillazioni in un dato intervallo di tempo. Si contano otto oscillazioni in un tempo di 3,2 secondi e si calcola il periodo T:

$$\Delta t = 3,2 s \quad n = 8 \quad T = \frac{3,2}{8} = 0,4 s. \text{ Questa seconda misura conferma la precedente.}$$

3. Esempio di sistema oscillante ad un grado di libertà

In figura si ha un sistema costituito da una massa sospesa elasticamente, tramite una puleggia mobile. Inizialmente la puleggia mobile è considerata priva di massa. in un secondo tempo la massa della puleggia sarà considerata significativa.

Si calcolerà il periodo delle piccole oscillazioni verticali in entrambi i casi: caso con puleggia di massa trascurabile e con puleggia con massa significativa.

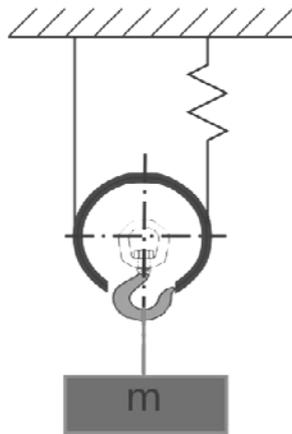


Figura 3.1 – Sistema in studio

1) – in un primo tempo si ipotizza che la massa della puleggia sia trascurabile.

Si seguiranno passi logici successivi per arrivare alla equazione del moto del sistema ed al calcolo del periodo delle piccole oscillazioni verticali.

I passi saranno:

- disegno del diagramma di corpo libero;
- definizione della equazione di equilibrio dinamico (equazione del moto);
- scrittura della equazione del moto in forma canonica ed in forma generalizzata;
- calcolo della pulsazione naturale (ω_n) e del periodo T delle oscillazioni del sistema.

Nel caso statico il diagramma di corpo libero è in figura 2.2 da cui si può scrivere l'equazione di equilibrio statico:

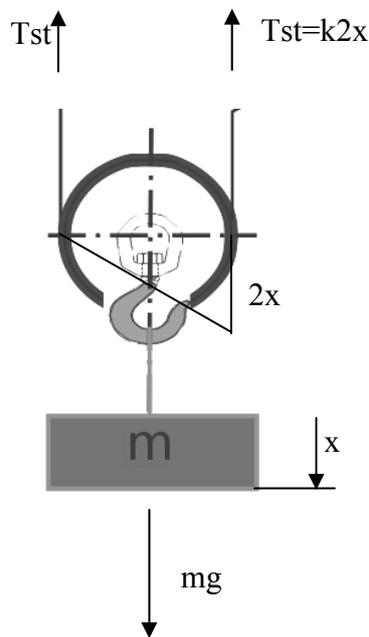


Figura 3.2 – diagramma di corpo libero in condizioni statiche

si osservi come le due tensioni ai capi della fune siano uguali, per l'equilibrio alla rotazione della puleggia, che non è dotata di massa e non ha attrito al perno.

Osservando la figura 2.3a, l'equazione di equilibrio statico risulta:

$$2T_{st} = m * g$$

con m massa sospesa, T_{st} tensione della fune e g accelerazione di gravità.

Nel caso dinamico, entreranno in gioco altri contributi legati alla accelerazione. Le forze statiche prima descritte (peso e contributo statico delle tensioni) sono tra loro equilibrate, non compariranno nell'equazione di equilibrio dinamico.

In riferimento alla figura 2.3 si può imporre l'equilibrio alla traslazione del gruppo massa e puleggia (fig. 2.3b), oppure l'equilibrio alla rotazione della puleggia ed alla traslazione della massa (fig. 2.3c). In entrambi i casi si giunge alla stessa equazione del moto.

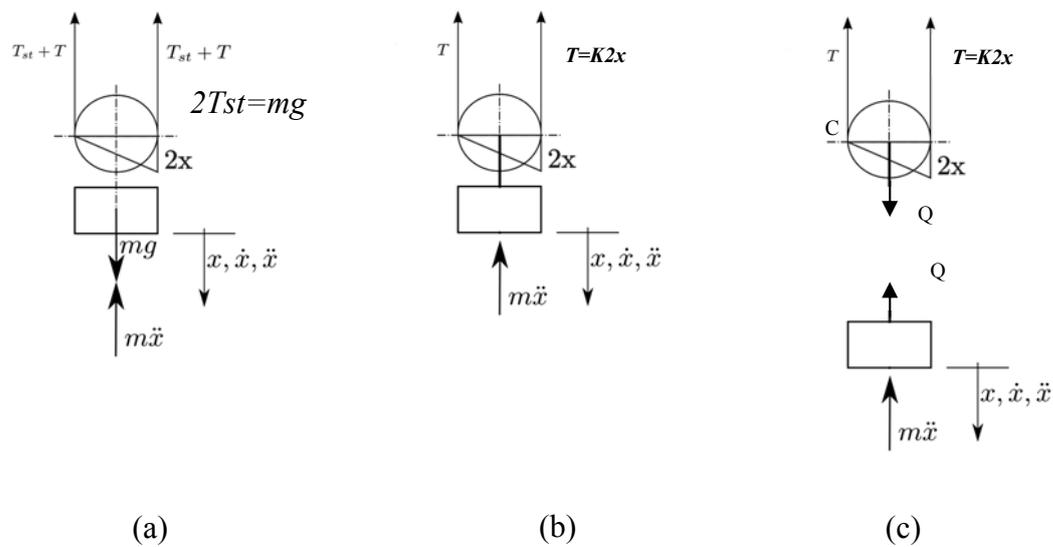


Figura 3.3 – diagramma di corpo libero in condizioni statiche (a), e dinamiche (b, c)

imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale si ha:

$$T + K * 2x + m * \ddot{x} = 0$$

Essendo $T = K * 2x$, per l'equilibrio alla rotazione della puleggia intorno all'asse del perno.

Sostituendo si ottiene:

$$K * 2x + K * 2x + m * \ddot{x} = 0$$

$$K * 4x + m * \ddot{x}$$

Dove:

$K =$ rigidezza elastica della molla $[N/m]$;

$\ddot{x} =$ accelerazione lineare della massa $[m/s^2]$;

$m * \ddot{x} =$ forza d'inerzia della massa m sottoposta alla accelerazione \ddot{x}

Alla stessa equazione del moto si giunge imponendo l'equilibrio alla rotazione della puleggia e alla traslazione della massa. Assumendo come polo dei momenti agenti sulla puleggia il centro di istantanea rotazione C della puleggia, si scrive:

$$K \cdot 2x \cdot 2r - Q \cdot r = 0$$

L'equilibrio alla traslazione della massa consente di scrivere:

$$m \cdot \ddot{x} - Q = 0$$

componendo le due ultime equazioni si ha nuovamente l'equazione del moto:

L'equazione del moto in forma generalizzata diviene:

—

dove ω_n è la pulsazione naturale del sistema che nel SI si misura in (rad/s);

— —

Il periodo — sarà espresso in (s).

Le caratteristiche fisiche del sistema determinano il periodo di oscillazione libera.

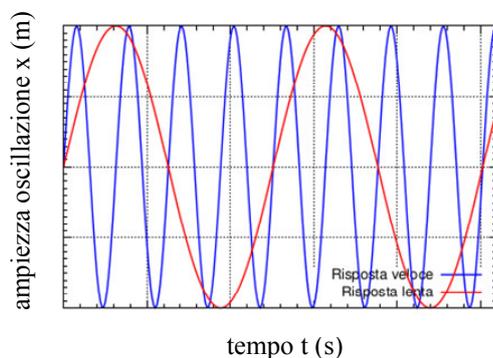


Figura 3.4 – esempio di risposta del sistema lento e veloce.

Per esempio, si considerino due sistemi con periodo T di 1s e 10s

$$T_1 = 10 T_2 \quad \implies \begin{cases} T_1 = 10 [s] \\ T_2 = 1 [s] \end{cases}$$

Due periodi differenti daranno due pulsazioni naturali $\omega_n = \frac{2\pi}{T}$ differenti:

$$\omega_{n1} = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{10} = 0,628 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\omega_{n2} = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{1} = 6,28 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\frac{K}{m} = \frac{\omega_n^2}{4}$$

$$\left(\frac{K}{m}\right)_1 = \frac{\omega_{n1}^2}{4} = \frac{0,628^2}{4} = 0,0986 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$$

$$\left(\frac{K}{m}\right)_2 = \frac{\omega_{n2}^2}{4} = \frac{6,28^2}{4} = 9,86 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$$

Dato che, per il sistema di figura 2.1, vale $\omega_n = 2 \sqrt{\frac{K}{m}}$, si ha:

$$\frac{K}{m} = \frac{\omega_n^2}{4}$$

$$\left(\frac{K}{m}\right)_1 = \frac{\omega_{n1}^2}{4} = \frac{0,628^2}{4} = 0,0986 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$$

$$\left(\frac{K}{m}\right)_2 = \frac{\omega_{n2}^2}{4} = \frac{6,28^2}{4} = 9,86 \left[\frac{rad}{s}\right]^2$$

Fissando la massa m, si può ottenere la rigidezza K e viceversa.

In particolare, volendo avere una frequenza propria (o naturale) del sistema molto alta, in modo tale da poter lavorare a basse frequenze, si potrà incrementare la rigidezza K; e/o decrementare la massa m.

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2) - Si consideri il caso di massa non trascurabile della puleggia

Se il sistema ha una puleggia con massa M_p non trascurabile, la puleggia in presenza di accelerazione (traslatoria e rotatoria) sarà soggetta a forza di inerzia $M_p * \ddot{x}$ e momento dovuto all'inerzia $I_G * \ddot{\vartheta}$, dove I_G è il momento d'inerzia del secondo ordine baricentrico della puleggia intorno al suo asse di rotazione che, se la puleggia è assimilabile a un tratto di cilindro omogeneo, vale $I_G * \ddot{\vartheta}$. mentre $\ddot{\vartheta}$ è l'accelerazione angolare della puleggia intorno al proprio asse, e \ddot{x} è l'accelerazione lineare del baricentro della puleggia lungo la verticale.

Si scrive, ora, l'equazione di equilibrio dinamico del sistema massa sospesa e puleggia, intorno al centro di istantanea rotazione (C):

$$K * 2x * 2r + (M_p + m) * \ddot{x} * r + I_G * \ddot{\vartheta} = 0$$

$$(M_p + m) * \ddot{x} * r + K * 4x * r + I_G * \ddot{\vartheta} = 0$$

Nell'equazione compaiono due variabili: x e ϑ .

Essendo quello in studio un sistema ad un solo grado di libertà, le due variabili sono legate da una condizione cinematica imposta dallo svolgimento della fune sulla puleggia:

$$x = \vartheta * r; \ddot{\vartheta} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

Sostituendo, allora, nell'equazione del moto, si ha:

$$(M_p + m) * \ddot{x} * r + 4K * x * r + \frac{M_p * r^2}{2} * \frac{\ddot{x}}{2} = 0$$

$$(M_p + m) * \ddot{x} + 4K * x + \frac{M_p * r}{2} * \frac{\ddot{x}}{2} = 0$$

In forma canonica:

$$\ddot{x} * \left(m + \frac{3}{2}M_p\right) + 4K * x = 0$$

$$\ddot{x} + x * \frac{4K}{\left(m + \frac{3}{2}M_p\right)} = 0$$

dove si pone in evidenza la pulsazione naturale (ω_n), espressa da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4K}{\left(m + \frac{3}{2}M_p\right)}} = 2 * \sqrt{\frac{K}{\left(m + \frac{3}{2}M_p\right)}}$$

Si può immediatamente notare, dall'espressione di ω_n , che, rispetto al sistema in cui la massa della puleggia (M_p) era trascurabile, si ha una risposta più lenta: la pulsazione naturale diminuisce e, quindi, anche la frequenza propria:

$$\omega_n = 2\pi f$$

Per aumentare la pulsazione naturale, fermo restando il valore delle masse, si dovrà incrementare la rigidezza K .

4. Vibrazioni in sistemi liberi smorzati ad un grado di libertà.

I sistemi reali presentano una caratteristica smorzante che provoca una diminuzione di ampiezza della risposta nel tempo in assenza di forzante. Nel caso di smorzamento viscoso la presenza di azioni dissipative si manifesta con una forza F contraria e proporzionale alla velocità \dot{x} .

$$F = -\beta\dot{x}$$

In questa espressione β è detta costante di smorzamento.

Nella figura xx si è schematizzato uno smorzatore viscoso.

Uno schema elementare di sistema libero smorzato è costituito da una massa m , da uno smorzatore con costante di smorzamento β e da una molla con costante elastica k , come rappresentato in figura:

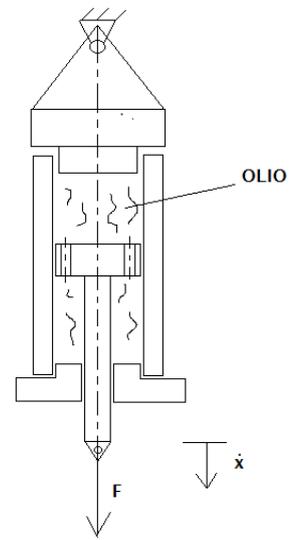


Figura 4.1 - Schema funzionale di smorzatore viscoso

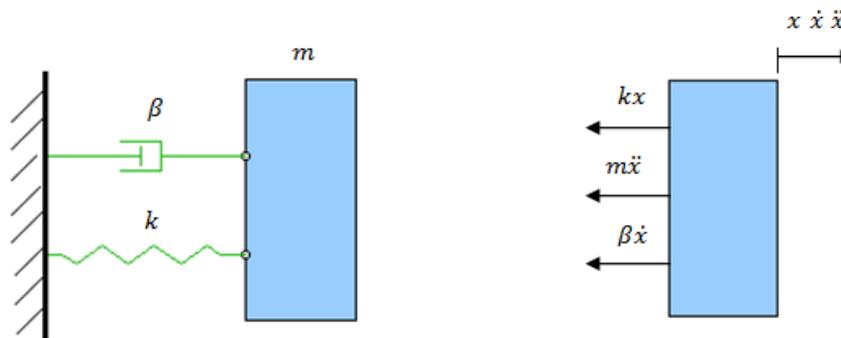


Figura 4.2 - Schema di sistema libero smorzato ad un grado di libertà

L'equazione del moto del sistema in esame vale:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

Da cui, dividendo per m , si ha:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Viene introdotto il parametro ζ , fattore di smorzamento, definito come:

$$\zeta = \frac{\beta}{2m\omega_n}$$

dove la pulsazione naturale vale:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sostituendo i parametri, l'equazione viene scritta in forma canonica:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti.

La soluzione è del tipo $x = e^{\lambda t}$ le cui derivate prima e seconda sono:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t} ; \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Sostituendo la soluzione e le sue derivate nell'equazione di equilibrio si ottiene l'equazione caratteristica del sistema:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

le cui radici sono:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \omega_n(-\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

La risposta del sistema sarà esprimibile come combinazione lineare:

$$x = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

$$x = ae^{\omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + be^{\omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

A seconda del valore di ζ si definirà il sistema come:

$\zeta > 1$ sistema sovrasmorzato;

$\zeta < 1$ sistema sottosmorzato;

$\zeta = 1$ sistema in condizioni di smorzamento critico;

4.1 Comportamento del sistema a seconda del valore di ζ

Se $\zeta > 1$

Si hanno due radici $\lambda_{1,2}$ reali distinte entrambe negative, la risposta del sistema sarà:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (ae^{(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + be^{(-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t})$$

Analizzando i termini dell'espressione di $x = A(B + C)$ ponendo

$$A = e^{-\zeta\omega_n t}; B = ae^{(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}; C = be^{(-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

si analizza il comportamento della risposta al crescere del tempo

Se t aumenta, A decresce, C aumenta, B diminuisce.

$$AB = ae^{(-\zeta\omega_n t) + [(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t]}$$

$$AB = ae^{[(-\zeta) + (\sqrt{\zeta^2-1})]\omega_n t}$$

L'esponente risulta negativo, dunque:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Al crescere del tempo la risposta del sistema tende a zero.

Se $\zeta < 1$

Le radici $\lambda_{1,2}$ dell'equazione caratteristica sono:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

La risposta del sistema risulta essere:

$$x = ae^{(-\zeta+i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + be^{(-\zeta-i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}$$

che può essere scritta come:

$$x = x_0 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_s t + \varphi_0)$$

dove:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

dove ω_s è la pulsazione propria del sistema smorzato, minore della pulsazione propria del sistema non smorzato ω_n . x_0 e φ_0 sono costanti definite dalle condizioni iniziali.

La risposta è formata da una parte sinusoidale e da una parte esponenziale che decresce col tempo: $x = AB$ dove $A = x_0 e^{-\zeta\omega_n t}$; $B = \sin(\omega_s t + \varphi_0)$. La risposta sarà di tipo sinusoidale ad ampiezza massima decrescente:

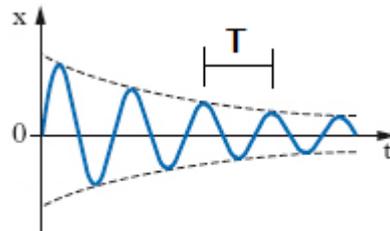


Figura 4.2 – Risposta di un sistema libero smorzato ad un grado di libertà

Si dovrà definire uno pseudo periodo: il fenomeno infatti non si ripresenta congruente a se stesso, ma simile. Questo pseudoperiodo sarà maggiore del periodo di un sistema come quello studiato, ma privo di smorzamento, analogamente si definisce una pseudofrequenza:

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

Anche in questo caso:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Se $\zeta=1$

$$\beta = 2m\omega_n$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\omega_n$$

La risposta del sistema sarà espressa da:

$$x = ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t} = (a + bt)e^{\lambda t} = (a + bt)e^{-\omega_n t}$$

L'esponenziale negativo fa sì che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

In questo caso si manifesta un moto aperiodico come nel caso $\zeta > 1$. La situazione di smorzamento critico è quella che fa tendere a zero la risposta nel tempo più breve.

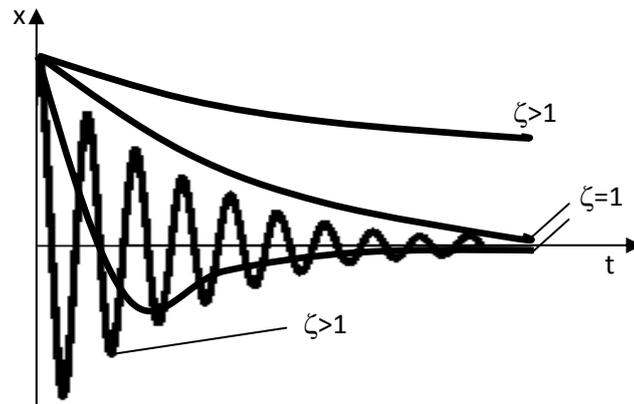


Figura 4.3 – Risposta di un sistema libero ad un grado di libertà nei tre casi: sotto smorzato ($\zeta < 1$), sovra smorzato ($\zeta > 1$) e critico ($\zeta = 1$).

4.2 Decremento logaritmico

In un sistema reale la misura delle caratteristiche legate alla massa può essere realizzata con misure indirette di peso e di caratteristiche inerziali, la misura di caratteristiche elastiche si può pensare di realizzarla con misure di deformazioni sotto opportuni carichi noti. La misura di caratteristiche di smorzamento è spesso poco agevole. Nel caso di un moto oscillatorio smorzato, basandosi sulla diminuzione dell'ampiezza dell'oscillazione, si può risalire al valore dello smorzamento del sistema.

Si consideri il caso con $0 < \zeta < 1$ la cui risposta vale:

$$x = x_0 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_s t + \varphi_0)$$

Analizzando le oscillazioni si può calcolare il rapporto tra l'ampiezza massima dell'oscillazione al tempo t e l'ampiezza del massimo successivo misurata al tempo $t+T$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{e^{-\zeta \omega_n (t+T)}} = e^{\zeta \omega_n T}$$

In questo rapporto la parte sinusoidale a numeratore e denominatore si semplifica essendo la funzione seno periodica.

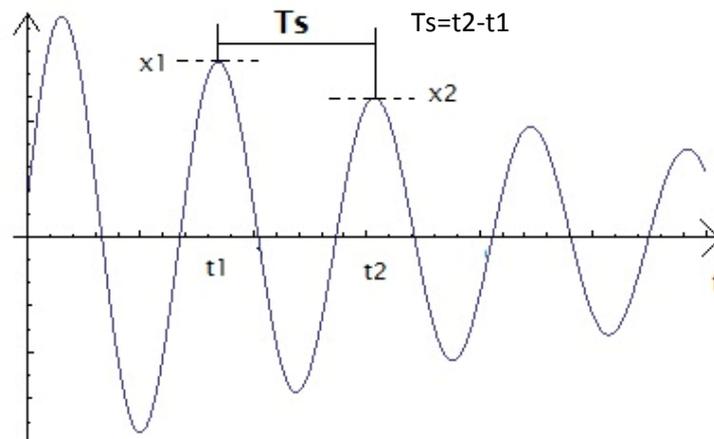


Figura 4.4 – Risposta di un sistema libero ad un grado di libertà dove è evidenziato il decremento della risposta dopo un intervallo di tempo di uno pseudoperiodo.

Si definisce decremento logaritmico δ , la grandezza:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T_s$$

Sostituendo a T_s la sua espressione, in funzione della pulsazione propria del sistema smorzato, si ha:

$$\delta = \zeta \omega_n T_s = \zeta \frac{2\pi}{\omega_s} = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Una volta misurate le risposte del sistema a distanza temporale pari al lo pseudoperiodo, scritta l'espressione del decremento logaritmico δ , si può ricavare il fattore di smorzamento ζ :

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

per meglio misurare lo smorzamento si prendono due ampiezze lontane nel tempo un numero n di pseudo periodi:

$$\frac{x_i}{x_{i+n}} = e^{\zeta \omega_n n T_s}$$

Il decremento logaritmico in questo caso vale:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_i}{x_{i+n}}$$

In figura si vede un caso in cui si considerano quattro pseudo periodi.

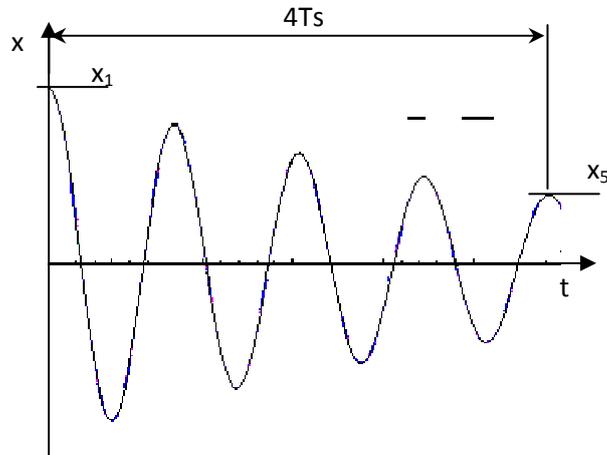


Figura 4.5 – Risposta di un sistema libero ad un grado di libertà dove è evidenziato il decremento della risposta dopo un intervallo di tempo di quattro pseudoperiodi.

3.3 Esperimento: moto di massa sospesa con molla e smorzatore.

Il sistema sperimentale, schematizzabile come nella figura sottostante, consiste di un contenitore contenente circa 2 litri d’acqua, sospeso ad una molla e a spugne rappresentative di uno smorzatore.

Dati rilevati:

- massa sospesa
- caratteristica della molla
- numero di oscillazioni complete
- perturbazione iniziale
- massimo spostamento
- dopo n oscillazioni

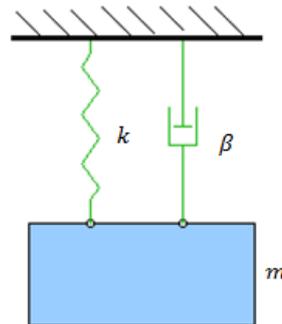


Figura 4.6 - Schema del sistema

Per individuare l’andamento delle oscillazioni del sistema, si procede calcolando il fattore di smorzamento ζ , tramite il decremento logaritmico δ .
 Si fanno compiere 5 oscillazioni al sistema rilevando la massima ampiezza di risposta:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_{0+n}} = \frac{1}{5} \ln \frac{60}{10} = 0,36$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,36}{\sqrt{4\pi^2 + 0,36^2}} = 0,057$$

Il sistema risulta quindi decisamente sotto smorzato. Noto il fattore di smorzamento ζ , si ricava la costante di smorzamento β e la costante di smorzamento critico β_{cr} .

La pulsazione naturale risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{466}{1,9}} = 15,66 \text{ rad/s}$$

Per il fattore di smorzamento si ha:

$$\zeta = \frac{\beta}{2m\omega_n} \rightarrow \beta = \zeta 2m\omega_n = \zeta 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,057 * 2 * 1,9 \sqrt{\frac{466}{1,9}} = 3,39 \frac{Ns}{m}$$

il coefficiente di smorzamento critico è:

$$\beta_{cr} = 2m\omega_n = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 * 1,9 \sqrt{\frac{466}{1,9}} = 59,47 \frac{Ns}{m}$$

Essendo il sistema decisamente sottosmorzato, la pulsazione propria del sistema smorzato ω_s sarà di poco inferiore a quella naturale ω_n . Infatti:

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 15,66 \sqrt{1 - 0,057^2} = 15,64 \text{ rad/s}$$

La risposta x del sistema è descritta dalla relazione:

$$x = x_0 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_s t + \varphi_0)$$

Le condizioni iniziali sono note:

$$\text{al tempo } t = 0 \rightarrow x = 6 * 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow 6 * 10^{-2} = x_0 \sin(\varphi_0)$$

Derivando rispetto a t la risposta x , si ottiene l'espressione della velocità del sistema:

$$\dot{x} = x_0(-\zeta\omega_n)e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi_0) \omega_s$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -x_0\zeta\omega_n \cos(\varphi_0) \omega_n \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Mettendo a sistema la risposta x e la velocità di deformazione \dot{x} al tempo $t = 0$ si ricava la fase dell'oscillazione all'istante iniziale φ_0 .

$$\begin{cases} 6 * 10^{-2} = x_0 \sin(\varphi_0) \\ 0 = -x_0\zeta\omega_n \cos(\varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Dunque:

$$x = x_0 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_s t + \varphi_0) = 6 * 10^{-2} e^{-0,057 * 15,66 * t} \sin(15,64 t + \frac{\pi}{2})$$

La risposta del sistema ha, quindi, un andamento simile a quello riportato di seguito:

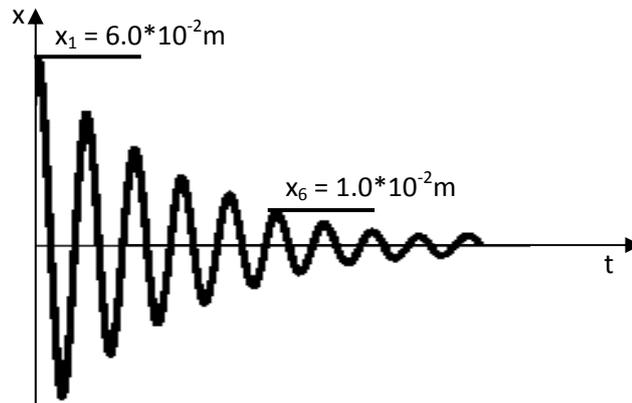


Figura 4.7 – Risposta del sistema ($\zeta < 1$).

Di conseguenza la pseudofrequenza dell'oscillazione è:

$$f = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{15,64}{2\pi} = 2,5 \text{ s}^{-1}$$

Con uno pseudoperiodo T_s di:

$$T_s = \frac{1}{f} = 0,4 \text{ s}$$

Si può valutare l'energia dissipata durante l'oscillazione, questo significa valutare l'energia potenziale elastica E_k a risposta massima, quando si ha velocità nulla e, quindi, energia cinetica nulla.

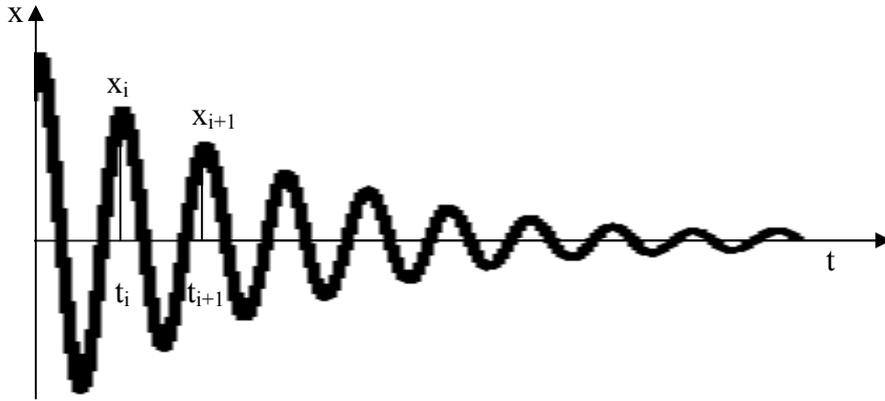


Figura 4.8 – Risposta del sistema ($\zeta < 1$).

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} k x_i^2 \quad \text{energia del sistema all'istante } t_i$$

$$E_{k_{i+1}} = \frac{1}{2} k x_{i+1}^2 \quad \text{energia del sistema all'istante } t_{i+1}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (x_i^2 - x_{i+1}^2) \quad \text{variazione di energia del sistema tra l'istante } t_i \text{ e l'istante } t_{i+1}$$

Si può definire l'energia dissipata specifica come:

$$\frac{\Delta E_k}{E_{k_i}} = \frac{\frac{1}{2} k (x_i + x_{i+1})(x_i - x_{i+1})}{\frac{1}{2} k x_i^2} = \frac{(x_i + x_{i+1})(x_i - x_{i+1})}{x_i^2} = \left(1 + \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right)$$

sapendo che:

$$\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{-\delta}$$

allora $\frac{\Delta E_k}{E_{k_i}}$ è esprimibile in termini di decremento logaritmico δ :

$$\frac{\Delta E_k}{E_{k_i}} = (1 - e^{-\delta})(1 + e^{-\delta}) = 1 - e^{-2\delta}$$

Come si può notare da quest'ultima relazione, $\frac{\Delta E_k}{E_{k_i}}$ è direttamente proporzionale a δ : più è elevato lo smorzamento, più è l'energia dissipata.

5. Oscillazioni forzate

Un sistema ad un grado di libertà, come quello di figura 4.1, presenta delle oscillazioni forzate quando viene sottoposto ad una forza esterna $F(t)$ descritta da una legge temporale.

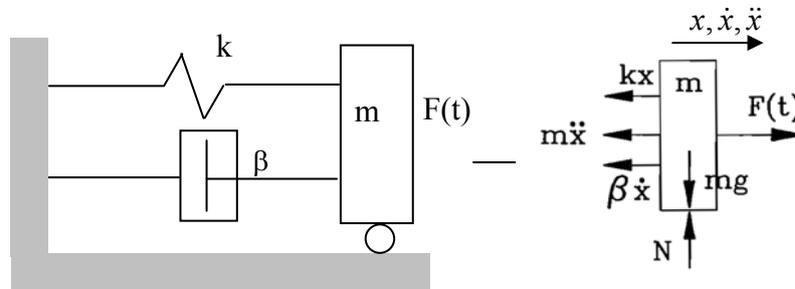


Figura 5.1 – sistema oscillante forzato e diagramma di corpo libero.

Nel caso in cui la forza $F(t)$ abbia un andamento periodico, questa può essere approssimata attraverso lo sviluppo in serie di Fourier.

$$F(t) = F_0 \sum_{n=1}^{10} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$$

Si consideri una forzante armonica che risponda alla legge:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

in cui F_0 rappresenti l'ampiezza massima della forzante ed Ω la pulsazione della forzante. L'equazione del moto del sistema scaturisce dalla equazione di equilibrio alla traslazione della massa, il cui diagramma di corpo libero è rappresentato in figura 4.1b. Questa equazione del moto è una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

L'integrale generale della equazione completa è somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di un integrale particolare della equazione completa:

$$x = x_g + x_p$$

l'integrale generale x_g dell'omogenea associata è espresso da:

$$x_g = x * e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

osservando l'espressione di x_g , si vede come il termine esponenziale negativo tenda a zero al tendere ad infinito del tempo; gli altri termini in x_g sono finiti. L'integrale generale dell'omogenea associata tende a zero al tendere del tempo ad infinito.

Si può osservare che ogni termine è funzione del tempo; ciò comporta che i vettori di figura 4.2 siano dei vettori rotanti, la figura ruota rigidamente al trascorrere del tempo. Tale figura è rappresentativa di un generico caso ad un istante (t). Al crescere del tempo aumenta anche l'angolo Ωt , con una rotazione rigida del poligono in senso antiorario.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo (OAB) si ha:

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = [x_0(\omega_n^2 - \Omega^2)]^2 + (2 \zeta \omega_n \Omega x_0)^2$$

Esprimendo l'incognita x_0 , si ha: e l'angolo φ si ha:

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2 \zeta \omega_n \Omega)^2}}$$

Osservando ancora il triangolo OAB si può scrivere:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \zeta \omega_n \Omega}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\text{con } \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Riprendendo l'equazione che esprime x_0 e dividendo per ω_n^2 si ha:

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Considerando l'espressione dello spostamento statico del sistema sottoposto alla forza F_0 :

$$x_{st} = \frac{F_0}{k}$$

sostituendo nell'espressione di x_0 , si ha:

$$\frac{x_0}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

In quest'ultima equazione, il rapporto $\frac{x_0}{x_{st}}$ è detto *fattore di amplificazione*. Esso esprime quanto l'ampiezza massima della oscillazione dinamica è più grande o più piccola della deformazione statica quando agisca una forza costante pari alla ampiezza della forzante. Questo fattore è rappresentato in figura 4.3:

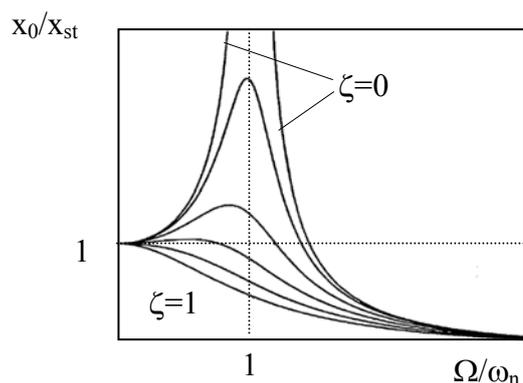


Figura 5.3 – andamento del fattore di amplificazione al variare del rapporto tra pulsazione della forzante e pulsazione naturale del sistema smorzato.

Gli andamenti in figura 4.3 sono parametrizzati con ζ . Quando $\zeta=0$ (assenza di smorzamento), per $\Omega/\omega_n=0$ il fattore di amplificazione risulta pari a 1: il sistema è in condizioni statiche; per Ω/ω_n che tende a $+\infty$, il fattore di amplificazione tende a 0, cioè il sistema soggetto ad una forzante che ha una frequenza altissima rispetto a quella naturale, non si perturba dalla condizione statica. In figura 4.3 si può anche osservare come al crescere di ζ , il fattore di amplificazione assume, a parità di Ω/ω_n , valori inferiori, per cui la curva sarà sempre al di sotto di quella con $\zeta=0$.

Una situazione particolare si ha per $\Omega/\omega_n=1$, in cui si dice che il sistema è in *risonanza*: x/x_{st} tende a $+\infty$ per $\zeta=0$.

In generale, è necessario allontanarsi da valori alti del fattore di amplificazione, con il quale si arriverebbe al collasso del sistema. Per allontanarsi da una situazione in cui il fattore di amplificazione diventa molto più grande dell'unità si può agire su Ω (pulsazione della forzante) o su ω_n (che dipende dal sistema), in modo da avere un valore il più lontano possibile dall'unità. Se $\zeta>0$, si ha smorzamento e il valore del fattore di amplificazione ha un massimo per Ω/ω_n leggermente minore dell'unità.

Si definisce risonanza la situazione in cui il fattore di amplificazione ha il suo massimo (se $\zeta=0$ si ha risonanza per $\Omega/\omega_n=1$; se $\zeta>0$ si ha risonanza per $\Omega/\omega_n < 1$).

Analizzando, invece, l'andamento di $\tan(\varphi)$ al variare di Ω/ω_n si ottiene il grafico in figura 4.4

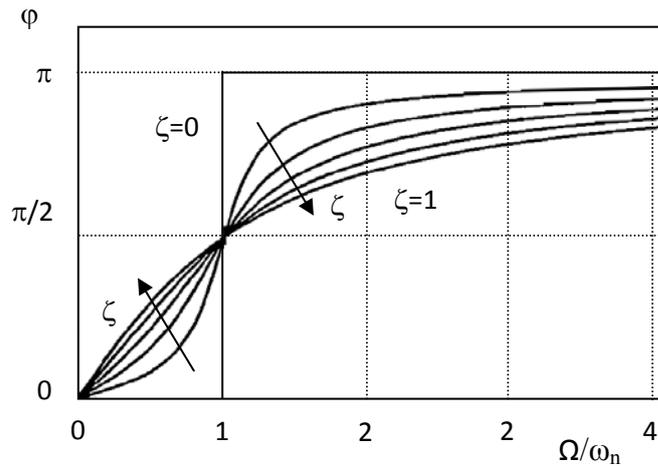


Figura 5.4 – andamento dello sfasamento dovuto allo smorzamento

Si può notare che per $\zeta=0$ si hanno due casi:

- Se $\Omega < \omega_n$ la risposta del sistema è in fase con la forzante (e $\varphi=0$);
- Se $\Omega > \omega_n$ la risposta del sistema è in opposizione di fase con la forzante (e $\varphi=\pi$).

Il passaggio da una configurazione all'altra avviene bruscamente quando $\Omega=\omega_n$, in cui si avrà la presenza di un gradino. Per ζ crescenti, invece, l'angolo φ assume un andamento come riportato in figura, da cui si nota che per $\Omega=\omega_n$ la risposta del sistema è sempre sfasata di $\pi/2$ rispetto alla forzante (il sistema si dice sia in quadratura), mentre per $\zeta > 1$ il sistema non oscilla più.

5.1 Oscillazioni forzate in risonanza

Si vuole studiare il sistema rappresentato in figura 4.5, quando si operi in condizioni di risonanza, cioè con fattore di amplificazione al valore massimo. Questo, se $\zeta=0$, corrisponde a $\Omega=\omega_n$.

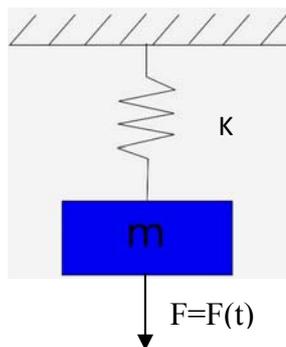


Figura 5.5 – sistema non smorzato soggetto a forzante

La forzante è:

$$F_t = F_0 \cos \Omega t$$

Mentre l'equazione del moto, che è l'equazione di equilibrio della massa m , è:

$$m\ddot{x} - kx = F_0 \cos \Omega t$$

La soluzione è somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare dell'equazione completa:

$$x = x_g + x_p$$

Dove la soluzione generale è data da:

$$x_g = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

Mentre una particolare è del tipo:

$$x_p = x_0 * \cos(\Omega t - \varphi).$$

Come si è ricavato precedentemente:

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2 \zeta \omega_n \Omega)^2}}$$

Nel caso in cui $\zeta=0$, l'equazione precedente diventa:

$$x_0 = \frac{F_0}{m\omega_n^2 - m\Omega^2}$$

per cui la soluzione particolare può essere riscritta: è:

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t - \varphi)$$

Sommando la soluzione generale con quella particolare si ottiene l'integrale generale dell'equazione completa:

$$x = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t - \varphi)$$

Per ricavare le costanti A e B, si impongono le condizioni iniziali: per $t=0$, si ha $x=0$ e $\dot{x}=0$.

La derivata della soluzione è:

$$\dot{x} = -A \omega_n \sin \omega_n t + B \omega_n \cos \omega_n t - \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} \Omega \sin(\Omega t - \varphi)$$

Considerando il caso di risonanza, con risposta infinita, si ha smorzamento assente: $\zeta=0$ implica $\varphi=0$; in questo caso si ottiene:

$$x(0) = A + \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)}$$

$$\dot{x}(0) = B\omega_n$$

Da cui, esplicitando in A e B si ha:

$$A = - \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)}$$

$$B = 0$$

Sostituendo A e B nell'espressione di x, si ricava x in funzione di t:

$$x(t) = - \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos \omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

Nel caso in cui Ω tenda a ω_n , si ha che:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_n} \frac{F_0}{m} \frac{\cos \Omega t - \cos \omega_n t}{\omega_n^2 - \Omega^2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Questa è una forma indeterminata, che si può risolvere applicando la regola di de l'Hopital (la regola prende il nome da Guillaume de l'Hôpital, matematico francese del XVII secolo, che la pubblicò nel suo libro del 1696 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. In seguito si è scoperto che la regola fu enunciata da Johann Bernoulli matematico svizzero, suo insegnante; per questo la regola viene talora chiamata regola di Bernoulli.):

$$\frac{F_0}{m} \lim_{\Omega \rightarrow \omega_n} \frac{-t \operatorname{sen} \Omega t}{-2\Omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\operatorname{sen} \omega_n t}{2\omega_n} t = A * B$$

Dove

$$A = \frac{F_0}{2 m \omega_n} t$$

$$B = \operatorname{sen} \omega_n t$$

quindi:

$$x(t) = \frac{F_0}{2 m \omega_n} t * \operatorname{sen} (\omega_n t)$$

La risposta è data dal prodotto di una funzione armonica (B limitata tra -1 e +1), e una lineare (A) proporzionale al tempo. Dunque, si ottiene un moto oscillatorio con ampiezza crescente nel tempo. Per t tendente a $+\infty$, l'ampiezza cresce anch'essa come illustrato in figura 4.6

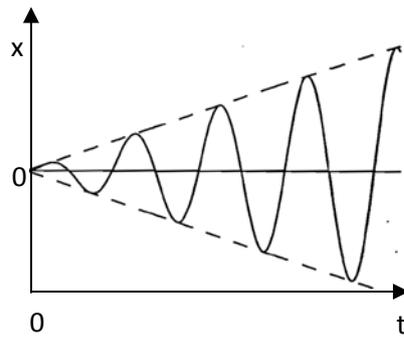


Figura 5.6 – andamento della risposta del sistema in risonanza con smorzamento nullo al trascorrere del tempo.

Nelle condizioni in cui $\Omega = \omega_n$, se ζ è diverso da zero 0, $\varphi = \pi/2$, il sistema si dice sia in quadratura. In condizioni di risonanza, con $\zeta \cong 0$, il termine dovuto alla forzante, che è di valore finito, è bilanciato solo dal termine dissipativo ($2\zeta\omega_n\Omega x_0$) anch'esso finito. Poiché $\zeta \cong 0$, il termine ($2\zeta\omega_n\Omega x_0$) sarà finito solo se x_0 tenderà ad infinito. I termini inerziale ed elastico sono in equilibrio tra loro. Questi ultimi sono molto grandi, poiché è molto grande il valore assunto da x_0 .

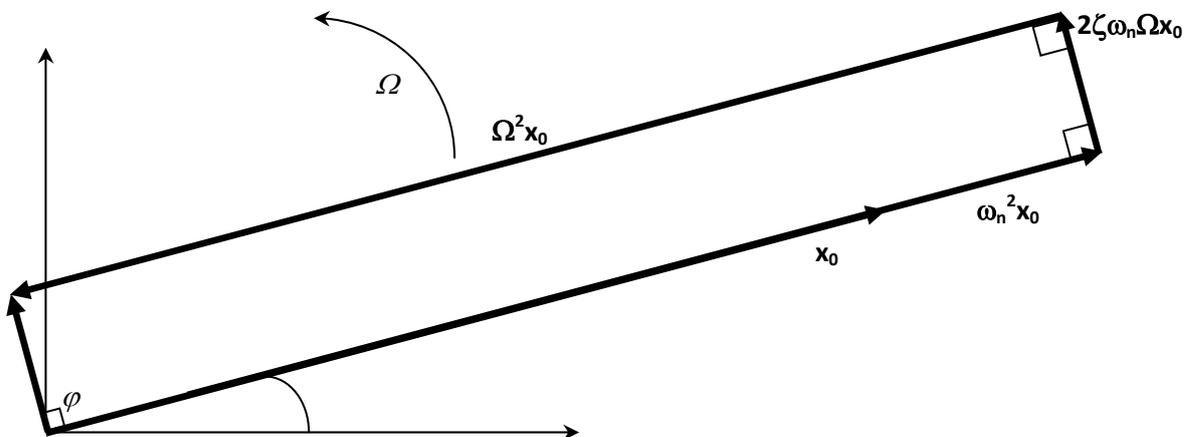


Figura 5.7 – vettori rotanti in condizioni di risonanza con $\Omega/\omega_n=1$, $\zeta \cong 0$.

In riferimento alla figura 4.2, dove si vedono i vettori rotanti in condizioni generiche, si considereranno le condizioni di risonanza e si ridisegneranno i vettori.

Lo sfasamento φ vale $\varphi = \pi/2$, come si vede dalla figura 4.4 per $\Omega/\omega_n=1$ e ζ prossimo a zero. Dunque, in condizioni di risonanza il disegno dei vettori rotanti assume l'aspetto di figura 4.7.

Il poligono, in condizioni di risonanza, è un rettangolo in cui i lati corti hanno modulo uguale espresso da F_0/m e da $2\zeta\omega_n\Omega x_0$.

F_0/m è un rapporto di grandezze finite: F_0 è la massima intensità della forzante ed m è la massa del sistema oscillante. Il termine $2\zeta\omega_n\Omega x_0$ è prodotto di grandezze finite ($2\omega_n\Omega$), di una grandezza infinitesima ($\zeta \approx 0$) e di una grandezza che rappresenta la massima risposta del sistema (x_0). Tale intensità x_0 dovrà tendere ad infinito poiché $|2\zeta\omega_n\Omega x_0| = |F_0/m| = \text{valore finito}$.

La risposta x del sistema in condizioni di risonanza avrà una massima intensità x_0 che tenderà ad infinito.

5.2 Trasmissibilità

Considerando un sistema vibrante forzato ad un grado di libertà, come in figura 4.8, può essere importante conoscere la forza trasmessa dalla sospensione al vincolo. Si introduce quindi il concetto di trasmissibilità, ossia il rapporto tra l'ampiezza della forza trasmessa al vincolo F_T , e l'ampiezza della forzante F_0 .

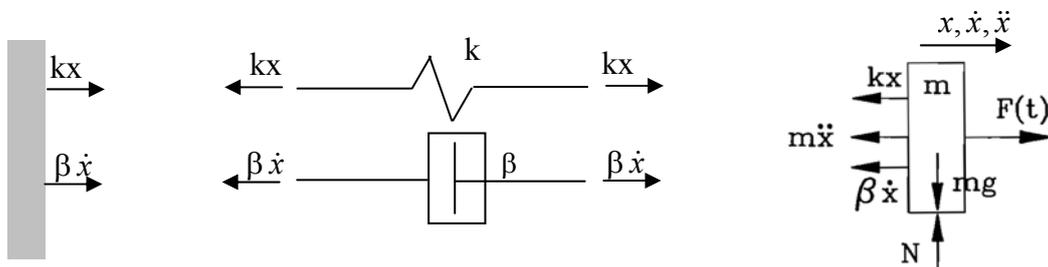


Figura 5.8 – diagramma di corpo libero che evidenzia le azioni trasmesse al telaio.

$F' = \beta\dot{x} + kx = \text{forza trasmessa al telaio dalla sospensione}$

L'equazione del moto è scritta come segue:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

La risposta del sistema è data dalla posizione della massa:

$$x = x_0 * \text{sen}(\Omega t - \varphi)$$

La cui derivate prima e seconda sono:

$$\dot{x} = -\Omega x_0 \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\Omega^2 x_0 \sin(\Omega t - \varphi)$$

Indicando con F' la forza trasmessa al telaio ($F' = \beta\dot{x} + kx$), essa è dovuta in parte alla molla ed in parte dallo smorzatore; essa assume l'espressione:

$$\beta\dot{x} + kx = F'$$

Per cui, sostituendo nell'equazione del moto della massa, si ottiene:

$$F' = F_0 \sin \Omega t - m\ddot{x} = F_T \sin(\Omega t - \psi)$$

dove F_T è l'ampiezza massima della forza trasmessa.

Ricordando che:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{\beta}{2 m \omega_n}$$

E scrivendo l'equazione in forma canonica si ha:

$$\ddot{x} + 2 \zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

$$2 \zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_T}{m} \sin(\Omega t - \psi)$$

dove ψ è lo sfasamento della forza F' trasmessa al telaio rispetto alla forzante agente sulla massa. Lo sfasamento ψ è diverso dallo sfasamento φ della risposta x , posizione della massa m .

Come illustrato in figura 4.9, i termini delle equazioni possono essere rappresentati come vettori rotanti.

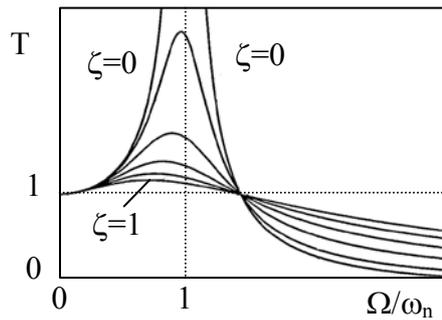


Figura 5.10 – andamento della trasmissibilità T con Ω/ω_n , al variare del fattore di smorzamento ζ .

La trasmissibilità di un sistema può riferirsi a grandezze che siano confrontabili, non necessariamente rappresentate da forze. Un caso interessante è rappresentato da una massa sospesa ad un telaio mobile che si muove con legge periodica ad esempio di tipo sinusoidale nota: $y = b \sin(\Omega t)$

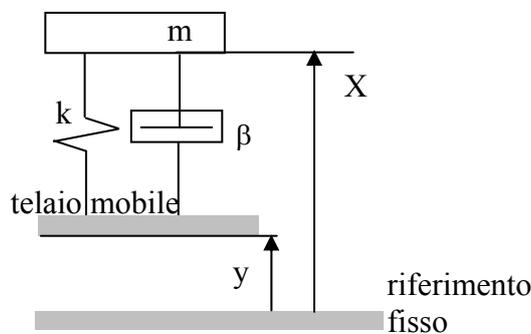


Figura 5.11 – Massa sospesa a telaio mobile

Imponendo l'equilibrio della massa m , la cui posizione assoluta è data da X , si ottiene l'equazione del moto, osservando che la forza elastica sarà proporzionale alla deformazione della molla e la forza viscosa alla velocità di deformazione. Questo significa che entreranno in gioco le differenze di posizione e di velocità di telaio e massa.

$$m\ddot{X} + \beta(\dot{X} - \dot{y}) + k(X - y) = 0$$

che può essere riscritta isolando le incognite:

$$m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX = \beta\dot{y} + ky$$

La soluzione sarà del tipo

$$X = X_0 \sin(\Omega t - \varphi)$$

Sostituendo nella equazione del moto X , y e le loro derivate si ha, in forma generalizzata:

$$\begin{aligned} -\Omega^2 X_0 \sin(\Omega t - \varphi) + 2\zeta\omega_n\Omega X_0 \cos(\Omega t - \varphi) + \omega_n^2 X_0 \sin(\Omega t - \varphi) = \\ = 2\zeta\omega_n\Omega b \cos(\Omega t) + \omega_n^2 b \sin(\Omega t) = \\ = B \sin(\Omega t + \psi) \end{aligned}$$

Nell'espressione del termine noto $B \sin(\Omega t + \psi)$, il termine B rappresenta l'ampiezza della forza che dal telaio è trasmessa alla massa m , divisa per la massa stessa e la fase ψ è la fase di questa forza rispetto allo spostamento del telaio mobile. I termini di questa equazione del moto possono essere rappresentati come proiezioni di vettori rotanti:

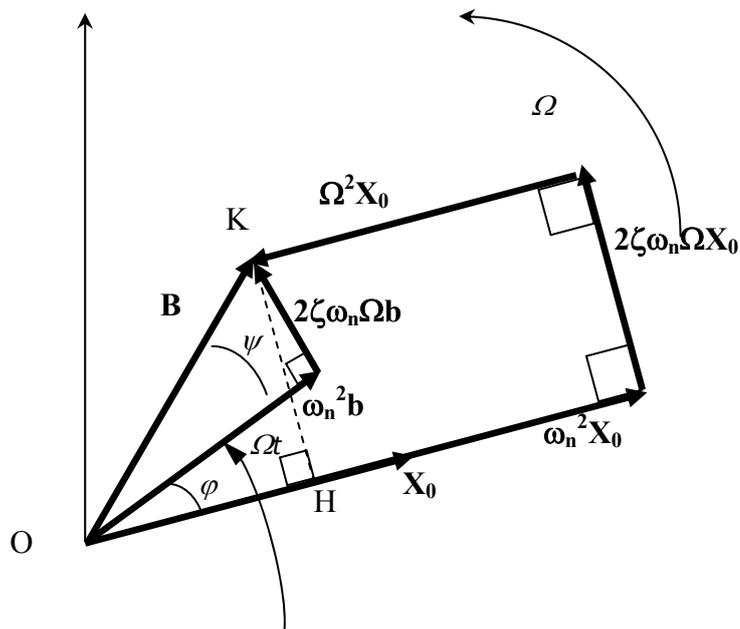


Figura 5.12 – Vettori rotanti relativi al caso di massa sospesa a telaio mobile

Utilizzando i vettori rotanti, si possono determinare le incognite nella equazione del moto generalizzata con considerazioni trigonometriche:

$$B^2 = X_0^2((2\zeta\omega_n\Omega)^2 - (\omega_n^2 - \Omega^2)^2) = b^2((2\zeta\omega_n\Omega)^2 + (\omega_n^2)^2)$$

In questo caso, la trasmissibilità M è il rapporto tra le due ampiezze X_0 e b . Questo rapporto ha la stessa espressione che si è trovata per la trasmissibilità di forze T trovata precedentemente:

$$M = \frac{X_0}{b}$$

6. Accelerometro e sismografo

Sfruttando il fenomeno delle trasmissibilità si possono costruire strumenti per la misura di accelerazioni e spostamenti. In particolare, si intende misurare lo spostamento di una base a cui lo strumento è solidale, avendo così informazioni sulla legge del moto in terremoti, e si vuole avere la misura delle accelerazioni di un corpo a cui lo strumento è applicat, avendo così realizzato un accelerometro.

Il sistema in figura 5.1 ha un telaio a cui è collegata una massa attraverso una molla e uno smorzatore. Il telaio si muove rispetto ad un riferimento fisso, secondo una legge sinusoidale, tale spostamento è chiamato X .

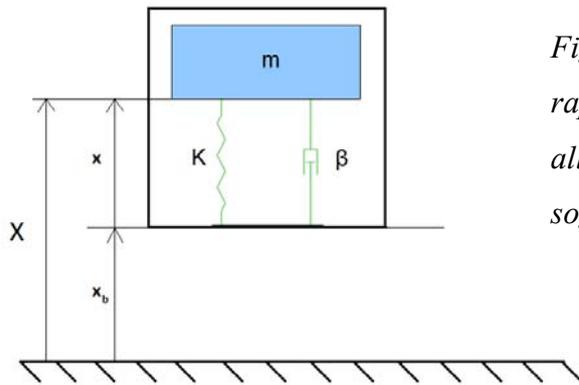


Figura 6.1 – massa sospesa a telaio mobile rappresentato da un riferimento solidale alla terra soggetta a terremoto o da corpo soggetto ad accelerazione.

x = posizione della massa m rispetto ad un riferimento fisso: coordinata assoluta della massa m .

X = spostamento del telaio mobile rispetto al riferimento fisso.

x_b = spostamento della massa m rispetto al telaio mobile.

Il diagramma di corpo libero della massa m è disegnato in figura 5.2:

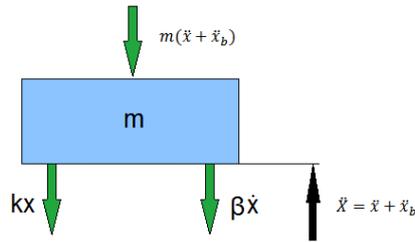


Figura 6.2 - diagramma di corpo libero della massa m

La massa m è soggetta ad una forza d'inerzia, alla forza della molla ed a quella dello smorzatore. Si noti che:

- si ha forza di inerzia $m(\ddot{x} + \ddot{x}_b)$ in presenza di accelerazione assoluta $\ddot{x} + \ddot{x}_b$ della massa m
- si ha forza elastica kx soltanto se la massa m si allontana o si avvicina al telaio mobile, cioè se varia x ;
- si ha forza viscosa dallo smorzatore $\beta\dot{x}$ soltanto se la massa m ha una velocità diversa da quella del telaio mobile, cioè se varia \dot{x} ;

Imponendo l'equilibrio alla massa m si ha l'equazione del moto:

ricordando che $X = x_b + x$, si ha:

Considerando che il telaio mobile si muova rispetto, al riferimento fisso secondo una certa legge periodica, considerando un eventuale sviluppo di Fourier non è restrittivo ipotizzare una legge sinusoidale per x_b :

Derivando si ha:

Si scriva, ora, l'equazione di equilibrio sostituendo \ddot{x} con l'espressione scritta sopra:

In forma canonica:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = b\Omega^2 \sin \Omega t$$

Ricordando che:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{\beta}{m} = 2\zeta\omega_n$$

si ottiene:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = b\Omega^2 \sin \Omega t$$

Si può notare che quest'ultima è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, il suo integrale è dato dall'integrale generale dell'omogenea associata x_g più un integrale particolare dell'equazione completa x_p :

$$x = x_g + x_p$$

Il termine x_g tende a zero molto rapidamente, in quanto è un esponenziale negativo nel tempo, dopo un tempo sufficientemente lungo l'integrale generale dell'equazione completa sarà rappresentato solo dall'integrale particolare x_p che sarà del tipo del termine noto:

$$x_p = x_0 \sin(\Omega t - \varphi)$$

Derivando:

$$\dot{x}_p = x_0 \Omega \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}_p = -x_0 \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi)$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione di equilibrio si ha:

$$-x_0 \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi) + 2\zeta\omega_n x_0 \Omega \cos(\Omega t - \varphi) + \omega_n^2 x_0 \sin(\Omega t - \varphi) = b\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$M = \frac{x_0}{b} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\Omega)^2}} = \frac{\Omega^2/\omega_n^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta\frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

L'andamento della funzione $M=X_0/b$ al variare di Ω/ω_n è rappresentato in figura 5.3:

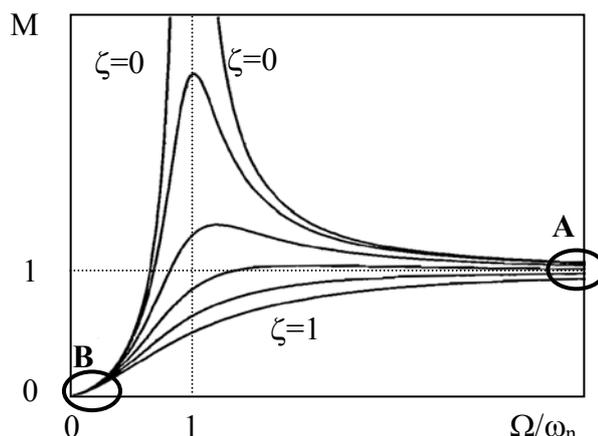


Figura 6.3 – andamento della trasmissibilità $M=X_0/b$ al variare di Ω/ω_n

Si pensi di introdurre a bordo del telaio mobile un rotolo di carta millimetrata, con raggio r , che ruoti a velocità costante ϖ . Alla massa m si collega un pennino che permette di eseguire una traccia sul rullo di carta. La traccia che si vedrà sul rotolo svolto darà lo spostamento x della massa rispetto alla scatola con $r\varpi t$, che significa t essendo noti e costanti il raggio r del rotolo e la velocità angolare ϖ .

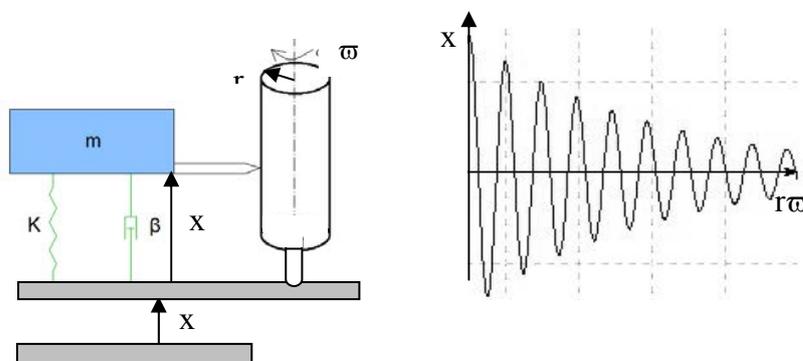


Figura 6.4 – Sistema di misura che sfrutta la trasmissibilità per la misura di ampiezza di terremoti o di accelerazioni.

Riferendosi al grafico in figura 5.3 si individuano due zone particolarmente interessanti A e B. In queste due zone, quale sia il valore del fattore di smorzamento ζ non è rilevante. In queste zone si può utilizzare l'espressione di M con $\zeta=0$:

$$M = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right|}$$

Nella zona A di figura 5.3, dove $\Omega \gg \omega_n$, il sistema rileva x proporzionale allo spostamento del telaio mobile x_b . Il sistema può essere usato come sismografo. La cosa risulta facilmente evidente se si osserva l'espressione della trasmissibilità M con $\zeta=0$, tanto si è detto che in A e B il valore di ζ non è influente su M . In questo caso si ha infatti $M=x_0/b \cong 1$.

Nella zona B di figura 5.3, dove $\Omega \ll \omega_n$, il sistema rileva lo spostamento x proporzionale alla accelerazione del telaio mobile \ddot{x}_b . Infatti, l'espressione di M , con $\zeta=0$ e $\Omega/\omega_n \ll 1$ risulta $M=(\Omega/\omega_n)^2$ che è proporzionale a $\ddot{x}_b)_{\max} = (\Omega/\omega_n)^2$

Al fine di avere uno strumento adatto all'utilizzo come sismografo si utilizzerà un sistema fisico che abbia $\Omega/\omega_n \gg 1$, dunque un sistema con una piccola massa ed una elevata rigidità.

Al fine di avere uno strumento adatto all'utilizzo come sismografo si utilizzerà un sistema fisico che abbia $\Omega/\omega_n \ll 1$, dunque un sistema con una grande massa ed una bassa rigidità.

Si dovranno utilizzare strumenti diversi a seconda di quali intervalli di moti sismografici e di andamenti di accelerazioni si rileveranno in modo di utilizzare gli strumenti negli opportuni intervalli di Ω/ω_n .

Riferimenti bibliografici

Carlo Ferraresi, Terenziano Raparelli, *Meccanica Applicata*, ed. CLUT, Torino, 2007.

Alessandro Fasana, Stefano Marchesiello, *Meccanica delle Vibrazioni*, ed. CLUT, Torino, 2006.

Carlo Ferrari, Ario Romiti, *Meccanica Applicata alle Macchine*, ed. UTET, Torino, 1966.

Guido Belforte, *Meccanica Applicata*, ed. Levrotto&Bella, Torino,

Giorgio Diana, Federico Cheli, *Dinamica dei Sistemi Meccanici*, ed. Polipress, Milano, 2010.

William T. Thomson, Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibration with Applications*, Publisher: Prentice Hall PTR, 1997.

Maia, N. M. M., Silva, J. M. M. et al., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press Ltd., England, 1997

Shin, K., Hammond, J.K., *Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers*, John Wiley & Sons, England, 2008

Ewins D.J., *Modal testing: theory and practice*, Research Studies Press Ltd., England, 1995.

